III. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Федеральное агентство по образованию
ГОУ ВПО «Уральский государственный технический университет – УПИ»
Институт образовательных информационных технологий

III. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Учебное пособие

Научный редактор – доц., канд. физ. - мат. наук О.А. Кеда

Печатается по решению редакционно-издательского совета

Екатеринбург
2005

УДК 514.742.2(075.8)
ББК 22.151.5я 73
В 26

Рецензенты:
кафедра физики Уральского государственного лесотехнического университета;
доктор физ. - мат. наук, проф. А.П. Танкеев, зав. лабораторией ИФМ УрО РАН

Авторы**:** А.Б. Соболев, М.А. Вигура, А.Ф. Рыбалко, Н.М. Рыбалко

В 26 III. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА: учебное пособие /
А.Б. Соболев, М.А. Вигура, А.Ф. Рыбалко, Н.М. Рыбалко. Екатеринбург:
ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2005. 49 с.

ISBN 5-321-00633-4

Учебно-методическое пособие предназначено для обеспечения самостоятельной работы студентов и содержит краткое изложение теории, примеры решения задач и задания для самостоятельной работы, состоящие из 17 задач с ответами, а также тесты для быстрого контроля знаний. Каждый студент выполняет один из вариантов заданий и оформляет отчетную работу, состоящую из условия, решения и ответа к каждой из задач своего варианта.

Рекомендовано Уральским отделением Учебно-методического объединения
вузов РФ в области строительного образования в качестве учебного пособия
для студентов строительных специальностей направления 6533500
“Строительство” всех форм обучения

Подготовлено кафедрой высшей математики

УДК 514.742.2(075.8)
ББК 22.151.5я 73

ISBN 5-321-00633-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

1.1. Определение вектора

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Вектором*** называется направленный отрезок прямой.

Вектор обозначается либо значком $\overrightarrow{AB}$, где точки A и B задают начало и конец вектора, либо одной строчной буквой $\vec{a}$.

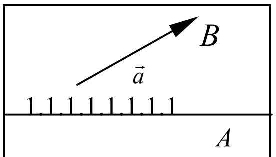

Рис. 1.1. Вектор

На чертеже будем обозначать вектор стрелкой.

Начало вектора называется ***точкой*** его ***приложения***.

Для обозначения длины вектора будем пользоваться символом модуля $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ или $|\vec{a}|$.

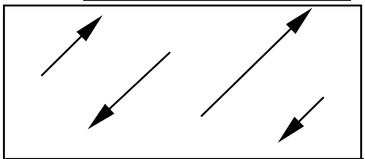
Рис. 1.2. Коллинеарные векторы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Вектор называется ***нулевым***, если начало и конец его совпадают.

Нулевой вектор не имеет определенного направления и имеет длину, равную нулю.

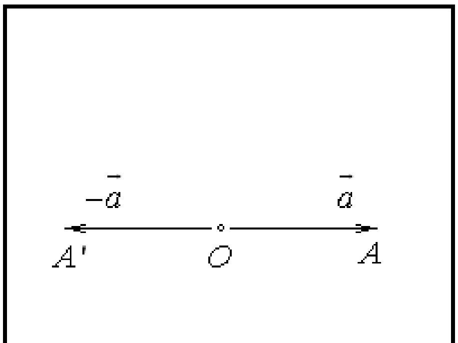

Рис. 1.3. Противоположный вектор

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Векторы называются ***коллинеарными***, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Два вектора называются ***равными***, если они коллинеарны, имеют одинаковую длину и направление. Все нулевые векторы считаются равными.

Для каждого вектора $\vec{a} = \overline{OA}$ существует ***противоположный*** вектор $-\vec{a} = \overline{OA'}$, коллинеарный вектору $\vec{a}$, имеющий ту же длину и противоположное направление.

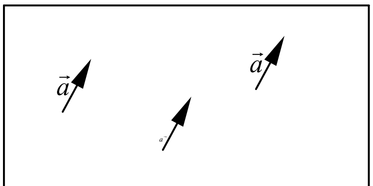

Рис. 1.4. Вектор $\vec{a}$ может быть отложен от произвольной точки

Точка приложения вектора может быть выбрана произвольно. Так, на рис. 1.4 изображен один и тот же вектор.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Вектор называется ***параллельным*** некоторой плоскости, если он лежит на прямой, параллельной этой плоскости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Векторы, параллельные одной и той же плоскости, называются ***компланарными***.

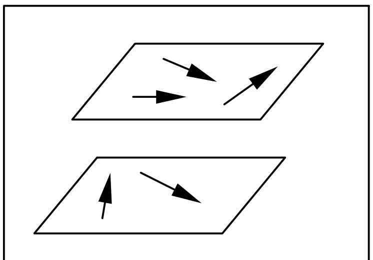
Рис. 1.5. Компланарные векторы

Линейные операции над векторами

Линейными операциями над векторами называются сложение векторов и умножение вектора на вещественное число.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Суммой*** $\vec{a}+\vec{b}$ двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор, идущий из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$ при условии, что вектор $\vec{b}$ приложен к концу вектора $\vec{a}$.

Правило сложения векторов, изложенное в этом определении, обычно называют ***правилом треугольника***.

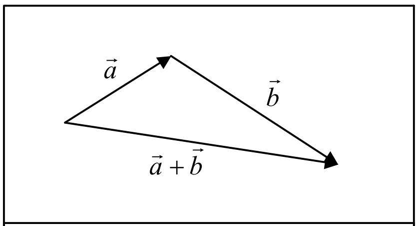

Рис. 1.9. Правило треугольника

Правило сложения векторов обладает следующими свойствами:

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (переместительное свойство);
2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (сочетательное свойство);
3) существует нулевой вектор $\vec{0}$, такой, что $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ для любого вектора $\vec{a}$ (особая роль нулевого вектора);
4) для каждого вектора $\vec{a}$ существует противоположный ему вектор $\vec{a}'$, такой, что $\vec{a}+\vec{a}'=\vec{0}$.

Доказательство свойства 1).

Рассмотрим произвольный параллелограмм $ABCD$.

Пусть $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$. Тогда $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}$. Но $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\vec{b}+\vec{a}$.

Таким образом, $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

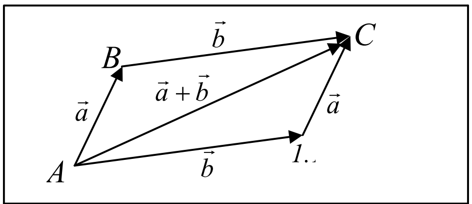

Рис. 1.10. Правило параллелограмма

Замечание. При доказательстве свойства 1 обосновано еще одно правило сложения векторов, называемое **правилом параллелограмма:** если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ приложены к общему началу и на них построен параллелограмм, то сумма $\vec{a}+\vec{b}$ этих векторов представляет собой диагональ параллелограмма, идущую из общего начала векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Доказательство свойства 2).

Выполним следующее построение (см. рис 1.11): отложим вектор $\vec{b}$ от конца вектора $\vec{a}$, вектор $\vec{c}$ от конца вектора $\vec{b}$. Тогда вектор $\vec{a}+\vec{b}$ идет из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$, вектор $\vec{b}+\vec{c}$ идет из начала вектора $\vec{b}$ в конец вектора $\vec{c}$, а векторы $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ и $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ оба идут из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{c}$, т.е. совпадают.

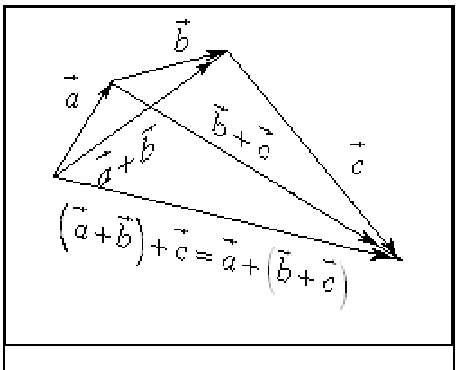

Рис. 1.11. К доказательству свойства 2

Доказательство свойства 3).

Пусть $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{0}=\overrightarrow{BB}$, так как его начало и конец совпадают. Тогда $\vec{a}+\vec{0}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, что и требовалось доказать.

Доказательство свойства 4).

Для любого вектора $\vec{a}$ существует такой вектор $\vec{a}'=-\vec{a}$, для которого $\vec{a}+\vec{a}'=\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$, что и требовалось доказать.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Произведением $\alpha\vec{a}$ вектора $\vec{a}$ на вещественное число α называется вектор $\vec{b}$, коллинеарный вектору $\vec{a}$, имеющий длину $|\alpha|\cdot|\vec{a}|$ и имеющий направление, совпадающее с направлением вектора $\vec{a}$ в случае $\alpha > 0$ и противоположное направлению вектора $\vec{a}$ в случае $\alpha < 0$.

Геометрический смысл операции умножения вектора на число: при умножении вектора $\vec{a}$ на число α вектор $\vec{a}$ "растягивается в α раз".

Операция умножения вектора на число обладает следующими свойствами:

5) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ (унитарность);

6) $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$ (сочетательное свойство числовых сомножителей);

7) $(\alpha+\beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ (распределительное свойство векторного сомножителя относительно суммы чисел);

8) $\alpha(\vec{a}+\vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$ (распределительное свойство сомножителя относительно суммы векторов);

Доказательство свойства 5).

Докажем, что $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$. Для этого докажем, что векторы $\vec{c} = 1 \cdot \vec{a}$ и $\vec{d} = \vec{a}$ равны.

1) Вектор $\vec{c} = 1 \cdot \vec{a}$ коллинеарен вектору $\vec{d} = \vec{a}$ по определению произведения вектора на число.

2) $\left|\vec{d}\right| = \left|1 \cdot \vec{a}\right| = |1| \cdot \left|\vec{a}\right| = \left|\vec{a}\right| = \left|\vec{d}\right|$, то есть векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ имеют одинаковую длину.

3) Векторы $\vec{c} = 1 \cdot \vec{a}$ и $\vec{d} = \vec{a}$ имеют одинаковое направление, так как вектор $\vec{c} = 1 \cdot \vec{a}$ имеет направление, совпадающее с направлением вектора $\vec{d} = \vec{a}$ по определению произведения вектора на положительное число.

Доказательство свойства 6).

Докажем что $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$. Обозначим $\vec{c} = \alpha\left(\beta\vec{a}\right)$, $\vec{d} = (\alpha\beta)\vec{a}$.

1) Так как α и β - числа, $\vec{c}$ коллинеарен $\vec{d}$ по определению произведения вектора на число.

2) $\left|\vec{c}\right| = \left|\alpha\left(\beta\vec{a}\right)\right| = |\alpha| \cdot \left|\beta\vec{a}\right| = |\alpha| \cdot |\beta| \cdot \left|\vec{a}\right| = |\alpha\beta| \cdot \left|\vec{a}\right| = \left|(\alpha\beta)\vec{a}\right| = \left|\vec{d}\right|$.

На рисунке приведен пример взаимного расположения векторов $\vec{c}$ и $\vec{d}$.

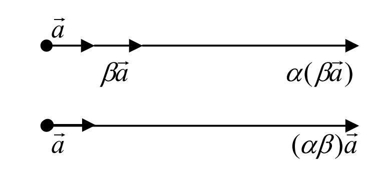

Рис. 1.12. К доказательству свойства 6)

3) Выпишем варианты взаимного направления векторов $\vec{c}$ и $\vec{d}$.

Если $\beta > 0$, $\beta\vec{a}$ направлен также, как и $\vec{a}$. Тогда если $\alpha > 0$, вектор $\vec{c} = \alpha\left(\beta\vec{a}\right)$ направлен также, как и $\vec{a}$, а если $\alpha < 0$, вектор $\vec{c} = \alpha\left(\beta\vec{a}\right)$ противоположно направлен вектору $\vec{a}$.

Если $\beta < 0$, $\beta\vec{a}$ направлен противоположно вектору $\vec{a}$. Тогда если $\alpha > 0$, вектор $\vec{c} = \alpha\left(\beta\vec{a}\right)$ направлен противоположно $\vec{a}$, а если $\alpha < 0$, вектор $\vec{c} = \alpha\left(\beta\vec{a}\right)$ направлен так же, как и вектор $\vec{a}$.

Легко заметить, что такое же направление имеет во вскх рассмотренных случаях и вектор $\vec{d} = (\alpha\beta)\vec{a}$.

В случае $\alpha = 0$, $\beta = 0$, или $\vec{a} = 0$ равенство, очевидно, выполняется.

Доказательство свойства 7).

Докажем, что $(\alpha+\beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$. Обозначим $\vec{c} = (\alpha+\beta)\vec{a}$ и $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$.

1) Векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ коллинеарны вектору $\vec{a}$ по определению произведения вектора на число, и, следовательно, коллинеарны между собой.

2) Докажем, что $|\vec{c}| = |\vec{d}|$.

Пусть для определенности $\alpha > 0, \beta < 0, |\alpha| > |\beta|$. (См. рис. 1.13.).

$|\vec{c}| = |(\alpha+\beta)\vec{a}| = |\alpha+\beta| \cdot |\vec{a}| = ||\alpha| - |\beta|| \cdot |\vec{a}|$

$|\vec{d}| = |OB| = |OA| - |AB| = |\alpha\vec{a}| - |\beta\vec{a}| = |\alpha||\vec{a}| - |\beta||\vec{a}| =$

$= (|\alpha| - |\beta|)|\vec{a}| = ||\alpha| - |\beta|| \cdot |\vec{a}|.$

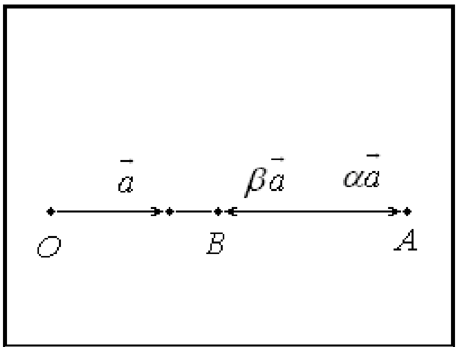

Рис. 1.13. К доказательству свойства 7

3) Так как по предположению $\alpha > 0, \beta < 0, |\alpha| > |\beta|$, векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ направлены одинаково.

Остальные случаи соотношения величин и знаков чисел α и β рассматриваются аналогично.

В случае $\alpha = 0$, $\beta = 0$, или $\vec{a} = 0$ равенство, очевидно, выполняется.

Доказательство свойства 8).

Докажем, что $\alpha(\vec{a}+\vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$.

Обозначим $\vec{c} = \alpha(\vec{a}+\vec{b})$ и $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$.

1) Если $\alpha = 0$, $\vec{c} = \vec{d} = \vec{0}$ - утверждение верно.

2) Пусть $\alpha > 0$. Рассмотрим случай, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны.

Отложим от точки O векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и сложим их по правилу параллелограмма. Полученный вектор $\vec{a}+\vec{b}$ умножим на число α. Пусть $\alpha(\vec{a}+\vec{b}) = \overrightarrow{OF}$. Обозначим точками A и B концы векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно, с точкой C - конец вектора $\vec{a}+\vec{b}$. Через конец вектора $\overrightarrow{OF}$, отложенного от точки O, проведем прямые, параллельные векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и обозначим точки их пересечения с продолжениями векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ через D и E соответственно.

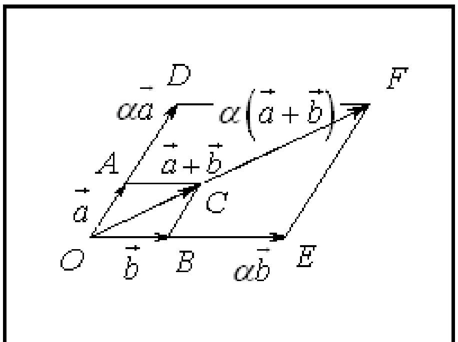

Рис. 1.14. К доказательству свойства 8

Тогда

$$\frac{|OF|}{|OC|} = \frac{|OD|}{|OA|} = \frac{|OE|}{|OB|}$$

в силу подобия треугольников ODF и OAC и OEF и OBC. Следовательно, $|OD| = \alpha|OA|$, $|OE| = \alpha|OB|$. Но $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OF}$ по правилу параллелограмма. Но тогда $\overrightarrow{OF} = \alpha(\vec{a}+\vec{b})$ с одной стороны и $\overrightarrow{OF} = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$ с другой стороны, что и требовалось доказать. Случай $\alpha < 0$ рассматривается аналогично.

3) В случае $\alpha = 0$, $\vec{a} = 0$ или $\vec{b} = 0$, равенство, очевидно, выполняется.

4) Рассмотрим случай, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

Докажем вначале следующее утверждение:

Утверждение. Если $\vec{a}$ – произвольный вектор какой-либо прямой, то любой вектор на этой прямой $\vec{b}$ может быть записан в виде $\vec{b} = \alpha\vec{a}$.

Доказательство. Приложим векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ к общему началу O. Тогда эти векторы расположатся на одной прямой, на которой мы выберем начало отсчета, масштабный отрезок и положительное направление. Возможны 3 случая:

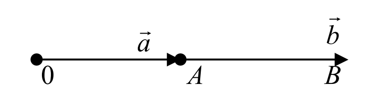

Рис. 1.15. К доказательству теоремы. Случай 2)

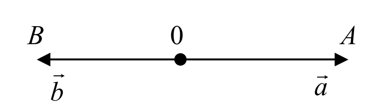

Рис. 1.16. К доказательству теоремы. Случай 3)

1) $\vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = 0$,
2) $\vec{a}$ и $\vec{b}$ направлены в одну сторону,
3) $\vec{a}$ и $\vec{b}$ направлены в разные стороны.
2) Пусть $\overrightarrow{OA} = \vec{a} \neq 0$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Тогда $|\overrightarrow{OB}| = \alpha |\overrightarrow{OA}|, \alpha > 0$. (1)

3) $|\overrightarrow{OB}| = -\alpha |\overrightarrow{OA}|, \alpha < 0$. (2)

Во всех трех случаях $\vec{b} = \alpha\vec{a}$. Действительно, выполняются три условия:

1) $|\vec{b}| = |\alpha|\,|\vec{a}|$;

2) $\vec{b}$ и $\alpha\vec{a}$ коллинеарны, так как $\vec{b}$ и $\vec{a}$ коллинеарны;

3) $\vec{b}$ и $\alpha\vec{a}$ при любом значении $\alpha (>0, =0, <0)$ направлены в одну сторону.

Используем теперь доказанное утверждение для продолжения доказательства свойства 8).

Обозначим $\vec{c} = \alpha\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$, $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$.

Тогда $\vec{c} = \alpha\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \alpha\left(\vec{a} + \gamma\vec{a}\right) = \langle \text{по свойству } 7 \rangle = \alpha\left((1+\gamma)\vec{a}\right) = = \alpha(1+\gamma)\vec{a}$.

Но $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b} = \alpha\vec{a} + \alpha\left(\gamma\vec{a}\right) = \langle \text{по свойству } 6 \rangle = \alpha\vec{a} + (\alpha\gamma)\vec{a} =$

$= \langle \text{по свойству } 7 \rangle = (\alpha + \alpha\gamma)\vec{a} = \alpha(1+\gamma)\vec{a}$, т.е. $\vec{c} = \vec{d}$, что и требовалось доказать.

Свойства 1÷8 для векторов, определенных так как это было сделано выше, в линейной алгебре служат аксиомами так называемого линейного, или векторного, пространства. Таким образом, геометрический вектор (направленный отрезок) является вектором линейного пространства. Векторами линейных пространств также являются вещественные точки пространств $R^1, R^2, R^3, \ldots, R^n$, числа, матрицы-столбцы, матрицы-строки и другие объекты.

То, что аксиомы линейного пространства выполняются как для вещественных чисел, так и для геометрических векторов, позволяет производить выкладки в векторной алгебре по тем же правилам, по которым производятся аналогичные выкладки в алгебре вещественных чисел.

Базис и координаты

1.4.1. Декартов прямоугольный базис и декартова система координат

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Базисом в пространстве будем называть три некомпланарных вектора, взятые в определенном порядке.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Базисом на плоскости будем называть два неколлинеарных вектора на этой плоскости, взятые в определенном порядке.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Базисом на прямой будем называть любой ненулевой вектор этой прямой.

Теорема. Каждый вектор, параллельный какой-либо прямой, может быть разложен по базису этой прямой.

То есть если $\vec{a}$ – произвольный вектор какой-либо прямой, то любой вектор на этой прямой $\vec{b}$ может быть записан в виде $\vec{b} = \alpha\vec{a}$.

Доказательство. Доказательство этого утверждения было приведено на стр. 8.

Следствие. Если два вектора $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ коллинеарны, то их координаты пропорциональны, т.е.

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

Теорема. Каждый вектор, параллельный какой-либо плоскости, может быть разложен по базису на этой плоскости.

То есть если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – произвольные неколлинеарные векторы на плоскости, то любой вектор на этой плоскости $\vec{c}$ может быть записан в виде $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$.

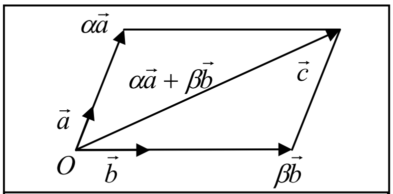

Рис. 1.17. К доказательству теоремы

Доказательство. См. доказательство предыдущей теоремы. Отложим вектор $\vec{c}$ от произвольной точки O плоскости. Пусть на этой плоскости задан базис из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Отложим их также от точки O. Построим прямые, параллельные векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, через конец вектора $\vec{c}$.

Рассмотрим полученный при этом параллелограмм. Его стороны равны $\alpha\vec{a}$ и $\beta\vec{b}$, а диагональ, совпадающая с вектором $\vec{c}$, равна по правилу параллелограмма $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$.

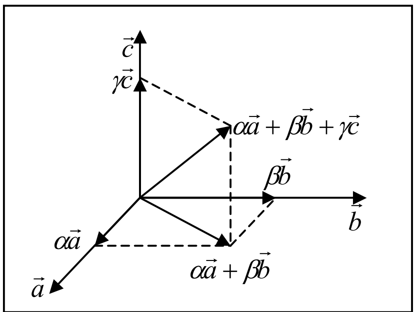

Рис. 1.18. К доказательству теоремы

Теорема. Каждый вектор пространства может быть разложен по базису в пространстве.

То есть если $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – три некомпланарных вектора в пространстве, то любой вектор $\vec{d}$ может быть записан в виде $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$.

Доказательство. См. предыдущую теорему. Геометрически вектор $\vec{d}$ представляет собой пространственную диагональ параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Замечание. Числа α, β, γ называются координатами вектора в соответствующем базисе.

1.4.2. Проекция вектора на ось

Под проекцией вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ на ось OL понимают число

$$\vec{a}_{OL} = np_{OL}\vec{a} = \pm\left|\overrightarrow{A'B'}\right|,$$

где A' - основание перпендикуляра, опущенного на прямую OL из точки A, а B' - основание перпендикуляра, опущенного на прямую OL из точки B, знак “+” берется, если направление вектора $\overrightarrow{A'B'}$ совпадает с направлением вектора

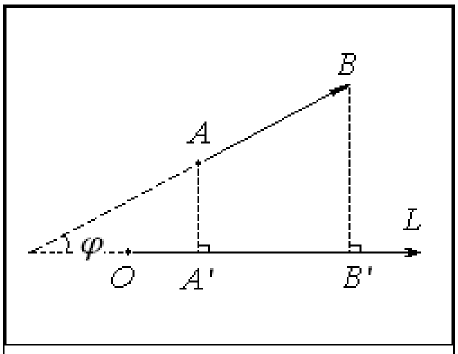

Рис. 1.6. Проекция вектора на ось

$\overrightarrow{OL}$, знак “-” берется, если направление вектора $\overrightarrow{A'B'}$ противоположно направлению вектора $\overrightarrow{OL}$, $\vec{a}_{OL} = 0$, если $A' = B'$.

Легко заметить, что $np_{OL}\vec{a} = \left|\vec{a}\right| \cdot \cos\varphi$, с учетом знака и величины $\cos\varphi$.

Докажем, что проекция на ось OL суммы векторов $\vec{a} + \vec{b}$ равна сумме проекций этих векторов на данную ось,

$$np_{OL}\vec{a} + \vec{b} = np_{OL}\vec{a} + np_{OL}\vec{b}.$$

Действительно, рассмотрим два возможных случая расположения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ относительно оси OL, (см. рисунки).

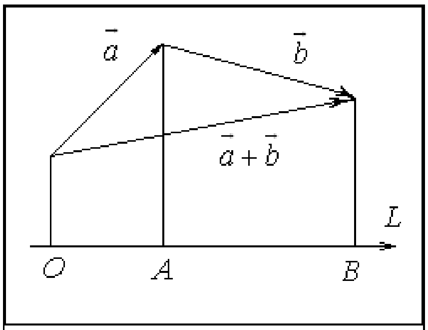

Рис. 1.7. Сумма проекций а)

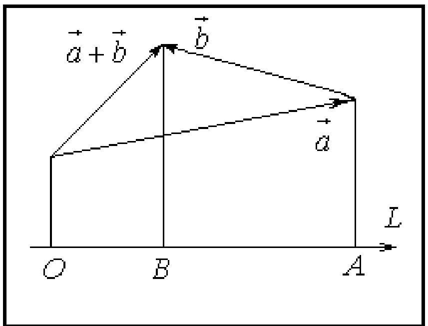

Рис. 1.8. Сумма проекций б)

а) $np_{OL}\vec{a} + \vec{b} = \left|OB\right| = \left|OA\right| + \left|AB\right| = np_{OL}\vec{a} + np_{OL}\vec{b}$,

б) $np_{OL}\vec{a} + \vec{b} = \left|OB\right| = \left|OA\right| - \left|AB\right| = np_{OL}\vec{a} - \left(-np_{OL}\vec{b}\right) = np_{OL}\vec{a} + np_{OL}\vec{b},$

что и требовалось доказать.

Теорема. Разложение вектора по базису единственно.

Доказательство. Предположим, что существуют два разложения вектора $\vec{d}$ по базису $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

$\vec{d} = \alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b} + \gamma_1\vec{c}$; (1)

$\vec{d} = \alpha_2\vec{a} + \beta_2\vec{b} + \gamma_2\vec{c}$. (2)

Вычтем из равенства (1) равенство (2):

$\vec{0} = (\alpha_1 - \alpha_2)\vec{a} + (\beta_1 - \beta_2)\vec{b} + (\gamma_1 - \gamma_2)\vec{c}$.

Так как $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ - базис, ни один из векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ не может быть выражен через другие при ненулевых коэффициентах, $\Rightarrow$ $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2, \gamma_1 = \gamma_2$.

Теорема. При сложении двух векторов $\vec{d}_1$ и $\vec{d}_2$ их координаты (относительно любого базиса) складываются. При умножении вектора $\vec{d}_1$ на любое число α все его координаты умножаются на это число.

Доказательство. Пусть $\vec{d}_1 = \alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b} + \gamma_1\vec{c}$, $\vec{d}_2 = \alpha_2\vec{a} + \beta_2\vec{b} + \gamma_2\vec{c}$. Тогда в силу свойств 1-7 линейных операций над векторами

$\vec{d}_1 + \vec{d}_2 = (\alpha_1 + \alpha_2)\vec{a} + (\beta_1 + \beta_2)\vec{b} + (\gamma_1 + \gamma_2)\vec{c}$,

$\lambda\vec{d}_1 = (\lambda\alpha_1)\vec{a} + (\lambda\beta_1)\vec{b} + (\lambda\gamma_1)\vec{c}$.

В силу единственности разложения вектора по базису теорема доказана.

1.4.3. Декартова прямоугольная система координат

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Декартовым прямоугольным базисом называется базис из трех взаимно перпендикулярных векторов единичной длины.

Эти векторы принято обозначать значками $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

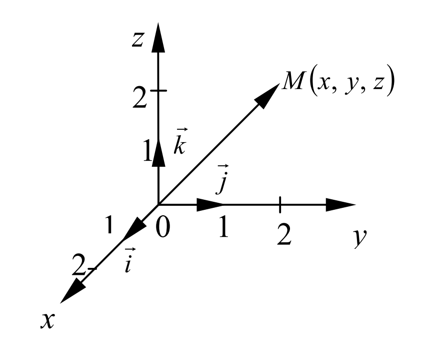

Рис. 1.19. Декартова прямоугольная система координат

Зафиксируем точку O – начало координат и отложим от нее базисные векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Ось Ox направим по вектору $\vec{i}$, ось Oy – по вектору $\vec{j}$, ось Oz – по вектору $\vec{k}$. Полученная таким образом система координат называется **декартовой прямоугольной системой координат**.

Если вектор $\vec{d}$ имеет координаты d_x, d_y, d_z , то будем записывать $\vec{d} = (d_x, d_y, d_z)$.

Пусть $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$, точки A и B (начало и конец вектора) имеют координаты $A(a_x, a_y, a_z)$, $B(b_x, b_y, b_z)$. Тогда $d_x = b_x - a_x$, $d_y = b_y - a_y$, $d_z = b_z - a_z$.

Декартовы прямоугольные координаты d_x, d_y, d_z вектора $\vec{d}$ равны проекциям этого вектора на оси Ox, Oy , Oz соответственно; другими словами, $d_x = |\vec{d}| \cos\alpha$, $d_y = |\vec{d}| \cos\beta$, $d_z = |\vec{d}| \cos\gamma$.

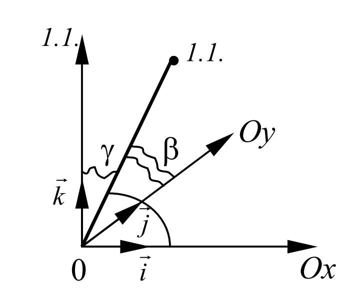

Рис. 1.20. Углы *α, β, γ*

Здесь α, β, γ – углы, которые составляет вектор $\vec{d}$ с координатными осями Ox , Oy , Oz соответственно, при этом $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются **направляющими косинусами** вектора $\vec{d}$.

Вектор $\vec{e}_d = (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$ представляет собой вектор единичной длины данного направления, или **орт** данного направления.

Для направляющих косинусов справедливо соотношение

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 .$$

Вектор $\overrightarrow{OM}$, идущий из начала координат в точку M , называется **радиус-вектором** точки M . Координаты радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ и координаты точки M совпадают.

Скалярное произведение векторов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будем обозначать $(\vec{a}, \vec{b})$ или $(\vec{a} \cdot \vec{b})$, или $\vec{a} \cdot \vec{b}$. Тогда $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$, где $\varphi = (\vec{a}, \widehat{\ }\ \vec{b})$.

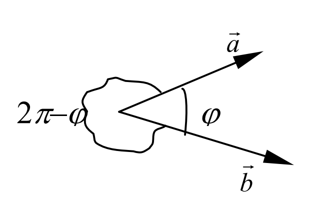

Рис. 1.21. Угол φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$

Замечание. Углом между векторами договоримся считать тот, который не превосходит π (рис. 1.21).

1.4.4. Алгебраические свойства скалярного произведения векторов

1. $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$ (переместительное свойство);

2. $\left((\alpha\vec{a}),\vec{b}\right)=\alpha\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ (сочетательное относительно числового сомножителя свойство);
3. $\left((\vec{a}+\vec{b}),\vec{c}\right)=(\vec{a},\vec{c})+\left(\vec{b},\vec{c}\right)$ (распределительное относительно суммы векторов свойство);
4. $(\vec{a},\vec{a})>0$, если $\vec{a}$ – ненулевой вектор, и $(\vec{a},\vec{a})=0$, если $\vec{a}$ – нулевой вектор.

Доказательство свойства 1.

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right),\ \left(\vec{b},\vec{a}\right)=|\vec{b}||\vec{a}|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right).$$

Доказательство свойства 2.

$$\left(\alpha\vec{a},\vec{b}\right)=|\alpha\vec{a}||\vec{b}|\cos\left(\widehat{\alpha\vec{a},\vec{b}}\right)=|\alpha||\vec{a}||\vec{b}|\cos\left(\widehat{\alpha\vec{a},\vec{b}}\right).$$

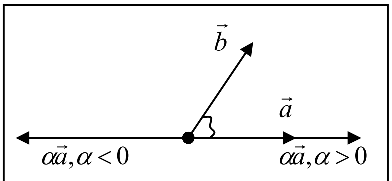

Рис. 1.22. К доказательству свойства 2) скалярного произведения

$$(\widehat{\alpha\vec{a},\vec{b}})=\begin{cases}(\widehat{\vec{a},\vec{b}}),\alpha>0,\\ \pi-(\widehat{\vec{a},\vec{b}}),\alpha<0,\end{cases}\Rightarrow$$

$$\cos(\alpha\vec{a},\vec{b})=\begin{cases}\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right),\ \alpha>0,\\ -\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right),\ \alpha<0,\end{cases}\Rightarrow$$

$\left(\alpha\vec{a},\vec{b}\right)=\alpha|\vec{a}||\vec{b}|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\alpha\left(\vec{a},\vec{b}\right)$, что и требовалось доказать.

Доказательство свойства 3 проведем немного позже, после следующей теоремы.

Доказательство свойства 4.

$$\left(\vec{a},\vec{a}\right)=|\vec{a}|\,|\vec{a}|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{a}}\right)=\vec{a}^2\cos 0^{\circ}=|\vec{a}|^2\begin{cases}>0, & \text{если } \vec{a}\neq\vec{0},\\ =0, & \text{если } \vec{a}=\vec{0}.\end{cases}$$

1.4.5. Выражение скалярного произведения векторов в декартовых координатах

Теорема. Если два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определены своими декартовыми прямоугольными координатами $\vec{a}=\left(a_x,a_y,a_z\right)$, $\vec{b}=\left(b_x,b_y,b_z\right)$, то скалярное произведение этих векторов равно сумме попарных произведений их соответствующих координат, то есть

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

Доказательство. $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k},\ b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right)=a_xb_x(\vec{i},\vec{i})+$
$+a_xb_y(\vec{i},\vec{j})+a_xb_z(\vec{i},\vec{k})+a_yb_x(\vec{j},\vec{i})+a_yb_y(\vec{j},\vec{j})+a_yb_z(\vec{j},\vec{k})+a_zb_x(\vec{k},\vec{i})+a_zb_y(\vec{k},\vec{j})+a_zb_z(\vec{k},\vec{k}).$

Но $(\vec{i},\vec{i})=|\vec{i}|^2\cos(\widehat{\vec{i},\vec{i}})=|\vec{i}|^2=1$, аналогично $(\vec{j},\vec{j})=1$, $(\vec{k},\vec{k})=1$;
$(\vec{i},\vec{j})=(\vec{i},\vec{k})=(\vec{j},\vec{i})=(\vec{j},\vec{k})=(\vec{k},\vec{i})=(\vec{k},\vec{j})=1\cdot1\cdot\cos 90^{\circ}=0;\Rightarrow\ (\vec{a},\vec{b})=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$

Докажем теперь свойство 3 скалярного произведения векторов.

Доказательство свойства 3 скалярного произведения векторов.

$$(\vec{a}+\vec{b},\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})_x\vec{c}_x+(\vec{a}+\vec{b})_y\vec{c}_y+(\vec{a}+\vec{b})_zc_z \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned}(\vec a,\vec c) &= a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z\\ (\vec b,\vec c) &= b_x c_x + b_y c_y + b_z c_z\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Так как при сложении векторов их проекции на любую ось складываются, $(\vec a+\vec b)_x = a_x + b_x$, $(\vec a+\vec b)_y = a_y + b_y$, $(\vec a+\vec b)_z = a_z + b_z \Rightarrow (\vec a+\vec b,\vec c) = (\vec a,\vec c)+(\vec b,\vec c)$.

1.4.6. Геометрические приложения скалярного произведения векторов

1. $|\vec a| = \sqrt{(\vec a,\vec a)} =$ <в декартовой системе координат>

$= \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

2. $\cos\left(\vec a \,\hat{,}\, \vec b\right) = \dfrac{(\vec a,\vec b)}{|\vec a|\cdot|\vec b|} =$

<в декартовой системе координат>=

$$= \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

3. Проекция $пр_{\vec b}\vec a$ вектора $\vec a$ на вектор $\vec b$

$$пр_{\vec b}\vec a = \frac{(\vec a,\vec b)}{|\vec b|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

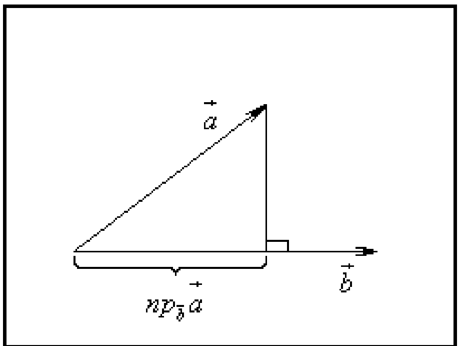

Рис. 1.23. Проекция вектора $\vec a$ на вектор $\vec b$

4. Необходимым и достаточным условием ортогональности (перпендикулярности) двух векторов является равенство нулю их скалярного произведения.

Доказательство свойства 1.

Так как $(\vec a,\vec a) = |\vec a||\vec a|\cos 0^\circ = |\vec a|^2, \Rightarrow |\vec a| = \sqrt{(\vec a,\vec a)}$. В декартовой системе координат

$$|\vec a| = \sqrt{(\vec a,\vec a)} = \sqrt{a_x a_x + a_y a_y + a_z a_z} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Доказательство свойства 2.

$(\vec a,\vec b) = |\vec a||\vec b|\cos(\vec a \,\hat{,}\, \vec b), \Rightarrow \cos(\vec a \,\hat{,}\, \vec b) = \dfrac{(\vec a,\vec b)}{|\vec a||\vec b|}$. В декартовой системе координат

$(\vec a,\vec b) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$, $|\vec a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$, $|\vec b| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}$,

$$\Rightarrow \cos\left(\vec a \,\hat{,}\, \vec b\right) = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Доказательство свойства 3.

$пр_{\vec b}\vec a = |\vec a|\cos(\vec a,\vec b) = |\vec a|\dfrac{(\vec a,\vec b)}{|\vec a||\vec b|} = \dfrac{(\vec a,\vec b)}{|\vec b|}$. В декартовой системе координат

$(\vec a,\vec b) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$, $|\vec b| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}$, $\Rightarrow пр_{\vec b}\vec a = \dfrac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$.

Доказательство свойства 4.

Необходимость. Пусть векторы $\vec a$ и $\vec b$ ортогональны. Тогда угол $(\vec a \,\hat{,}\, \vec b) = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \cos(\vec a \,\hat{,}\, \vec b) = 0, \Rightarrow (\vec a,\vec b) = 0$.

Достаточность. Пусть $(\vec a,\vec b)=0 \Rightarrow |\vec a||\vec b|\cos(\vec a\,\hat{}\,\vec b)=0$, это означает, что либо $\cos(\vec a\,\hat{}\,\vec b)=0 \Rightarrow (\vec a\,\hat{}\,\vec b)=\dfrac{\pi}{2}$; либо $\vec a=0$, либо $\vec b=0 \Rightarrow (\vec a\,\hat{}\,\vec b)$ - любой, можно считать, $(\vec a\,\hat{}\,\vec b)=\dfrac{\pi}{2}$.

Векторное произведение векторов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Три вектора называются **упорядоченной тройкой** (или просто тройкой), если указано, какой из этих векторов является первым, какой – второй и какой – третьим.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Тройка некомпланарных векторов $\vec a\,\vec b\,\vec c$ называется **правой** (левой), если выполнено одно из следующих условий:

1) если после приведения к общему началу вектор $\vec c$ располагается по ту сторону от плоскости, определяемой векторами $\vec a$ и $\vec b$, откуда кратчайший поворот от $\vec a$ к $\vec b$ кажется совершающимся против часовой стрелки;

2) если после приведения к общему началу эти векторы располагаются так, как могут быть расположены большой, выпрямленный указательный и согнутый средний пальцы правой (левой) руки.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Система координат называется **правой**, если ее базисные векторы образуют правую тройку.

В дальнейшем мы будем рассматривать только правые системы координат.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. **Векторным произведением** вектора $\vec a$ на вектор $\vec b$ называется вектор $\vec c$, обозначаемый символом $\vec c=\left[\vec a,\,\vec b\right]$ и удовлетворяющий следующим трем требованиям:

1) длина вектора $\vec c$ равна произведению длин векторов $\vec a$ и $\vec b$ на синус угла между ними, т.е. $|\,\vec c\,|=\left|\,\left[\vec a,\,\vec b\right]\,\right|=|\,\vec a\,|\cdot|\,\vec b\,|\cdot\sin\varphi$;
2) вектор $\vec c$ ортогонален к каждому из векторов $\vec a$ и $\vec b$;
3) вектор $\vec c$ направлен так, что тройка $\vec a\,\vec b\,\vec c$ является правой.

1.4.7. Алгебраические свойства векторного произведения векторов

1. $\left[\vec a,\vec b\right]=-\left[\vec b,\vec a\right]$ (антиперестановочность сомножителей);
2. $\left[\alpha\vec a,\,\vec b\right]=\alpha\left[\vec a,\,\vec b\right]$ (сочетательное относительно числового сомножителя свойство);
3. $\left[\vec a+\vec b,\,\vec c\right]=\left[\vec a,\,\vec c\right]+\left[\vec b,\,\vec c\right]$ (распределительное относительно суммы векторов свойство);
4. $[\vec a,\vec a]=\vec 0$ для любого вектора $\vec a$.

Доказательство свойства 1.

Пусть $\vec c=[\vec a,\vec b]$, $\vec d=[\vec b,\vec a]$.

а) Если $\vec a$ и $\vec b$ коллинеарны, то $|\vec c|=|\vec d|=0$.

б) Если $\vec a$ и $\vec b$ неколлинеарны, то

1) $|\vec c|=|\vec d|=|\vec a||\vec b|\cos(\mathrm{\vec a}\,\hat{}\,\mathrm{\vec b})$.

2) $\vec{c}$ коллинеарен $\vec{d}$, так как оба перпендикулярны плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, значит, либо $\vec{c} = \vec{d}$, либо $\vec{c} = -\vec{d}$.

3) Но если $\vec{c} = \vec{d}$, то тройки векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и $\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}$ обе правые, что невозможно, $\Rightarrow \vec{c} = -\vec{d}$.

Доказательство свойства 2.

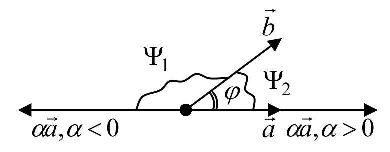

Рис. 1.24. К доказательству свойства 2)

Пусть $\vec{c} = [\alpha\vec{a}, \vec{b}]$, $\vec{d} = \alpha[\vec{a}, \vec{b}]$.

а) Если $\alpha = 0$ или $\vec{a}$ коллинеарен $\vec{b}$, то $|\vec{c}| = |\vec{d}| = 0 \Rightarrow \vec{c} = \vec{d} = \vec{0}$.

б) Если $\alpha \neq 0$ и $\vec{a}$ неколлинеарен $\vec{b}$, $|\vec{c}| = |\alpha| |\vec{a}| |\vec{b}| \sin\Psi$, $\Psi = (\alpha\vec{a} \,\hat{,}\, \vec{b})$, $|\vec{d}| = |\alpha| |\vec{a}| |\vec{b}| \sin\varphi$, $\varphi = (\vec{a} \,\hat{,}\, \vec{b})$.

1) Если $\alpha > 0$, то $\Psi = \Psi_2$ (см. рис) $= \varphi \Rightarrow |\vec{c}| = |\vec{d}|$; Если $\alpha < 0$, то $\Psi = \Psi_1 = \pi - \varphi \Rightarrow \sin\Psi = \sin\varphi \Rightarrow |\vec{c}| = |\vec{d}|$.

2) Так как плоскость векторов $\alpha\vec{a}$ и $\vec{b}$ совпадает с плоскостью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ (перпендикулярные этой плоскости) коллинеарны, $\Rightarrow$ либо $\vec{c} = \vec{d}$, либо $\vec{c} = -\vec{d}$.

3) Если $\alpha > 0$ $(\alpha < 0)$, то $[\vec{a}, \vec{b}]$ и $[\alpha\vec{a}, \vec{b}]$ одинаково направлены (противоположно направлены) $\Rightarrow$ $\vec{c}$ и $\vec{d}$ всегда одинаково направлены.

Доказательство свойства 3 проведем после изучения свойств смешанного произведения векторов.

Доказательство свойства 4.

$|[\vec{a}, \vec{a}]| = |\vec{a}| |\vec{a}| \sin 0 = 0 \Rightarrow [\vec{a}, \vec{a}] = \vec{0}$ для любого вектора $\vec{a}$.

1.4.8. Выражение векторного произведения векторов в декартовых координатах

Теорема. Если два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими декартовыми прямоугольными координатами $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, то векторное произведение этих векторов имеет вид:

$$\left[\vec{a},\ \vec{b}\right] = \left(a_y b_z - a_z b_y,\ a_z b_x - a_x b_z,\ a_x b_y - a_y b_x\right)$$

или в более удобном для запоминания виде

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Доказательство.

$[\vec{a},\vec{b}] = [a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}] = a_x b_x[\vec{i},\vec{i}] + a_x b_y[\vec{i},\vec{j}] + a_x b_z[\vec{i},\vec{k}] +$
$+ a_y b_x[\vec{j},\vec{i}] + a_y b_y[\vec{j},\vec{j}] + a_y b_z[\vec{j},\vec{k}] + a_z b_x[\vec{k},\vec{i}] + a_z b_y[\vec{k},\vec{j}] + a_z b_z[\vec{k},\vec{k}]$, но так как $|[\vec{i},\vec{i}]| = |[\vec{j},\vec{j}]| = |[\vec{k},\vec{k}]| = 1 \cdot 1 \cdot \sin 0^\circ = 0$, $\Rightarrow [\vec{i},\vec{i}] = [\vec{j},\vec{j}] = [\vec{k},\vec{k}] = 0$.

$[\vec{i},\vec{j}] = -[\vec{j},\vec{i}] = \vec{k}$, $\quad [\vec{j},\vec{k}] = -[\vec{k},\vec{j}] = \vec{i}$, $\quad [\vec{k},\vec{i}] = -[\vec{i},\vec{k}] = \vec{j}$;

$[\vec{a},\vec{b}] = \vec{i}(a_y b_z - a_z b_y) + \vec{j}(a_z b_x - a_x b_z) + \vec{k}(a_x b_y - a_y b_x)$, что и требовалось доказать.

1.4.9. Геометрические свойства векторного произведения векторов

Теорема. Модуль вектора $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ равен площади $S_{\text{пар}}$ параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Теорема. Необходимым и достаточным условием коллинеарности двух векторов является равенство нулю их векторного произведения.

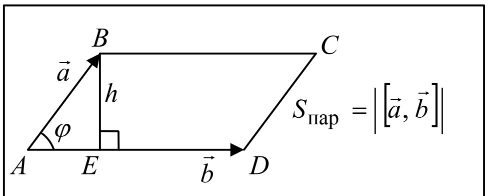

Рис. 1.25. Параллелограмм, построенный на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$

Доказательство первой теоремы. (см. рис. 1.25)

Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, равна $S_{пар} = |\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{BE}| = |\vec{b}| \cdot h = |\vec{b}||\vec{a}|\sin(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})$.

Доказательство второй теоремы.

<u>Необходимость.</u> Пусть $\vec{a}$ коллинеарен $\vec{b}$. Тогда $|[\vec{a},\vec{b}]| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \underbrace{\sin(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})}_{0} = 0 \Rightarrow [\vec{a},\vec{b}] = \vec{0}$.

<u>Достаточность.</u> Пусть $[\vec{a},\vec{b}] = \vec{0} \Rightarrow |[\vec{a},\vec{b}]| = 0 \Rightarrow |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}) = 0$. Тогда

$$\begin{cases} \text{либо } \sin(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}) = 0, & (а) \\ \text{либо } \vec{a} = \vec{0}, & (б) \\ \text{либо } \vec{b} = \vec{0}. & (в) \end{cases}$$

(а) $\Rightarrow \sin(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}) = 0 \Rightarrow (\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}) = 0 \Rightarrow$ $\vec{a}$ коллинеарен $\vec{b}$;

(б),(в) $\Rightarrow$ $\vec{a}$ коллинеарен $\vec{b}$.

Смешанное произведение векторов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Число $\left(\left[\vec{a},\,\vec{b}\,\right],\,\vec{c}\right)$ называется **смешанным произведением** векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Теорема. Смешанное произведение $\left(\left[\vec{a},\,\vec{b}\,\right],\,\vec{c}\right)$ равно объему параллелепипеда, построенного на приведенных к общему началу векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, взятому со знаком плюс, если тройка $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ правая, и со знаком минус, если тройка $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ левая. Если же векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны, то $\left(\left[\vec{a},\,\vec{b}\,\right],\,\vec{c}\right)$ равно нулю.

Следствие 1. $\left(\left[\vec{a},\,\vec{b}\,\right],\,\vec{c}\right)=\left(\vec{a},\,\left[\vec{b},\,\vec{c}\,\right]\right)$.

Следствие 2. Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов является равенство нулю их смешанного произведения.

Следствие 3. Смешанное произведение трех векторов, два из которых совпадают, равно нулю.

Доказательство.

а) Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны и $[\vec{a},\vec{b}]=\vec{0}\Rightarrow\left([\vec{a},\vec{b}],\vec{c}\right)=0$.

б) Пусть векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ неколлинеарны. Построим параллепипед на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Обозначим через S площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, а через ё - единичный вектор направления $[\vec{a},\vec{b}]$. Тогда $[\vec{a},\vec{b}]=S\,\text{ё}$, $\Rightarrow$ $\left([\vec{a},\vec{b}],\vec{c}\right)=S(\text{ё},\vec{c})=S\,\text{пр}_{\text{ё}}\,\vec{c}$, но $\text{пр}_{\text{ё}}\,\vec{c}$ с точностью до знака равна h - высоте параллелепипеда, опущенной из конца вектора $\vec{c}$ на плоскость, определенную векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Очевидно, $\text{пр}_{\text{ё}}\,\vec{c}=h$, если ё и $\vec{c}$ лежат по одну сторону “плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$“ и $\text{пр}_{\text{ё}}\,\vec{c}=-h$, если ё и $\vec{c}$ лежат по разные стороны “плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$“. Таким образом, $\left([\vec{a},\vec{b}],\vec{c}\right)>0$ при правой ориентации тройки векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\left([\vec{a},\vec{b}],\vec{c}\right)<0$ при левой ориентации тройки векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

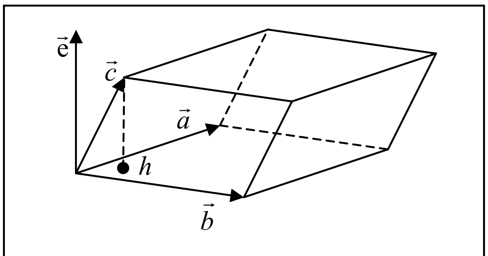

Рис. 1.26. К доказательству теоремы

Если же векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны, то вектор $\vec{c}$ лежит в плоскости, определенной векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\Rightarrow$ $\text{пр}_{\text{ё}}\,\vec{c}=0\Rightarrow\left([\vec{a},\vec{b}],\vec{c}\right)=0$.

Доказательство следствия 1.

Действительно, с точностью до знака это равенство очевидно, ибо как правая, так и левая его части с точностью до знака равны объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Но знаки правой и левой частей этого равенства совпадают, так как тройки $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ и $\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}$ имеют одинаковую ориентацию.

Доказанное равенство позволяет записать:

$\left([\vec{a},\vec{b}],\vec{c}\right)=\left([\vec{b},\vec{c}],\vec{a}\right)=\left([\vec{c},\vec{a}],\vec{b}\right)$.

Это так называемая циклическая перестановка векторов в смешанном произведении. Это означает, что можно записывать смешанное произведение просто в виде $\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}$, не указывая, какие именно векторы умножаются векторно.

Доказательство следствия 2.

Необходимость следует из доказанной выше теоремы.

Достаточность. Пусть $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0$. Предположим, что векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ некомпланарны. Но тогда на них можно построить параллелепипед с объемом $V\neq 0$. Но $0\neq V=|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$, что противоречит условию $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0$, $\Rightarrow$ векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ могут быть только компланарны.

Доказательство следствия 3.

Пусть совпадают два вектора $\vec{a},\vec{a},\vec{b}$. Тогда $\vec{a}\vec{a}\vec{b}=\left([\vec{a},\vec{a}],\vec{b}\right)=\left(\vec{0},\vec{b}\right)=0$.

Докажем теперь свойство 3 из алгебраических свойств векторного произведения:

3 $[\vec{a}+\vec{b},\vec{c}]=[\vec{a},\vec{c}]+[\vec{b},\vec{c}]$.

Доказательство. Умножим скалярно левую часть этого равенства на орт $\vec{i}$.

$\left([\vec{a}+\vec{b},\vec{c}],\vec{i}\right)=\left(\vec{a}+\vec{b},[\vec{c},\vec{i}]\right)=\left(\vec{a},[\vec{c},\vec{i}]\right)+\left(\vec{b},[\vec{c},\vec{i}]\right)=\left([\vec{a},\vec{c}],\vec{i}\right)+\left([\vec{b},\vec{c}],\vec{i}\right)=\ =\left([\vec{a},\vec{c}]+[\vec{b},\vec{c}],\vec{i}\right)$ - это правая часть равенства, умноженная на орт $\vec{i}$. Таким образом, мы показали, что проекции векторов в левой и правой частях равенства на ось Ох равны. Аналогично показываются равенства для проекций на оси Оу и Oz, $\Rightarrow$ исходное равенство справедливо.

1.4.10. Выражение смешанного произведения в декартовых координатах

Теорема. Если три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ заданы своими декартовыми прямоугольными координатами $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$, $\vec{c}=(c_x,c_y,c_z)$, то смешанное произведение $\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}$ равняется определителю, строки которого соответственно равны координатам перемножаемых векторов, т.е.

$$\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Доказательство. Вычислим $\left([\vec{a},\vec{b}],\vec{c}\right)$.

$$[\vec{a},\vec{b}]=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}=\vec{i}\left(a_yb_z-a_zb_y\right)+\ +\vec{j}\left(a_zb_x-a_xb_z\right)+\vec{k}\left(a_xb_y-a_yb_x\right);$$

$$\left([\vec{a},\vec{b}],\vec{c}\right)=c_x\left(a_yb_z-a_zb_y\right)+c_y\left(a_zb_x-a_xb_z\right)+c_z\left(a_xb_y-a_yb_z\right)=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

(последнее равенство очевидно, если разложить определитель по элементам третьей строки).

Преобразование координат вектора при преобразовании базиса

Пусть $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$ или, в матричной форме

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}.$$

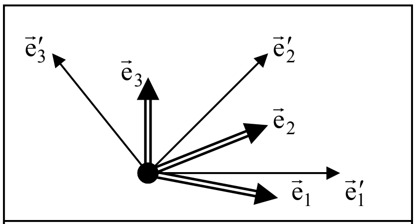

Рис. 1.27. Базисы $B(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ и $B'(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$

Возьмем новый базис $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$

$$\begin{cases}\vec{e}'_1 = \vec{e}_1 a_{11} + \vec{e}_2 a_{21} + \vec{e}_3 a_{31},\\ \vec{e}'_2 = \vec{e}_1 a_{12} + \vec{e}_2 a_{22} + \vec{e}_3 a_{32},\\ \vec{e}'_3 = \vec{e}_1 a_{13} + \vec{e}_2 a_{23} + \vec{e}_3 a_{33},\end{cases} \qquad 1$$

или, в матричной форме,

$$\begin{pmatrix}\vec{e}'_1 & \vec{e}'_2 & \vec{e}'_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}. \qquad 2$$

Обозначим $A = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$. 1 2

Тогда

$$\vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\end{pmatrix} A}\ \underbrace{A^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}\vec{e}'_1 & \vec{e}'_2 & \vec{e}'_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'_1\\ x'_2\\ x'_3\end{pmatrix}.$$

При преобразовании базисных векторов по формулам или координаты вектора x в новом базисе B' x'_1, x'_2, x'_3 будут выражаться через координаты этого вектора x_1, x_2, x_3 в старом базисе B по формулам

$$\boxed{\begin{pmatrix}x'_1\\ x'_2\\ x'_3\end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}},$$

где A^{-1} - матрица, обратная матрице A, или

$$\boxed{X' = A^{-1}X}.$$

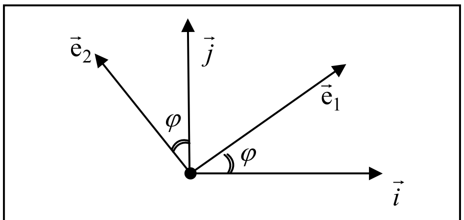

Рис. 1.28. Поворот базисных векторов вокруг начала O на угол

<u>Пример.</u> Выведем матрицу преобразования координат для поворота базисных векторов на угол φ вокруг начала координат.

$$\begin{cases}\vec{e}_1 = \cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j},\\ \vec{e}_2 = \cos(90^\circ + \varphi)\vec{i} + \sin(90^\circ + \varphi)\vec{j} =\end{cases} \quad A = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}.$$
$$= -\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j}, \Rightarrow$$

Задачи с решениями
Векторы, базисы, координаты

Задача 1. Задан тетраэдр $OABC$. В базисе из ребер $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ найти координаты вектора $\overrightarrow{OF}$, где F – точка пересечения медиан основания ABC.

Решение. Воспользуемся правилом треугольника: $\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AK}$. Здесь K – середина ребра CB; точка F находится на расстоянии $\frac{2}{3}$ длины медианы, считая от вершины A.

Но $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BK}=\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}\right)+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=$

$=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}\right)$.

Подставим $\overrightarrow{AK}$ в $\overrightarrow{OF}$:

$$\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}\right)+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}\right)=\overrightarrow{OA}-\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right).$$

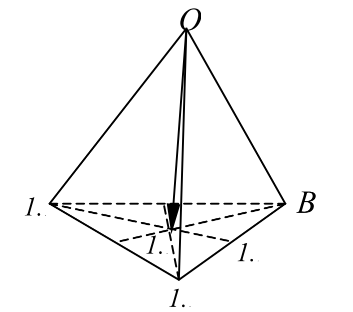

Рис. 2.1. (К задаче 1)

Ответ: $\overrightarrow{OF}=\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$.

Задача 2. В пространстве заданы треугольники ABC и $A'B'C'$; M и M' – точки пересечения медиан этих треугольников соответственно. Разложить вектор $\overrightarrow{MM'}$ по векторам $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$.

Решение. Пусть N – середина стороны BC, N' – середина стороны $B'C'$.

$\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'M'}$.

Найдем $\left[\begin{array}{l}\overrightarrow{MA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{NA};\\ \overrightarrow{NA}=\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{BA};\\ \overrightarrow{NB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}.\end{array}\right.$

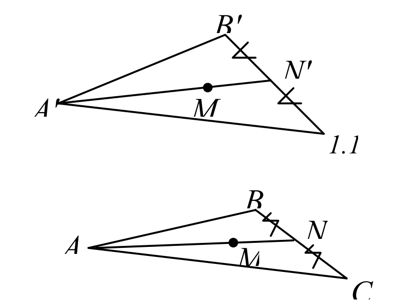

Рис. 2.2 (К задаче 2)

$\left[\begin{array}{l}\overrightarrow{M'A'}=-\overrightarrow{A'M'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{N'A'};\\ \overrightarrow{N'A'}=\overrightarrow{N'B'}+\overrightarrow{B'A'};\\ \overrightarrow{N'B'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{C'B'}.\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\overrightarrow{C'B'}=\overrightarrow{C'C}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BB'};\\ \overrightarrow{B'A'}=\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AA'}.\end{array}\right.$

После последовательных подстановок

$$\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'M'}=$$

$$=\frac{2}{3}\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{AA'}+\left(-\frac{2}{3}\overrightarrow{N'A'}\right)=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{BA}\right)+\overrightarrow{AA'}-\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{N'B'}+\overrightarrow{B'A'}\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}\right)+\overrightarrow{AA'}-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{C'B'}+\overrightarrow{B'A'}\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AA'}-\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{C'C}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BB'}\right)-\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AA'}\right)==\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}\right).$$

Ответ: $\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}\right)$.

Задача 3. В треугольнике ABC разложить биссектрису $\overrightarrow{CC'}$ по базису векторов $\vec{a}=\overrightarrow{CB}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{CA}$.

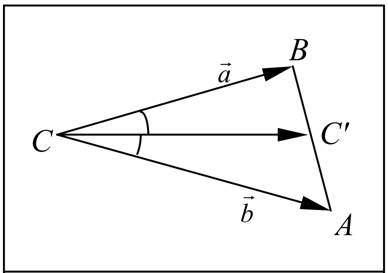

Рис. 2.3. (К задаче 3)

Решение. Пусть $\vec{a}=\overrightarrow{CB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{CA}$, C' – лежит на стороне AB.

$\overrightarrow{CC'}=\vec{a}+\alpha\left(\vec{b}-\vec{a}\right)$, где $\alpha=\dfrac{\left|\overrightarrow{BC'}\right|}{\left|\overrightarrow{BA}\right|}$.

Воспользуемся тем, что для биссектрисы $\dfrac{\left|\overrightarrow{CB}\right|}{\left|\overrightarrow{BC'}\right|}=\dfrac{\left|\overrightarrow{CA}\right|}{\left|\overrightarrow{C'A}\right|}$ и $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC'}+\overrightarrow{C'A}$. Отсюда

следует, что $\alpha=\dfrac{\left|\overrightarrow{BC'}\right|}{\left|\overrightarrow{BC'}\right|+\left|\overrightarrow{C'A}\right|}=\dfrac{1}{1+\dfrac{\left|\overrightarrow{C'A}\right|}{\left|\overrightarrow{BC'}\right|}}==\dfrac{1}{1+\dfrac{\left|\overrightarrow{CA}\right|}{\left|\overrightarrow{CB}\right|}}=\dfrac{\left|\vec{a}\right|}{\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|}$.

(Здесь мы воспользовались тем, что ABC – невырожденный треугольник)

Итак, $\overrightarrow{CC'}=(1-\alpha)\vec{a}+\alpha\vec{b}=\left(\dfrac{\left|\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|},\dfrac{\left|\vec{a}\right|}{\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|}\right)$.

Ответ: $\overrightarrow{CC'}=\left(\dfrac{\left|\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|},\dfrac{\left|\vec{a}\right|}{\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|}\right)$.

Задача 4. Доказать, что точка пересечения медиан треугольника делит каждую медиану в отношении $2:1$, считая от вершины.

Решение. Пусть A' – середина стороны BC, B' – середина стороны AC. Отложим на медиане BB' $\frac{2}{3}$ от вершины и поставим точку O. Тогда

$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}=$

$=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB'}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB'}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

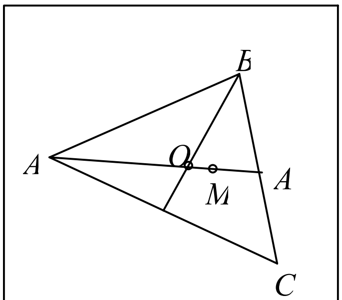

Рис. 2.4 (К задаче 4)

Отложим $\frac{2}{3}$ по AA' и поставим точку M. Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AM}$ в базисе векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)=$

$=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=$.

$=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$

Но это координаты вектора $\overrightarrow{AO}$. Таким образом, точка O и точка M совпадают, это - точка пересечения медиан и она делит медианы AA' и BB' в отношении $2:1$, считая от вершины.

Задача 5. Точки E и F – середины сторон AD и BC четырехугольника $ABCD$. Доказать, что $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right)$. Вывести теорему о средней линии трапеции.

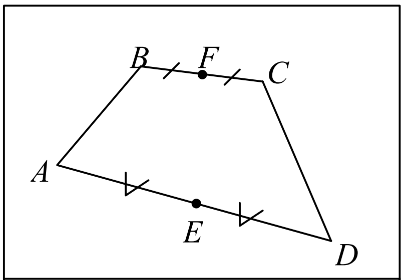

Рис. 2.5. (К задаче 5)

Решение. $\left[\begin{array}{l}\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF},\\ \overrightarrow{EF}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF},\\ \overrightarrow{BF}=-\overrightarrow{CF},\\ \overrightarrow{EA}=-\overrightarrow{ED},\end{array}\right. \Rightarrow \Rightarrow \overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right).$

Если стороны AB и CD параллельные, то $\left|\overrightarrow{EF}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right|=\frac{1}{2}\left(\left|\overrightarrow{AB}\right|+\left|\overrightarrow{DC}\right|\right)$, что и требовалось доказать.

Переход к новому базису, преобразование координат

Задача 6. В пространстве R^3 векторы $\vec{x}$, $\vec{e}_1',\vec{e}_2',\vec{e}_3'$ заданы своими координатами в базисе $B=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$. Доказать, что система $B'=(\vec{e}_1',\vec{e}_2',\vec{e}_3')$ - базис в пространстве R^3 и найти координаты вектора $\vec{x}$ в этом базисе, если $\vec{x}=(-1,1,2)$, $\vec{e}_1'=(-1,1,0)$, $\vec{e}_2'=(0,1,1)$, $\vec{e}_3'=(-1,0,1)$.

Решение. Проверим, что B' - базис в пространстве R^3:

$\vec{e}_1'\vec{e}_2'\vec{e}_3'=\left([-1\vec{e}_1+\vec{e}_2,\vec{e}_2+\vec{e}_3],-\vec{e}_1+\vec{e}_3\right)=\left(-[\vec{e}_1\vec{e}_2]-[\vec{e}_1\vec{e}_3]+[\vec{e}_2\vec{e}_2]+[\vec{e}_2\vec{e}_3],-\vec{e}_1+\vec{e}_3\right)=$

$=\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_1+\vec{e}_1\vec{e}_3\vec{e}_1-\vec{e}_2\vec{e}_3\vec{e}_1-\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3-\vec{e}_1\vec{e}_3\vec{e}_3=-2\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3\neq 0$, т.е. B - базис.

Находим координаты вектора $\vec{x}$ в базисе B'.

<u>1-й способ</u>: $\vec{x}=\alpha\vec{e}_1'+\beta\vec{e}_2'+\gamma\vec{e}_3'$. Подставим выражения для $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$, $\vec{e}_3'$. $\vec{x}=\vec{e}_1[-\alpha-\gamma]+\vec{e}_2[\alpha+\beta]+[\beta+\gamma]\vec{e}_3$. Но $\vec{x}=-\vec{e}_1+\vec{e}_2+2\vec{e}_3$, $\Rightarrow$

$$\begin{cases}-\alpha-\gamma=-1,\\ \alpha+\beta=1,\\ \beta+\gamma=2,\end{cases}\quad \begin{cases}\alpha=0,\\ \beta=1,\\ \gamma=1.\end{cases}$$

Ответ: $\alpha=0,\beta=1,\gamma=1,\vec{x}=\vec{e}_2'+\vec{e}_3'=(0,1,1)$.

<u>2-й способ</u>: Запишем матрицу A преобразования координат базиса B к базису B':

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix},$$

$\det A=-1\cdot1\cdot1+0-1\cdot1\cdot1-(1\cdot1\cdot0-0\cdot1\cdot1-1\cdot0\cdot1)=-2$.

Найдем A^{-1} - обратную матрицу A:

$A_{11}^{\vee}=1,\ A_{21}^{\vee}=-1,\ A_{31}^{\vee}=1,$

$A_{12}^{\vee}=-1,\ A_{22}^{\vee}=-1,\ A_{32}^{\vee}=-1,$

$A_{13}^{\vee}=1,\ A_{23}^{\vee}=1,\ A_{33}^{\vee}=-1.$

$$\left(A^{\vee}\right)^{T}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix},\Rightarrow A^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

Координаты вектора X в новом базисе обозначим $\vec{X}'$.

$$\vec{X}' = A^{-1}X = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\vec{X}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$**.**

Построение ортогонального базиса

Задача 7. Применяя последовательный процесс ортогонализации Шмидта к системе векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ пространства R^3, построить ортогональный базис.

$\vec{a}_1 = (1,-2,2)$; $\vec{a}_2 = (-1,0,-1)$; $\vec{a}_3 = (5,-3,-7)$.

Решение. Процесс ортогонализации состоит в следующем. Из неортогонального базиса $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ строят новый, ортогональный базис по формулам:

$$\boxed{\begin{gathered}\vec{e}_1 = \vec{a}_1;\ c_1^{(2)} = \frac{(\vec{a}_2, \vec{e}_1)}{(\vec{e}_1, \vec{e}_1)};\ \vec{e}_2 = \vec{a}_2 - c_1^{(2)}\,\vec{e}_1;\ c_1^{(3)} = \frac{(\vec{a}_3, \vec{e}_1)}{(\vec{e}_1, \vec{e}_1)};\ c_2^{(3)} = \frac{(\vec{a}_3, \vec{e}_2)}{(\vec{e}_2, \vec{e}_2)}; \\ \vec{e}_3 = \vec{a}_3 - c_1^{(3)}\,\vec{e}_1 - c_2^{(3)}\,\vec{e}_2.\end{gathered}}$$

Проделаем эту процедуру.

$\vec{e}_1 = (1,-2,2)$; $(\vec{a}_2, \vec{e}_1) = -3$; $(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = 9$; $c_1^{(2)} = -\frac{1}{3}; \Rightarrow$

$$\vec{e}_2 = \vec{a}_2 - \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot \vec{e}_1 = (-1,0,-1) + \frac{1}{3}(1,-2,2) = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right), \Rightarrow$$

$\vec{e}_2 = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

$(\vec{a}_3, \vec{e}_1) = -3$; $(\vec{a}_3, \vec{e}_2) = 1$; $(\vec{e}_2, \vec{e}_2) = 1$; $c_1^{(3)} = -\frac{1}{3}$; $c_2^{(3)} = 1, \Rightarrow$

$$\vec{e}_3 = \vec{a}_3 - c_1^{(3)}\,\vec{e}_1 - c_2^{(3)}\,\vec{e}_2 = (5,-3,-7) - \left(-\frac{1}{3}\right)(1,-2,2) - 1\cdot\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) =$$

$= (6,-3,-6), \Rightarrow \vec{e}_3 = (6,-3,-6)$.

Осталось отнормировать базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ на 1.

$$\vec{e}_1' = \left(-\frac{1}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{2}{9}\right),\ \vec{e}_2' = \left(-\frac{2}{9}, -\frac{2}{9}, -\frac{1}{9}\right),\ \vec{e}_3' = \left(\frac{2}{9}, -\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right).$$

Декартов прямоугольный базис. Направляющие косинусы и координаты

Задача 8. Дан модуль вектора $|\vec{a}| = 2$ и углы $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$ и $\gamma = 120°$, которые он составляет с координатными осями Ox, Oy и Oz соответственно. Вычислить проекции вектора $\vec{a}$ на координатные оси.

Решение. $a_x = |a|\cos\alpha = 2\cos 45° = \sqrt{2}$; $a_y = |a|\cos\beta = 2\cos 60° = 1$; $a_z = |a|\cos\gamma = 2\cos 120° = -1$.

Задача 9. Даны векторы $\vec{a} = (2; 0, 1)$ и $\vec{b} = (-1; 1; 0)$. Вычислить направляющие косинусы вектора $\vec{a} + 2\vec{b}$.

Решение. $\vec{a} + 2\vec{b} = (2; 0; 1) + 2(-1; 1; 0) = (0; 2; 1)$.

$\left|\vec{a} + 2\vec{b}\right| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$. $\cos\alpha = \frac{0}{\sqrt{5}}$; $\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Задача 10. Может ли вектор составлять с координатными осями следующие углы: $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 120°$.

Решение. Для направляющих косинусов должно выполняться равенство $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$. Проверим его справедливость.

$\cos^2 45°+\cos^2 60°+\cos^2 120°=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=1$ – равенство выполняется.

Ответ: Может.

Задача 11. Даны точки $A(3;-1;5)$, $B(4;2;-5)$, $C(-4;0;3)$. Найти длину медианы AA' треугольника ABC.

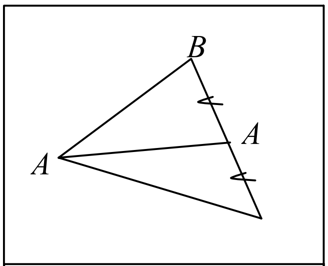

Рис. 2.6. (К задаче

Решение. $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=$

$=(1;3;-10)+\frac{1}{2}(-8;-2;8)=(-3;2;-6)$.

$\left|\overrightarrow{AA'}\right|=\sqrt{(-3)^2+2^2+(-6)^2}=7$.

Ответ: 7.

Задача 12. Коллинеарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, построенные по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=(-9;5;3)$, $\vec{b}=(7;1;-2)$, $\vec{c}_1=2\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{c}_2=3\vec{a}+5\vec{b}$.

Решение. $\vec{c}_1=(2\cdot(-9)-7;\,2\cdot5-1;\,2\cdot3+2)=(-25;9;8)$.

$\vec{c}_2=(3\cdot(-9)+5\cdot7;\,3\cdot5+5\cdot1;\,3\cdot3+5\cdot(-2))=(8;20;-1)$.

Проверим пропорциональность компонент:

$\frac{c_{1x}}{c_{2x}}=\frac{c_{1y}}{c_{2y}}=\frac{c_{1z}}{c_{2z}}$ $\Rightarrow$ должно быть $-\frac{25}{8}=\frac{9}{20}$, что неверно.

Ответ: Нет.

Скалярное произведение векторов

Задача 13. $|\vec{a}_1|=3$, $|\vec{a}_2|=4$, $\left(\vec{a}_1\,\hat{,}\,\vec{a}_2\right)=\frac{2\pi}{3}$.

а). Найти $|\vec{a}_1+\vec{a}_2|$. б). Найти $b=(3\vec{a}_1-2\vec{a}_2,\,\vec{a}_1+2\vec{a}_2)$.

Решение. а) $|\vec{a}_1+\vec{a}_2|=\sqrt{(\vec{a}_1+\vec{a}_2,\,\vec{a}_1+\vec{a}_2)}=$

$=\sqrt{(\vec{a}_1,\vec{a}_1)+(\vec{a}_1,\vec{a}_2)+(\vec{a}_2,\vec{a}_1)+(\vec{a}_2,\vec{a}_2)}=\sqrt{9+16+2(\vec{a}_1,\vec{a}_2)}=$

$=\sqrt{25+2\cdot3\cdot4\cos\frac{2\pi}{3}}=\sqrt{13}$.

б) $\vec{b}=(3\vec{a}_1-2\vec{a}_2,\,\vec{a}_1+2\vec{a}_2)=3\vec{a}_1^2+6(\vec{a}_1,\vec{a}_2)-2(\vec{a}_2,\vec{a}_1)-4\vec{a}_2^2=$

$=3\cdot9+4(\vec{a}_1,\,\vec{a}_2)-4\cdot16=27+4\cdot3\cdot4\cdot\cos\frac{2\pi}{3}-64=-61$.

Ответ: а) $\sqrt{13}$. б) -61.

Задача 14. $\vec{a}_1=(4;-2;-4)$, $\vec{a}_2=(6;-3;2)$. Найти $|2\vec{a}_1-\vec{a}_2|$.

Решение. $2\vec{a}_1-\vec{a}_2=(8;-4;-8)-(6;-3;2)=(2;-1;-10)$.

$|2\vec{a}_1-\vec{a}_2|=\sqrt{2^2+(-1)^2+(-10)^2}=\sqrt{105}$.

Ответ: $\sqrt{105}$.

Задача 15. Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, если $A(-1;2;-3)$, $B(0;1;-2)$, $C(-3;4;-5)$.

Решение. $\overrightarrow{AB}=(0-(-1);1-2;-2-(-3))=(1;-1;1)$. $\overrightarrow{AC}=(-2;2;-2)$.

$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AC}}\right)=\frac{1\cdot(-2)+(-1)\cdot2+1\cdot(-2)}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+2^2+(-2)^2}}=-1$.

Ответ: -1.

Задача 16. Вычислить синус угла, образованного векторами $\vec{a}(-2,2,1)$ и $\vec{b}(6,3,2)$.

Решение. Найдем вначале косинус нужного угла

$$\cos\varphi = \frac{-2\cdot 6+2\cdot 3+1\cdot 2}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{49}} = \frac{-12+6+2}{21} = \frac{-4}{21},\Rightarrow$$

$$\sin^2\varphi = 1-\cos^2\varphi = 1-\frac{16}{21^2} = \frac{21^2-16}{21^2} = \frac{5^2\cdot 17}{21^2},\Rightarrow \ \sin\varphi = \pm\frac{5\sqrt{17}}{21}.$$

Так как угол между векторами $0\le\varphi\le\pi$, следует выбирать знак +.

Ответ: $\frac{5\sqrt{17}}{21}$.

Задача 17. Для вектора $\vec{a}(-1,2,1)$ найти ортогональную составляющую для базисного орта $\vec{j}$ и ортогональную составляющую в плоскости векторов $\vec{j}$ и $\vec{k}$.

Решение. Найти проекцию вектора $\vec{a}$ на орт $\vec{j}$:

$$\text{пр}_{\vec{j}}\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{j}) = |\vec{a}|\frac{a_x\cdot 0+a_y\cdot 1+a_z\cdot 0}{|\vec{a}||1|} = a_y = 2.$$

Таким образом, ортогональная составляющая вектора $\vec{a}$ вдоль $\vec{j}$ есть $a_y\vec{j}=2\vec{j}$. Так как $\vec{j}\perp\vec{i}$ и $\vec{j}\perp\vec{k}$, он ортогонален плоскости векторов $\vec{i}$ и $\vec{k}$. $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}=-1\vec{i}+2\vec{j}+1\vec{k}$; в плоскости $\vec{i}$ и $\vec{k}$ лежит составляющая $-\vec{i}+\vec{k}=\vec{a}_{i,k}$.

Ответ: $\vec{a}_j = 2\vec{j},\ \vec{a}_{i,k} = -\vec{i}+\vec{k}$.

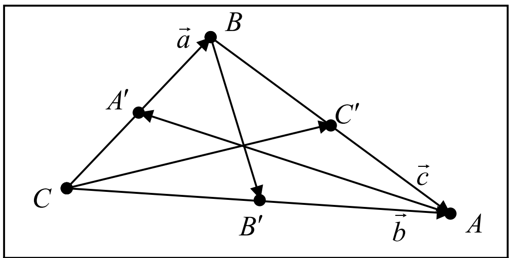

Рис. 2.7. (К задаче 18)

Задача 18. Показать, что сумма квадратов медиан треугольника относится к сумме квадратов его сторон, как 3:4.

Решение. Пусть $\overrightarrow{CB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CA}=\vec{b}$. Тогда $\overrightarrow{AB}=\vec{a}-\vec{b}$.

Находим медианы треугольника $\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC'}=\vec{a}-\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$,

$$\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB'}=-\left(\vec{a}-\vec{b}\right)+\left(-\frac{\vec{b}}{2}\right)=-\vec{a}+\frac{\vec{b}}{2},\quad \overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA'}=-\vec{b}+\frac{\vec{a}}{2}=\frac{\vec{a}}{2}-\vec{b}.$$

Осталось найти требуемое отношение

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)^2+\left(-\vec{a}+\frac{\vec{b}}{2}\right)^2+\left(\frac{\vec{a}}{2}-\vec{b}\right)^2}{\vec{a}^2+\vec{b}^2+(\vec{a}-\vec{b})^2}=\frac{\frac{3}{2}\vec{a}^2+\frac{3}{2}\vec{b}^2-\frac{3}{2}(\vec{a}\vec{b})}{2\vec{a}^2+2\vec{b}^2-2(\vec{a}\vec{b})}=\frac{3}{4}.$$

Задача 19. Показать, что четырехугольник $ABCD$-ромб, если $A(1;2;2)$, $B(3;5;8)$, $C(-3;2;6)$, $D(-5;-1;0)$. Найти угол при вершине ромба.

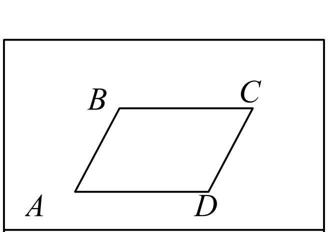

Рис.2.8. (К задаче 19)

Решение. Найдем $\overrightarrow{AB}=(2;3;6)$; $\left|\overrightarrow{AB}\right|=7$; $\overrightarrow{AD}=(-6;-3;-2)$; $\left|\overrightarrow{AD}\right|=7$; $\overrightarrow{BC}=(-6;-3;-2)$; $\left|\overrightarrow{BC}\right|=7$; $\overrightarrow{CD}=(-2;-3;-6)$; $\left|\overrightarrow{CD}\right|=7$, т.е. $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{CD}\right|$ и $ABCD$ – ромб. Найдем

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)=\frac{2\cdot(-6)+3\cdot(-3)+6\cdot(-2)}{\sqrt{4+9+36}\cdot\sqrt{(-6)^2+(-3)^2+(-2)^2}}=-\frac{33}{49}.$$

Ответ: $\cos\varphi=-\frac{33}{49}$.

Задача 20. Доказать, что вектор $\vec{p}=\vec{b}-\dfrac{\vec{a}(\vec{a},\vec{b})}{a^2}$ перпендикулярен к вектору $\vec{a}$.

Решение. Найдем $(\vec{p},\vec{a})=(\vec{b},\vec{a})-\dfrac{(\vec{a},\vec{b})\vec{a}^2}{a^2}=(\vec{b},\vec{a})-(\vec{a},\vec{b})=0$, что и требовалось доказать.

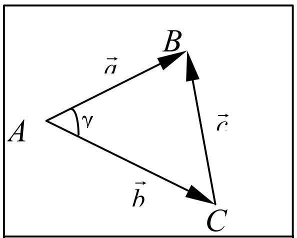

Рис.2.9. (К задаче

Задача 21. Доказать: а) теорему косинусов;
б) теорему Пифагора.

Доказательство. а). Рассмотрим треугольник ABC, построенный на векторах $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$. Пусть третья сторона $\overrightarrow{CB}=\vec{c}$. Тогда $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$,

$\left|\vec{c}^{\,2}\right|=\vec{c}^{\,2}=(\vec{a}-\vec{b})^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2-(\vec{a},\vec{b})-(\vec{b},\vec{a})=$

$=\vec{a}^2+\vec{b}^2-2(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}|^2+\left|\vec{b}\right|^2-2|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\cos\gamma \Rightarrow$ теорема косинусов доказана.

б). Докажем теорему Пифагора. При $\gamma=90^\circ$ $\left|\vec{c}^{\,2}\right|=\left|\vec{a}^2\right|+\left|\vec{b}^2\right|$ – что и требовалось доказать.

Задача 22. Доказать, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

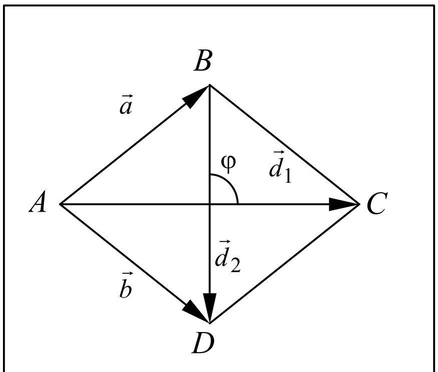

Рис. 2.10. (К задаче 22)

Решение. Пусть $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$ – стороны ромба. Тогда его диагонали есть $\vec{d}_1=\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{d}_2=\overrightarrow{BD}=\vec{b}-\vec{a}$. Так как мы рассматриваем невырожденный ромб, $\left|\vec{d}_1\right|\neq 0$ и $\left|\vec{d}_2\right|\neq 0$, $\Rightarrow$

$\cos\left(\widehat{\vec{d}_1,\vec{d}_2}\right)=\dfrac{(\vec{a}+\vec{b},\vec{b}-\vec{a})}{\left|\vec{d}_1\right|\cdot\left|\vec{d}_2\right|}=\dfrac{\vec{b}^2-\vec{a}^2}{\left|\vec{d}_1\right|\cdot\left|\vec{d}_2\right|}=0$, так как для ромба $\left|\vec{b}\right|=|\vec{a}|$.

Векторное произведение векторов

Задача 23. $|\vec{a}_1|=1$, $|\vec{a}_2|=2$, $\left(\vec{a}_1\hat{,}\,\vec{a}_2\right)=\dfrac{2\pi}{3}$.

а). Найти $|[\vec{a}_1,\vec{a}_2]|$. б). Найти $|[\vec{a}_1+3\vec{a}_2,3\vec{a}_1-\vec{a}_2]|$.

Решение. а) $|[\vec{a}_1,\vec{a}_2]|=1\cdot 2\cdot\sin\dfrac{2\pi}{3}=\sqrt{3}$.

б) $|[\vec{a}_1+3\vec{a}_2,3\vec{a}_1-\vec{a}_2]|=|3[\vec{a}_1,\vec{a}_1]-[\vec{a}_1,\vec{a}_2]+9[\vec{a}_2,\vec{a}_1]-3[\vec{a}_2,\vec{a}_2]|=$

=< так как $[\vec{a}_1,\vec{a}_1]=[\vec{a}_2,\vec{a}_2]=\vec{0}$, $[\vec{a}_1,\vec{a}_2]=-[\vec{a}_2,\vec{a}_1]$ >= $=|-10[\vec{a}_1,\vec{a}_2]|=10\sqrt{3}$.

Ответ: а) $\sqrt{3}$. б) $10\sqrt{3}$.

Задача 24. $\vec{a}_1=(3;-1;2)$, $\vec{a}_2=(1;2;-1)$. Найти $\left|\vec{b}\right|=|[2\vec{a}_1-\vec{a}_2,2\vec{a}_1+\vec{a}_2]|$.

Решение. $\vec{b}=4[\vec{a}_1,\vec{a}_1]-[\vec{a}_2,\vec{a}_2]+2[\vec{a}_1,\vec{a}_2]-2[\vec{a}_2,\vec{a}_1]=4[\vec{a}_1,\vec{a}_2]=$

$$=4\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -1 & 2\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=4\left(\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}\right)=(-12,20,28).$$

$\left|\vec{b}\right|=\sqrt{(-12)^2+(20)^2+(28)^2}=\sqrt{1328}=4\sqrt{83}$.

Ответ: $4\sqrt{83}$.

Задача 25. Найти вектор $\left[\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC},\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AB}\right]\right]$, если $A(2;2;3)$, $B(1;0;4)$, $C(2;3;5)$.

Решение. $\overrightarrow{AB}=(-1;-2;1)$, $\overrightarrow{AC}=(0;1;2)$, $\overrightarrow{BC}=(1;3;1)$ $\Rightarrow$
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=(-1;-1;3)$.

$$\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AB}\right]=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ 1 & 3 & 1\\ -1 & -2 & 1\end{vmatrix}=\vec i\cdot\begin{vmatrix}3 & 1\\ -2 & 1\end{vmatrix}-\vec j\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}+\vec k\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ -1 & -2\end{vmatrix}=(5;-2;1).$$

$$\left[\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC},\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AB}\right]\right]=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ -1 & -1 & 3\\ 5 & -2 & 1\end{vmatrix}=(5;16;7).$$

Ответ: $(5;16;7)$.

Задача 26. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec a$ и $\vec b$, если $\vec a=\vec p+3\vec q$, $\vec b=3\vec p-\vec q$, $|\vec p|=3$, $|\vec q|=5$, $(\widehat{\vec p,\vec q})=\dfrac{2\pi}{3}$.

Решение. $S_{\text{пар}}=\left|\left[\vec a,\vec b\right]\right|=\left|\left[\vec p+3\vec q,3\vec p-\vec q\right]\right|=\left|3[\vec p,\vec p]-[\vec p,\vec q]+9[\vec q,\vec p]-3[\vec q,\vec q]\right|=$
$=<$ так как $[\vec p,\vec p]=\vec 0$, $[\vec q,\vec q]=\vec 0$, $[\vec p,\vec q]=-[\vec q,\vec p]$ $>=$

$$=\left|-10[\vec p,\vec q]\right|=10\left|[\vec p,\vec q]\right|=10\cdot3\cdot5\cdot\frac{\sqrt3}{2}=75\sqrt3 .$$

Ответ: $75\sqrt3$.

Задача 27. В треугольнике с вершинами $A(1;\ -1;\ +2)$, $B(5;-6;2)$, $C(1;3;-1)$ найдите высоту $h=\left|\overrightarrow{BD}\right|$.

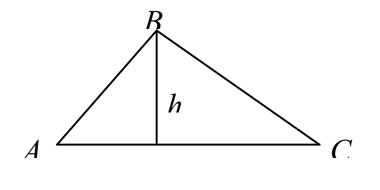

Рис. 2.11. (К задаче 27)

Решение. Площадь

$$S=\frac12\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\frac12 h\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad h=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}.$$

Найдем $\overrightarrow{AB}=(4;\ -5;\ 0)$, $\overrightarrow{AC}=(0;\ 4;\ -3)$.

$$\left|\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right]\right|=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ 4 & -5 & 0\\ 0 & 4 & -3\end{vmatrix}=\left|(15,\ 12,\ 16)\right|=\sqrt{225+144+256}=\sqrt{625}=25,$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{0^2+4^2+3^2}=5\Rightarrow h=5.$$

Ответ: 5.

Задача 28. Найти расстояние от точки B с координатами $(5,-6,2)$ до прямой, проходящей через точки $A(1;-1;+2)$ и $C(1;3;-1)$.

Решение. Построим треугольник ΔABC и опустим высоту $h=|\overrightarrow{BD}|$ из вершины B на основание AC (или его продолжение), см. рис. 2.11 к задаче 27. Тогда искомое расстояние равно $h=|\overrightarrow{BD}|$ и задача свелась к предыдущей.

Ответ: 5.

Задача 29. Доказать теорему синусов.

Примечание. Использовать формулу для площади треугольника:

$S=\dfrac{|\vec a|\cdot|\vec b|\cdot|\vec c|}{4R}$, т.е. площадь треугольника равна

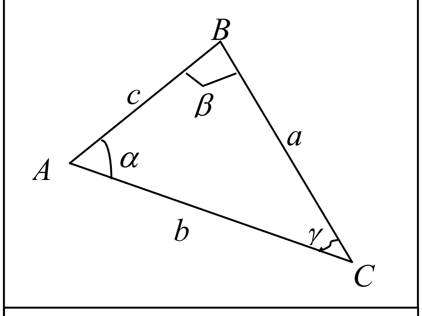

Рис. 2.12 (К задаче 29)

произведению длин его сторон, деленному на четыре радиуса описанной окружности.

Доказательство.

Рассмотрим треугольник ABC, a, b, c – соответствующие стороны, α, β, γ – соответствующие углы, R – радиус описанной окружности.

Требуется доказать равенства:

$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R}.$$

Для невырожденного треугольника длины сторон и синусы углов отличны от нуля. Площадь треугольника

$$S = \frac{1}{2}\left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right| = \frac{1}{2}\left|\left[\vec{c}, \vec{b}\right]\right| = \frac{|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot|\vec{c}|}{4R} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot sin\,\gamma = \frac{1}{2}|\vec{c}|\cdot\left|\vec{b}\right| sin\,\alpha = \frac{|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot|\vec{c}|}{4R} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{sin\,\alpha} = \frac{c}{sin\,\gamma} = 2R.$$

Для стороны b аналогично.

Задача 30. Доказать, что в треугольнике ABC с биссектрисой CC' выполняется соотношение

$$\boxed{\frac{|\ CB\ |}{|\ BC'\ |} = \frac{|\ CA\ |}{|\ AC'\ |}}.$$

Доказательство.

1) $S_{CBC'} = \frac{1}{2}\sin\frac{\widehat{C}}{2}\cdot|\ CC'\ |\cdot|\ CB\ | = \frac{1}{2}|\ BC'\ |\cdot|\ CH\ |$;

2) $S_{CAC'} = \frac{1}{2}\sin\frac{\widehat{C}}{2}\cdot|\ CC'\ |\cdot|\ CA\ | = \frac{1}{2}|\ C'A\ |\cdot|\ CH\ |$.

Отсюда следует, что $\frac{|\ CB\ |}{|\ CA\ |} = \frac{|\ BC'\ |}{|\ C'A\ |}$, что и требовалось доказать.

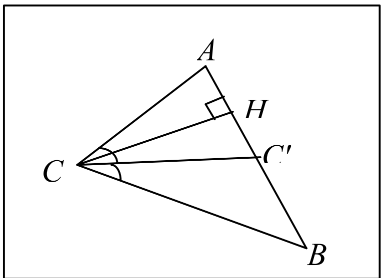

Рис. 2.13 (К задаче 30)

Смешанное произведение векторов

Задача 31. Доказать тождество: $(\vec{a}+\vec{c})\vec{b}(\vec{a}+\vec{b}) = -\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Решение. $(\vec{a}+\vec{c})\vec{b}(\vec{a}+\vec{b}) = \left((\vec{a}+\vec{c}),[\vec{b},\vec{a}]\right) = \left(\vec{a},[\vec{b},\vec{a}]\right) + \left(\vec{c},[\vec{b},\vec{a}]\right) = -\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Задача 32. Доказать, что при любых $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ векторы $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{b}-\vec{c}$, $\vec{c}-\vec{a}$ компланарны.

Решение. Вычислим $\left([\vec{a}-\vec{b},\vec{b}-\vec{c}],\vec{c}-\vec{a}\right) = \left([\vec{a},\vec{b}]-[\vec{a},\vec{c}]-\underbrace{[\vec{b},\vec{b}]}_{0}+[\vec{b},\vec{c}],\vec{c}-\vec{a}\right) =$

$= \vec{a}\vec{b}\vec{c} - \underbrace{\vec{a}\vec{c}\vec{c}}_{0} - \underbrace{\vec{b}\vec{c}\vec{c}}_{0} - \underbrace{\vec{a}\vec{b}\vec{a}}_{0} + \underbrace{\vec{a}\vec{c}\vec{a}}_{0} - \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{a}\vec{b}\vec{c} - \vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$, это означает, что векторы компланарны.

Задача 33. Даны векторы $\vec{a}_1 = (1;-1;3)$, $\vec{a}_2 = (-2;2;1)$, $\vec{a}_3 = (3;-2;5)$.

а) вычислить объем параллелепипеда, построенного на этих векторах;

б) вычислить объем тетраэдра, построенного на этих векторах;

в) определить, будут ли векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ компланарны;

г) определить, образует ли тройка $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ базис в трехмерном пространстве;

д) определить, будет ли тройка $\vec{a}_1\,\vec{a}_2\,\vec{a}_3$ правой.

Решение.

а). $V_{\text{пар}} = \left| \ \vec{a}\vec{b}\vec{c} \ \right| = \left\| \begin{matrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{matrix} \right\| = \left| \ -7 \ \right| = 7$. **Ответ:** 7.

б). $V_{\text{тетр}} = \dfrac{1}{6} V_{\text{пар}} = \dfrac{7}{6}$. **Ответ:** $\dfrac{7}{6}$.

в). Так как $V \neq 0$, векторы некомпланарны. **Ответ:** Нет

г). Следовательно, они образуют базис в трехмерном пространстве. **Ответ:** Да.

д). Так как $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -7 < 0$, то тройка $\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_3$ – левая. **Ответ:** Левая.

Задача 34. В тетраэдре с вершинами в точках $A(1;1;1)$, $B(2;0;2)$, $C(2;2;2)$, $D(3;4;-3)$ вычислить высоту $\left|\overrightarrow{DE}\right| = h$.

Решение. $\overrightarrow{AB} = (1;-1;1)$, $\overrightarrow{AC} = (1;1;1)$, $\overrightarrow{AD} = (2;3;-4)$.

1) $V = \dfrac{1}{3} S_{\text{осн}} h = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \left| \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right] \right| \cdot h$;

2) $V = \dfrac{1}{6} V_{\text{пар}} = \dfrac{1}{6} \left(\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right], \overrightarrow{AD} \right)$; $\Rightarrow$

$$h = \frac{\left| \left(\left[\overrightarrow{AB}, \ \overrightarrow{AC} \right] \ , \ \overrightarrow{AD} \right) \right|}{\left| \ \left[\overrightarrow{AB}, \ \overrightarrow{AC} \right] \ \right|} = .$$

$$= \frac{\left| \ -12 \ \right|}{2\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

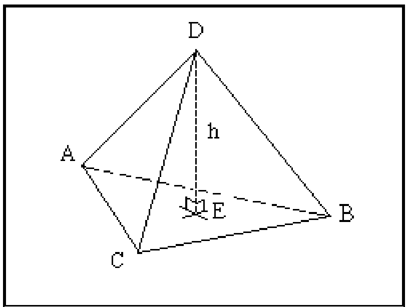

Рис. 2.14.(К задаче 34)

Ответ: $3\sqrt{2}$.

Задача 35. Найти расстояние от плоскости, проходящей через точки $A(1,1,1)$, $B(2,0,2)$, $C(2,2,2)$ до точки $D(3,4,-3)$.

Решение. Строим тетраэдр $ABCD$ и находим его высоту $|\overrightarrow{DE}| = 3\sqrt{2}$ (см. предыдущую задачу).

Ответ: $3\sqrt{2}$.

Задача 36. Образуют ли базис в пространстве R^3 векторы $\vec{a} = (1,0,0)$, $\vec{b} = \left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}} \right)$, $\vec{c} = \left(0, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}} \right)$? Будет ли он ортонормированным?

Решение. Три вектора в пространстве R^3 образуют базис, если они некомпланарны, то есть их смешанное произведение не равно 0.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = 1, \Rightarrow$$

эти три вектора образуют базис. Найдем длины векторов:

$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1$, $\quad |\vec{b}| = \sqrt{0^2 + \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} \right)^2} = 1$, $|\vec{c}| = \sqrt{0^2 + \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} \right)^2} = 1$.

Найдем углы между векторами:

$$\cos\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right)=\frac{1\cdot 0+0\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+0\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}{1\cdot 1}=0,$$

$$\cos\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{c}\right)=\frac{1\cdot 0+0\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+0\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}{1\cdot 1}=0,$$

$$\cos\left(\vec{b}\,\hat{,}\,\vec{c}\right)=\frac{0\cdot 0-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}{1\cdot 1}=0.$$

Таким образом, это ортонормированный базис.

Задача 37. Дать алгебраическое доказательство того, что смешанное произведение трех компланарных векторов равно нулю.

Решение. Даны три компланарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Докажем, что $\left([\vec{a},\vec{b}],\vec{c}\right)=0$.

1-й случай. $\vec{a}$ коллинеарен $\vec{b}\Rightarrow[\vec{a},\vec{b}]=\vec{0}\Rightarrow\left([\vec{a},\vec{b}],\vec{c}\right)=0$.

2-й случай. Пусть $\vec{a}$ неколлинеарен $\vec{b}$. Тогда они образуют базис на плоскости, поэтому в силу компланарности $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ имеем $\vec{c}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$. Найдем

$$\left([\vec{a},\vec{b}],\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\right)=\alpha\left([\vec{a},\vec{b}],\vec{a}\right)+\beta\left([\vec{a},\vec{b}],\vec{b}\right)=\alpha\left([\vec{a},\vec{a}],\vec{b}\right)+\beta\left([\vec{b},\vec{b}],\vec{a}\right)=0.$$

Задача 38. Доказать, что четыре точки $A(1,2,-1)$, $B(0,1,5)$, $C(-1,2,1)$, $D(2,1,3)$, лежат в одной плоскости.

Решение. Точки A,B,C,D лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ компланарны, то есть $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=0$. Вычислим

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}-1&-1&6\\-2&0&2\\1&-1&4\end{vmatrix}=-2+12-8-2=0,$$

что и требовалось доказать.

Разные задачи

Задача 39. Упростить выражение: $[\vec{i},\vec{j}+\vec{k}]-[\vec{j},\vec{i}+\vec{k}]+[\vec{k},\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}]$. Здесь использованы стандартные обозначения.

Решение. $[\vec{i},\vec{j}+\vec{k}]=[\vec{i},\vec{j}]+[\vec{i},\vec{k}]=\vec{k}+(-\vec{j})$, где i,j,k - базисные векторы прямоугольной декартовой системы координат, т.е. три взаимно перпендикулярных вектора единичной длины и составляют правую тройку. Для них справедливо:

$[\vec{i},\vec{j}]=\vec{k}$, $[\vec{j},\vec{k}]=\vec{i}$, $[\vec{k},\vec{i}]=\vec{j}$, $[\vec{i},\vec{k}]=-\vec{j}$ ($\vec{i},\vec{k},\vec{j}$ - левая тройка).

Аналогично: $[\vec{j},\vec{i}+\vec{k}]=[\vec{j},\vec{i}]+[\vec{j},\vec{k}]=-\vec{k}+\vec{i}$ ($\vec{j},\vec{i},\vec{k}$ - левая тройка),

$[\vec{k},\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}]=[\vec{k},\vec{i}]+[\vec{k},\vec{j}]=\vec{j}-\vec{k}$, искомая сумма:

$\vec{k}-\vec{j}+\vec{k}-\vec{i}+\vec{j}-\vec{i}=2\vec{k}-2\vec{i}=2(\vec{k}-\vec{i})$.

Ответ: $2(\vec{k}-\vec{i})$.

Задача 40. Вычислить:

1) $\left|(\vec{a}+\vec{b},2\vec{a}+2\vec{b})\cdot(3\vec{a}+3\vec{b},4\vec{a}+4\vec{b})\right|$.

2) $\left|[[\vec{a}+\vec{b},2\vec{a}+2\vec{b}],[3\vec{a}+3\vec{b},4\vec{a}+4\vec{b}]]\right|$.

Решение.

1) $(\vec{a}+\vec{b},2\vec{a}+2\vec{b})=2(\vec{a},\vec{a})+2(\vec{a},\vec{b})+2\left(\vec{b},\vec{a}\right)+2(\vec{b},\vec{b})==2(\vec{a},\vec{a})+4(\vec{a},\vec{b})+2(\vec{b},\vec{b})=2A$,

где $(\vec{a},\vec{a})$, $(\vec{a},\vec{b})$, $(\vec{b},\vec{b})$ - числа, т.е. A - число.

$(3\vec{a}+3\vec{b},4\vec{a}+4\vec{b})=12(\vec{a},\vec{a})+24(\vec{a},\vec{b})+12(\vec{b},\vec{b})=12A$.

Окончательно

$|2A\cdot 12A| = 24A^2 = 12\cdot 2[(\vec{a},\vec{a})+2(\vec{a},\vec{b})+(\vec{b},\vec{b})]^2 = 24(\vec{a}+\vec{b})^4$.

Ответ: $24(\vec{a}+\vec{b})^4$.

2) $[\vec{a}+\vec{b},2\vec{a}+2\vec{b}] = 2[\vec{a},\vec{a}]+2[\vec{a},\vec{b}]+2[\vec{b},\vec{a}]+2[\vec{b},\vec{b}]=\vec{0}$, так как $[\vec{a},\vec{a}]=[\vec{b},\vec{b}]=\vec{0}$, $[\vec{a},\vec{b}]=-[\vec{b},\vec{a}]$; аналогично $[3\vec{a}+3\vec{b},4\vec{a}+4\vec{b}]=\vec{0}$; $[\vec{0},\vec{0}]=\vec{0}$ и $|\vec{0}|=0$.

Ответ: 0.

Задача 41. Дан параллелограмм $ABCD$. Доказать, что его площадь в два раза меньше площади параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$, противоположные стороны которого соответственно параллельны и равны диагоналям AC и BD исходного параллелограмма.

Решение. Пусть $\overrightarrow{AB}=\vec{a}, \overrightarrow{AD}=\vec{b}$. $S_{ABCD}=|[\vec{a},\vec{b}]|$. Пусть $\vec{d}_1=\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{d}_2=\vec{b}-\vec{a}$ - диагонали параллелограмма $ABCD$.

$$S_{A_1B_1C_1D_1}=|[\vec{a}+\vec{b},\vec{b}-\vec{a}]|=2|[\vec{a},\vec{b}]|=2S_{ABCD}.$$

Задача 42. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ связаны соотношением $[\vec{a},\vec{b}]=[\vec{c},\vec{d}]$, $[\vec{a},\vec{c}]=[\vec{b},\vec{d}]$. Доказать, что векторы $(\vec{a}-\vec{d})$ и $(\vec{b}-\vec{c})$ коллинеарны.

Решение. Найдем $[\vec{a}-\vec{d},\vec{b}-\vec{c}]=[\vec{a},\vec{b}]-[\vec{a},\vec{c}]-[\vec{d},\vec{b}]+[\vec{d},\vec{c}]=[\vec{c},\vec{d}]- \; -[\vec{b},\vec{d}]+[\vec{b},\vec{d}]-[\vec{c},\vec{d}]=\vec{0}$ - эти векторы коллинеарны.

Задача 43. Доказать тождество $[[\vec{a},\vec{b}],[\vec{c},\vec{d}]]=\vec{b}(\vec{a}\vec{c}\vec{d})-\vec{a}(\vec{b}\vec{c}\vec{d})$.

Решение. Воспользуемся формулой для двойного векторного произведения

$$\boxed{[\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]]=\vec{b}(\vec{a},\vec{c})-\vec{c}(\vec{a},\vec{b}).}$$

Тогда $[[\vec{a},\vec{b}],[\vec{c},\vec{d}]]=-[[\vec{c},\vec{d}],[\vec{a},\vec{b}]]=-(\vec{a}([\vec{c},\vec{d}],\vec{b})-\vec{b}([\vec{c},\vec{d}],\vec{a}))=\vec{b}(\vec{a}\vec{c}\vec{d})-\vec{a}(\vec{b}\vec{c}\vec{d})$.

Задача 44. На стороне AB и диагонали AC параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки E и F так, что $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{n}\cdot\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{n+1}\overrightarrow{AC}$. Доказать, что точки E, F и D лежат на одной прямой и определить отношение отрезков EF и FD.

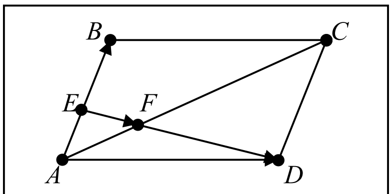

Рис. 2.15. (К задаче 44.)

Решение. Пусть $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$. Тогда $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}=\frac{1}{n+1}(\vec{a}+\vec{b})-\frac{1}{n}\vec{a}=-\frac{1}{n(n+1)}\vec{a}+\frac{1}{n+1}\vec{b}.$$

$$\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AF}=\vec{b}-\frac{1}{n+1}(\vec{a}+\vec{b})=-\frac{1}{n+1}\vec{a}+\frac{n}{n+1}\vec{b}.$$

Отсюда $|\overrightarrow{EF}|:|\overrightarrow{FD}|=\frac{1}{n}$, $\overrightarrow{EF}\parallel\overrightarrow{FD}$, то есть точки E, F, D лежат на одной прямой.

Ответ: $|\overrightarrow{EF}|:|\overrightarrow{FD}|=\frac{1}{n}$.

Задача 45. Длины базисных векторов $\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3$ в пространстве равны соответственно $1, 2, \sqrt{2}$, а углы между ними равны:

$\left(\bar{e}_1\,\widehat{,}\,\bar{e}_2\right)=120^\circ$, $\left(\bar{e}_1\,\widehat{,}\,\bar{e}_3\right)=45^\circ$, $\left(\bar{e}_2\,\widehat{,}\,\bar{e}_3\right)=135^\circ$. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах, имеющих в этом базисе координаты $\vec{a}=(-1,0,2)$, $\vec{b}=(1,1,3)$, $\vec{c}=(2,-1,1)$.

Решение.

$V=|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|=\left|\left([-\vec{e}_1+2\vec{e}_3,\vec{e}_1+\vec{e}_2+3\vec{e}_3],2\vec{e}_1-\vec{e}_2+\vec{e}_3\right)\right|=$
$=\left|\left(-[\vec{e}_1,\vec{e}_2]-3[\vec{e}_1,\vec{e}_3]+2[\vec{e}_3,\vec{e}_1]+2[\vec{e}_3,\vec{e}_2],2\vec{e}_1-\vec{e}_2+\vec{e}_3\right)\right|=$
$=\left|-\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3+3\vec{e}_1\vec{e}_3\vec{e}_2-2\vec{e}_3\vec{e}_1\vec{e}_2+4\vec{e}_3\vec{e}_2\vec{e}_1\right|=$
$=\left|\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3(-1-3-2-4)\right|=10\left|\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3\right|.$

Осталось найти $|\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3|$. Выберем декартову систему координат так, чтобы Ox была направлена по $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ лежал в плоскости Oxy, тогда $\vec{e}_1=(1,0,0)$, $\vec{e}_2=(2\cos 120^\circ,2\sin 120^\circ,0)=(-1,-\sqrt{3},0)$.

Найдем $\vec{e}_3$. Предположим, что он имеет декартовые координаты $\vec{e}_3=(x,y,z)$. Воспользуемся известными углами между векторами $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ и их длинами: $(\vec{e}_1,\vec{e}_3)=1\cdot\sqrt{2}\cos 45^\circ=\sqrt{2}\dfrac{\sqrt{2}}{2}=1$.С другой стороны $(\vec{e}_1,\vec{e}_3)=\vec{e}_{1x}\vec{e}_{3x}+\vec{e}_{1y}\vec{e}_{3y}+\vec{e}_{1z}\vec{e}_{3z}=1\cdot x+0\cdot y+0\cdot z=x,\Rightarrow x=1$. $(\vec{e}_2,\vec{e}_3)=2\sqrt{2}\cos 135^\circ=-2$.С другой стороны,

$(\vec{e}_2,\vec{e}_3)=-1\cdot x-\sqrt{3}y+0\cdot z=-x-\sqrt{3}y$, $\Rightarrow -2=-1x-\sqrt{3}y$, $x=1\Rightarrow 1=\sqrt{3}y,\Rightarrow y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Так как $|\vec{e}_3|=\sqrt{2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\Rightarrow z=\pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. Тогда

$$|\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3|=\left\|\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ -1 & -\sqrt{3} & 0\\ 1 & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}\end{matrix}\right\|=\sqrt{2}.$$

Ответ: $10\sqrt{2}$.

Задания для самостоятельной работы

Вариант 1

1.1 Задан тетраэдр $OABC$. В базисе из ребер $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ найти координаты вектора $\overrightarrow{DE}$, где D и E – середины ребер $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{BC}$.

2.1 Вычислить направляющие косинусы вектора $\vec{a}=(12;-15;-16)$.

3.1 Даны две смежные вершины параллелограмма $A(-2;6)$, $B(2;8)$ и точка пересечения его диагоналей $M(2;2)$. Найти две другие вершины.

4.1 $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right)=\dfrac{\pi}{3}$. Вычислить: а) $(2\vec{a}+\vec{b},2\vec{a}-3\vec{b})$; б) $\left|[2\vec{a}+\vec{b},2\vec{a}-3\vec{b}]\right|$.

5.1 Найти скалярное и векторное произведение векторов $\vec{a}=(1;2;3)$ и $\vec{b}=(1;1;2)$.

6.1 Вычислить длину диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=\vec{p}-3\vec{q}$, $\vec{b}=5\vec{p}+2\vec{q}$, если известно, что $|\vec{p}|=2\sqrt{2}$, $|\vec{q}|=3$ и $\left(\vec{p}\,\hat{,}\,\vec{q}\right)=\dfrac{\pi}{4}$.

7.1 Даны векторы $\vec{a}_1=(4;-2;-4)$, $\vec{a}_2=(6;-3;2)$. Вычислить: а) $(\vec{a}_1,\vec{a}_2)$; б) $(2\vec{a}_1-3\vec{a}_2,\vec{a}_1+2\vec{a}_2)$; в) $(\vec{a}_1-\vec{a}_2)^2$; г) $|2\vec{a}_1-\vec{a}_2|$.

8.1 Убедиться, что треугольник с вершинами $A(1;2;1)$, $B(3;-1;7)$, $C(7,4,-2)$ – равнобедренный.

9.1 Доказать, что $\left[\vec{a}-\vec{b},\ \vec{a}+\vec{b}\right]=2\left[\vec{a},\ \vec{b}\right]$.

10.1 Составляют ли векторы $\vec{a}=(-1;-1;-1)$, $\vec{b}=(-2;-1;3)$, $\vec{c}=\left[\vec{a},\ \vec{b}\right]$ ортогональный базис трехмерного пространства?

11.1 Векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ образуют правую тройку, взаимно перпендикулярны и $|\vec{a}_1|=4$, $|\vec{a}_2|=2$, $|\vec{a}_3|=3$. Вычислить $(\vec{a}_1,[\vec{a}_2,\vec{a}_3])$.

12.1 Доказать, что при любых $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ векторы $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{b}-\vec{c}$, $\vec{c}-\vec{a}$ компланарны.

13.1 Проверить, компланарны ли векторы: $\vec{a}=-2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{c}=14\vec{i}-13\vec{j}+7\vec{k}$.

14.1 Упростить выражение $\left[\vec{i},\vec{j}+\vec{k}\right]-\left[\vec{j},\vec{i}+\vec{k}\right]+\left[\vec{k},\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\right]$.

15.1 Доказать тождество $\left|[\vec{a},\vec{b}]\right|^2=\begin{vmatrix}(\vec{a},\vec{a}) & (\vec{a},\vec{b})\\ (\vec{a},\vec{b}) & (\vec{b},\vec{b})\end{vmatrix}$.

16.1 При каком значении x четырехугольник с вершинами в точках $A(1;x;1)$, $B(4;4;1)$, $C(7;1;1)$, $D(4;-2;1)$ является ромбом?

17.1 Смешанное произведение векторов $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ равно $\frac{1}{2}$. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах, имеющих в это базисе координаты $(-1;0;2)$, $(1;1;3)$, $(2;-1;1)$.

Вариант 2

1.2. В тетраэдре $OABC$ медиана AL грани ABC делится точкой M в отношении $\left|\overrightarrow{AM}\right| : \left|\overrightarrow{ML}\right| = 3:7$. Найти координаты вектора $\overrightarrow{OM}$ в базисе из ребер $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$.

2.2. Найти единичный вектор, сонаправленный вектору $2\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}$.

3.2. Определить координаты вершин треугольника, если известны середины его сторон $K(2;-4)$, $M(6;1)$, $N(-2;3)$.

4.2. $|\vec{a}| = 1$, $\left|\vec{b}\right| = 2$, $\left(\widehat{\mathrm{a}, \mathrm{b}}\right) = \dfrac{\pi}{4}$. Вычислить: а) $\left(\vec{a} + 2\vec{b}, \vec{a} - \vec{b}\right)$; б) $\left|\left[\vec{a} + 2\vec{b}, \vec{a} - \vec{b}\right]\right|$.

5.2. Найти скалярное и векторное произведение векторов $\vec{a} = (0;1;1)$ и $\vec{b} = (-1;2;4)$.

6.2. Известно, что $\overrightarrow{AB} = 2\vec{e}_1 - 6\vec{e}_2$ и $\overrightarrow{AC} = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2$, где $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ – взаимно перпендикулярные орты. Определить углы треугольника ABC.

7.2. Даны векторы $\vec{a}_1 = (4;-2;-4)$, $\vec{a}_2 = (6;-3;2)$. Вычислить: д) $\text{пр}_{\vec{a}_1}\vec{a}_2$; е) $\text{пр}_{\vec{a}_2}\vec{a}_1$; ж) направляющие косинусы вектора $\vec{a}_1$; з) $\text{пр}_{\vec{a}_1+\vec{a}_2}(\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2)$.

8.2. Даны вершины четырехугольника $A(1;-2;2)$, $B(1;4;0)$, $C(-4,1,1)$, $D(-5;-5;3)$. Доказать, что диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны.

9.2. $|\vec{a}| = \left|\vec{b}\right| = 5$, $\left(\widehat{\mathrm{a}, \mathrm{b}}\right) = \dfrac{\pi}{4}$. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a} - 2\vec{b}$ и $3\vec{a} + 2\vec{b}$.

10.2. Вычислить синус угла, образованного векторами $\vec{a} = (-2;2;1)$, $\vec{b} = (6;3;2)$.

11.2. Вектор $\vec{x}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}_1 = (2;3;1)$, $\vec{a}_2 = (1;-2;3)$ и $\left(\vec{x}, 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right) = -6$. Найти $\vec{x}$.

12.2. Доказать тождество $\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)\left(\vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c}\right)\left(4\vec{a} + \vec{b} + 5\vec{c}\right) = 0$.

13.2. Проверить, компланарны ли векторы $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$.

14.2. Упростить выражение $\left[\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \vec{c}\right] + \left[\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \vec{b}\right] + \left[\vec{b} - \vec{c}, \vec{a}\right]$.

15.2. Вычислить: а) $\left|\left(\left(\vec{a} + \vec{b},\ 2\vec{a} + 2\vec{b}\right) \bullet \left(3\vec{a} + 3\vec{b},\ 4\vec{a} + 4\vec{b}\right)\right)\right|$; б) $\left|\left[\left[\vec{a} + \vec{b}, 2\vec{a} + 2\vec{b}\right], \left[3\vec{a} + 3\vec{b}, 4\vec{a} + 4\vec{b}\right]\right]\right|$.

16.2. Даны вершины четырехугольника $A(2;3;2)$, $B(1;3;2)$, $C(-4;3;5)$, $D(3;-2;6)$. Доказать, что его диагонали взаимно перпендикулярны и найти угол при вершине A.

17.2. Найти координаты вектора $\vec{x}$, если он перпендикулярен векторам $\vec{a}_1 = (2;-3;1)$ и $\vec{a}_2 = (1;-2;3)$, а также удовлетворяет условию $\vec{x}(\vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}) = 10$.

Вариант 3

1.3. Вне плоскости параллелограмма $ABCD$ взята точка O. В базисе из ребер $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ найти координаты вектора $\overrightarrow{OM}$, где M – точка пересечения диагоналей параллелограмма.

2.3. Отрезок с концами в точках $A(3;-2)$, $B(6;4)$ разделен на три равные части. Найти координаты точек деления.

3.3. Найти единичный вектор $\vec{a}$, параллельный вектору $\vec{b}=(6;7;-6)$.

4.3. $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=3$, $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\dfrac{\pi}{6}$. Вычислить: а) $\left(\vec{a}+\vec{b},3\vec{a}-\vec{b}\right)$; б) $\left|\left[\vec{a}+\vec{b},3\vec{a}-\vec{b}\right]\right|$.

5.3. Найти скалярное и векторное произведение векторов $\vec{a}=(1;0;-1)$ и $\vec{b}=(2;2;2)$.

6.3. Найти угол, образованный единичными векторами $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, если известно, что векторы $\vec{a}=\vec{e}_1+2\vec{e}_2$ и $\vec{b}=5\vec{e}_1-4\vec{e}_2$ перпендикулярны.

7.3. Найти длины сторон и величины углов треугольника с вершинами $A(-1;-2;4)$, $B(-4;-2;0)$, $C(3,-2,1)$.

8.3. Из вершины квадрата проведены прямые, делящие противоположные стороны пополам. Найти угол между этими прямыми.

9.3. Заданы векторы $\vec{a}_1=(3;-1;2)$, $\vec{a}_2=(1;2;-1)$. Найти: а) $[\vec{a}_1,\vec{a}_2]$; б) $[2\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{a}_2]$; в) $[2\vec{a}_1-\vec{a}_2,2\vec{a}_1+\vec{a}_2]$.

10.3. Проверить, имеют ли место тождества:

а) $\left[\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b}\right]=[\vec{a},\vec{a}]-\left[\vec{b},\vec{b}\right]$; б) $\left[\vec{a}\pm\vec{b},\vec{a}\pm\vec{b}\right]=[\vec{a},\vec{a}]\pm 2\left[\vec{a},\vec{b}\right]+\left[\vec{b},\vec{b}\right]$; в) $\left[\vec{a},\vec{b}\right]^2=\vec{a}^2\vec{b}^2$.

11.3. Заданы векторы $\vec{a}_1=(1;-1;3)$, $\vec{a}_2=(-2;2;1)$, $\vec{a}_3=(3;-2;5)$. Вычислить $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3$.

Какова ориентация троек:

а) $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$; б) $\vec{a}_2$, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_3$; в) $\vec{a}_1$, $\vec{a}_3$, $\vec{a}_2$?

12.3. Вычислить объем тетраэдра $OABC$, если $\overrightarrow{OA}=3\vec{i}+4\vec{j}$, $\overrightarrow{OB}=-3\vec{j}+\vec{k}$, $\overrightarrow{OC}=2\vec{j}+5\vec{k}$.

13.3. При каком значении λ векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ будут компланарны: $\vec{a}=(\lambda;3;1)$, $\vec{b}=(5;-1;2)$, $\vec{c}=(-1;5;4)$?

14.3. Упростить выражение $\left[2\vec{a}+\vec{b},\ \vec{c}-\vec{a}\right]+\left[\vec{b}+\vec{c},\ \vec{a}+\vec{b}\right]$.

15.3. Даны векторы $\vec{a}=(2;-3;1)$, $\vec{b}=(-3;1;2)$, $\vec{c}=(1;2;3)$. Вычислить $\left[\left[\vec{a},\ \vec{b}\right],\ \vec{c}\right]$ и $\left[\vec{a},\left[\vec{b},\ \vec{c}\right]\right]$.

16.3. Показать, что четырехугольник с вершинами $A(1;2;2), B(3;5;8)$, $C(-3;2;6)$, $D(-5;-1;0)$ - ромб. Найти косинус острого угла при вершине ромба.

17.3. Найти длину и направляющие косинусы вектора $\vec{d}=\dfrac{[\vec{a},\overrightarrow{AB}]}{(\vec{a},\overrightarrow{AB})}$;

$\vec{a}=(2;-1;3)$; $A(2;0;-1)$; $B(1;3;0)$.

Вариант 4

1.4. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Принимая за начало координат вершину A, а за базисные векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$, найти координаты:
а) вершин C, B_1, C_1;
б) точек K и L – середин ребер A_1B_1 и CC_1 соответственно.

2.4. Определить координаты точки M, если ее радиус-вектор составляет с координатными осями одинаковые углы и его модуль равен 3.

3.4. Даны векторы $\vec{a}=(2;0;1)$, $\vec{b}=(-1;1;0)$, $\vec{c}=(0;1;-3)$. Вычислить направляющие косинусы вектора $\vec{a}+2\vec{b}$.

4.4. $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$, $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\dfrac{\pi}{3}$. Вычислить: а) $(\vec{a}-2\vec{b},\vec{a}+3\vec{b})$; б) $\left|\left[\vec{a}-2\vec{b},\vec{a}+3\vec{b}\right]\right|$.

5.4. Найти скалярное и векторное произведение векторов $\vec{a}=(4;7;3)$ и $\vec{b}=(0;1;1)$.

6.4. $|\vec{a}_1|=3$, $|\vec{a}_2|=4$, $\left(\widehat{\vec{a}_1,\vec{a}_2}\right)=\dfrac{2\pi}{3}$. Вычислить $(\vec{a}_1+\vec{a}_2)^2$.

7.4. Показать, что четырехугольник $ABCD$ – ромб, если $A(1;2;2)$, $B(3;5;8)$, $C(-3,2,6)$, $D(-5;-1;0)$. Найти угол при вершине ромба.

8.4. Параллелограмм $OBCA$ построен на векторах $\overrightarrow{OA}=\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$, $\overrightarrow{OB}=2\vec{i}-6\vec{j}+4\vec{k}$. Точка M – середина стороны AC. Найти угол между OM и диагональю OC.

9.4. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(1;1;1)$, $B(2;3;4)$, $C(4;3;2)$.

10.4. Убедиться, что векторы $\vec{a}=4\vec{i}+3\vec{j}$, $\vec{b}=5\vec{k}$ могут быть взяты за ребра куба. Найти третье ребро $\vec{c}$.

11.4. Установить, образуют ли векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ базис в пространстве всех векторов, если:
а) $\vec{a}_1=(2;3;-1)$, $\vec{a}_2=(1;-1;3)$, $\vec{a}_3=(1;9;-11)$;
б) $\vec{a}_1=(3;-2;1)$, $\vec{a}_2=(2;1;2)$, $\vec{a}_3=(3;-1;-2)$.

12.4. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках $A(1;1;2)$, $B(-1;1;3)$, $C(2;-2;4)$, $D(-1;0;2)$.

13.4. При каком значении λ векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ будут компланарны: $\vec{a}=(1;2\lambda;1)$, $\vec{b}=(1;\lambda;0)$, $\vec{c}=(0;\lambda;1)$?

14.4. Упростить выражение $2\vec{i}\left[\vec{j},\ \vec{k}\right]+3\vec{j}\left[\vec{i},\ \vec{k}\right]+4\vec{k}\left[\vec{i},\ \vec{j}\right]$.

15.4. Даны три вектора: $\vec{a}=(1;-1;1)$, $\vec{b}=(5;1;1)$, $\vec{c}=(0;3;-2)$. Вычислить $\vec{b}(\vec{a},\vec{c})-\vec{c}(\vec{a},\vec{b})$.

16.4. При каком значении x четырехугольник с вершинами $A(3;-1;2)$, $B(1;x;-1)$, $C(-1;1;-3)$, $D(3;-5;3)$ является трапецией?

17.4. Найти вектор $\vec{x}$, удовлетворяющий условиям $(\vec{x},\vec{i})=3$, $[\vec{x},\vec{i}]=-2\vec{j}+\vec{k}$.

Вариант 5

1.5. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Принимая за начало координат вершину A, а за базисные векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA_1}$, найти координаты:
а) точек M и N пересечения диагоналей граней $A_1B_1C_1D_1$ и ABB_1A_1;
б) точки O пересечения диагоналей параллелепипеда.

2.5. $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. Найти направляющие косинусы вектора $\vec{a} - 2\vec{b}$.

3.5. Даны вершины треугольника $A(-1; 2; 3)$, $B(5; -3; 4)$, $C(2; 1; 6)$. Разложить векторы, совпадающие с его сторонами, по основным ортам $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

4.5. $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $\left(\vec{a} \,\hat{,}\, \vec{b}\right) = \dfrac{\pi}{6}$. Вычислить: а) $\left(\vec{a} + 7\vec{b}, \vec{a} + \vec{b}\right)$;
б) $\left|\left[\vec{a} + 7\vec{b}, \vec{a} + b\right]\right|$.

5.5. Найти скалярное и векторное произведение векторов $\vec{a} = (0; 1; 0)$ и $\vec{b} = (7; 11; 3)$.

6.5. Вычислить $\text{пр}_{\vec{a}+\vec{b}}\left(2\vec{a} - \vec{b}\right)$, если $|\vec{a}| = \left|\vec{b}\right| = 1$ и $\left(\vec{a} \,\hat{,}\, \vec{b}\right) = 120°$.

7.5. Доказать, что четырехугольник с вершинами $A(-3; 5; 6)$, $B(1; -5; 7)$, $C(8, -3, -1)$, $D(4; 7; -2)$ – квадрат.

8.5. Найти угол между биссектрисами координатных углов xOy и yOz.

9.5. Найти вектор $[\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}, [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB}]]$, если $A(2; 2; 3)$, $B(1; 0; 4)$, $C(2; 3; 5)$.

10.5. Вычислить площадь параллелограмма, диагоналями которого служат векторы $2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ и $4\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2$, где $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ – единичные векторы и $\left(\vec{e}_1 \,\hat{,}\, \vec{e}_2\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

11.5. Доказать, что $|\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3| \le |\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2| \cdot |\vec{a}_3|$. В каком случае имеет место знак равенства?

12.5. Даны точки $A(1; 0; 1)$, $B(4; x; 2)$, $C(3; 3; 5)$, $D(4; 1; 0)$. При каком значении x они лежат в одной плоскости?

13.5. Доказать, что четыре точки $A(1; 2; -1)$, $B(0; 1; 5)$, $C(-1; 2; 1)$, $D(2; 1; 3)$ лежат в одной плоскости.

14.5. Найти вектор $\left[\vec{a},\ \vec{a} + \vec{b}\right] + \left[\vec{a},\ \left[\vec{a},\ \vec{b}\right]\right]$, если $\vec{a} = (2; 1; -3)$, $\vec{b} = (1; -1; 1)$.

15.5. Даны три вектора: $\vec{a} = (1; -1; 1)$, $\vec{b} = (5; 1; 1)$, $\vec{c} = (0; 3; -2)$. Вычислить $|\vec{a}|^2 + |\vec{c}|^2 + \left(\vec{a}, \vec{b}\right)\left(\vec{b}, \vec{c}\right)$.

16.5. При каком значении x четырехугольник с вершинами $A(2;1;-4)$, $B(x;3;5)$, $C(7;2;3)$ и $D(8;0;-6)$ является параллелограммом?

17.5. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ и $\vec{b} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$, если $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ - единичные векторы и $(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = -\dfrac{1}{2}$.

Ответы к задачам для самостоятельной работы

Ответы к варианту 1

1.1. $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

2.1. $\cos\alpha = \frac{12}{25}$, $\cos\beta = -\frac{15}{25}$, $\cos\gamma = -\frac{16}{25}$.

3.1. $C(6; -2)$, $D(2; -4)$.

4.1.а) -23. б) $24\sqrt{3}$.

5.1.9 и $(1; 1; -1)$.

6.1.15; $\sqrt{593}$.

7.1.а) 22; б) -200; в) 41; г) $\sqrt{105}$;

10.1. Да.

11.1. 24.

13.1. Да.

14.1. $2(\vec{k} - \vec{i})$.

16.1. $x = 1$.

17.1. 5.

Ответы в варианту 2

1.2. $\left(\frac{7}{10}; \frac{3}{20}; \frac{3}{20}\right)$.

2.2. $\left(\frac{2}{7}; \frac{3}{7}; \frac{6}{7}\right)$.

3.2. $A(-6; -2)$, $B(2; 8)$, $C(10; -6)$.

4.2. а) $-7 + \sqrt{2}$. б) $3\sqrt{2}$.

5.2. 6 и $(2; -1; 1)$.

6.2. $\angle A = \frac{\pi}{2}$; $\angle B = \arccos\frac{2}{\sqrt{5}}$; $\angle C = \arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$.

7.2. д) $\frac{11}{3}$; е) $\frac{22}{7}$; ж) $\cos\alpha = \frac{2}{3}$, $\cos\beta = -\frac{1}{3}$, $\cos\gamma = -\frac{2}{3}$; з) $-\frac{84}{\sqrt{129}}$.

9.2. $50\sqrt{2}$.

10.2. $\frac{5\sqrt{17}}{21}$.

11.2. $\vec{x} = (-3; 3; 3)$.

13.2. Нет.

14.2. $2[\vec{a}, \vec{c}]$.

15.2. а) $24(\vec{a} + \vec{b})^4$; б) 0.

16.2. $\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{42}}\right)$.

17.2. $(7,5,1)$.

Ответы к варианту 3

1.3. $\left(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right)$.

2.3. $(4; 0)$ и $(5; 2)$.

3.3. $\vec{a}=\left(\frac{6}{11}; \frac{7}{11}; -\frac{6}{11}\right)$ или $\vec{a}=\left(-\frac{6}{11}; -\frac{7}{11}; \frac{6}{11}\right)$.

4.3. а) $66+15\sqrt{3}$. б) 30.

5.3. 0 и $(2; -4; 2)$.

6.3. $\left(\vec{e}_1 \,\hat{,}\, \vec{e}_2\right)=\frac{\pi}{3}$.

7.3. $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=5$, $\left|\overrightarrow{BC}\right|=5\sqrt{2}$; $\angle A=\frac{\pi}{2}$, $\angle B=\angle C=\frac{\pi}{4}$.

8.3. $\cos\alpha=0{,}8$.

9.3. а) $(-3; 5; 7)$; б) $(-6; 10; 14)$; в) $(-12; 20; 28)$.

10.3. а). Нет. б). Нет. в). При $\vec{a}\perp\vec{b}$.

11.3. а) Левая; б) правая; в) правая.

12.3. $\frac{17}{2}$. 13.3. -3. 14.3. $[\vec{a}, \vec{c}]$.

15.3. $\left[\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \vec{c}\right]=(-7; 14; -7)$; $\left[\vec{a}, \left[\vec{b}, \vec{c}\right]\right]=(10; 13; 19)$.

16.3. $\frac{33}{49}$. 17.3. $\frac{5}{2}\sqrt{6}; \cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{6}}; \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{6}}; \cos\gamma=-\frac{1}{\sqrt{6}}$

Ответы к варианту 4

1.4. а) $C(1; 1; 0)$, $B_1(1; 0; 1)$, $C_1(1; 1; 1)$. б) $K\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right)$, $L\left(1; 1; \frac{1}{2}\right)$.

2.4. $\left(\sqrt{3}; \sqrt{3}; \sqrt{3}\right)$ или $\left(-\sqrt{3}; -\sqrt{3}; -\sqrt{3}\right)$.

3.4. $\cos\alpha=0°$, $\cos\beta=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

4.4. а) -1. б) $5\sqrt{3}$.

5.4. 10 и $(4; -4; 4)$.

6.4. 13.

7.4. $\arccos\left(-\frac{33}{49}\right)$.

8.4. $\cos\alpha=\frac{29}{3\sqrt{94}}$.

9.4. $2\sqrt{6}$.

10.4. $(3; -4; 0)$.

11.4. а) нет; б) да.

12.4. $\frac{11}{6}$.

13.4. При любом λ.

14.4. 3.

15.4. $(-25; -20; 5)$.

16.4. $x=2$.

17.4. (3;-1;-2).

Ответы к варианту 5

1.5. а) $M\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};1\right)$, $N\left(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right)$. б) $O\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

2.5. $\left(0;\frac{1}{\sqrt{5}};\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

3.5. $\overrightarrow{AB}=6\vec{i}-5\vec{j}+\vec{k}$; $\overrightarrow{BC}=-3\vec{i}+4\vec{j}+2\vec{k}$; $\overrightarrow{CA}=-3\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$.

4.5. а) $29+8\sqrt{3}$. б) 6.

5.5. 11 и $(3;0;-7)$.

6.5. $\frac{1}{2}$.

8.5. 60°.

9.5. $(5;16;7)$.

10.5. $\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

11.5. $\vec{a}_1\perp\vec{a}_2$, $\vec{a}_1\perp\vec{a}_3$, $\vec{a}_2\perp\vec{a}_3$.

12.5. 2.

14.5. $(-20;7;-11)$.

15.5. 21.

16.5. $x=1$.

17.5. $\frac{7}{2}\sqrt{3}$.

Тесты

1. Вектором называется а) число, отличное от нуля; б) направленный отрезок; в) ранг матрицы; г) определитель $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$; д) число 0.

Ответ:

2. Скалярное произведение векторов $\vec{a}=(1;2;3)$ и $\vec{b}=(3;0;2)$ есть а) $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; в) 9; г) $\vec{6}$; д) не определено.

Ответ:

3. Векторное произведение векторов $\vec{a}=(1,1,1)$ и $\vec{b}=(0,4,0)$ равно а) 4; б) $1\cdot 0+1\cdot 4+1\cdot 0$; в) $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$; д) (1,5,1).

Ответ:

4. $(\vec{a},\vec{b})=$

а) $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$; б) $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})$; в) $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})$; г) $a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$; д) $\vec{a}^2+\vec{b}^2$.

Ответ: $\boxed{}$

5. $|[\vec{a},\vec{b}]|=$

а) $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$; б) $|a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z|$; в) $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})$; г) $\vec{0}$; д) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$.

Ответ: $\boxed{}$

6. Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ равен

а) $(\vec{a},\vec{b})\vec{c}$; б) $[[\vec{a},\vec{b}],\vec{c}]$; в) $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$; г) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$; д) $[\vec{a}+\vec{b},\vec{c}]$; е) нулю; ж) не определен; з) 3.

Ответ: $\boxed{}$

7. Единичный вектор направления (1,2,2) равен

а) (4,0,0); б) (1,0,0); в) $\vec{\imath}$; г) $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$; е) $\left(\frac{1}{\sqrt{5}};\frac{2}{\sqrt{5}};\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$;

ж) не существует; з) 5; и) $1+2^2+2^2$.

Ответ: $\boxed{}$

8. Базисом на плоскости является

а) два любые вектора этой плоскости;

б) два неколлинеарных вектора; в) три любые вектора;

г) два неколлинеарных вектора этой плоскости;

д) прямоугольная таблица чисел размерности 2х2.

Ответ: $\boxed{}$

9. Если три вектора $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарны, их смешанное произведение равно

а) $a_x b_x a_z + a_y b_y b_z + c_x c_y c_z$; б) 0; в) $\vec{0}$; г) $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$; д) $[[\vec{a},\vec{b}],\vec{c}]$.

Ответ: $\boxed{}$

10. $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} =$

а) $\vec{a}+\vec{b}$; б) $(\vec{a},\vec{b})$; в) $[\vec{a},\vec{b}]$; г) $|[\vec{a},\vec{b}]|$; д) $\sqrt{\vec{a}^2+\vec{b}^2}$.

Ответ: $\boxed{}$

11. $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} =$

а) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$; б) $[[\vec{a},\vec{b}],\vec{c}]$; в) $\vec{b}(\vec{a}\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\vec{b})$; г) 0; е) $\frac{\vec{a}+\vec{b}}{\vec{c}}$; ж) $\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}$;

Ответ: $\boxed{}$

12. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равна
а) векторному произведению векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
б) скалярному произведению $(\vec{a},\vec{b})$;
в) $|a||b|$; г) $\vec{a}+\vec{b}$;
д) модулю векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
Ответ: ☐

13. Модуль суммы векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ единичной длины и взаимно перпендикулярных равен:
а) 2; б) $\vec{0}$; в) $\sqrt{(\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+\vec{b})}$; г)0; д) $|[\vec{a},\vec{b}]|$; е) $\sqrt{2}$.
Ответ: ☐

14. $([\vec{i},j],\vec{k})=$

а) $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$; б) $\vec{1}$; в) 1; г) $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$; д) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Ответ: ☐

15. $(\vec{i},\vec{j})=$

а) $\vec{0}$; б) 0; в) $\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}$; г) 2; е) $\vec{1}$; ж) 1.

Ответ: ☐

16. $[\vec{j},\vec{k}]=$

а) $\vec{1}$; б) $\vec{i}$; в) $\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$; г) $\vec{0}$; д) $\vec{2}$.

Ответ: ☐

17. $[\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+2\vec{b}]=$
а) $\left|[\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+2\vec{b}]\right|$; б) $[\vec{a},\vec{b}]$; в) $a^2+3[a,b]+2\vec{b}^2$; г) $3[\vec{a},\vec{b}]$;
д) не существует.
Ответ: ☐

18. $(\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+2\vec{b})=$
а) $a^2+3(\vec{a}\vec{b})+2\vec{b}^2$; б) $3(\vec{a}\ \vec{b})$; в) $[\vec{a},\vec{b}]$; г) $\vec{a}^2+2\vec{b}^2$; д) $|[\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+2\vec{b}]|$.
Ответ: ☐

Правильные ответы

1. б).	2. в).	3. в).
4. в) и г).	5. в).	6. в).
7. г).	8. г).	9. б).
10. в).	11. ж).	12. д).
13. в) и е).	14. в).	15. б).
16. б) и в).	17. б).	18. а).

Библиографический список

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. М.: Наука, Гл. ред. физ-мат. лит., 1988. 224 с.

2. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике. М.: Высшая школа, 1994.

3. Сборник задач по математике для ВТУЗов / Под ред. Ефимова А.В., Демидовича Б.П. Ч.1. М.: Наука, 1996.

4. Беклемешева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. М.: Наука, 1987.

5. Клетенник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. М.: 1986.

6. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. М.: Наука, 1970.

7. Воронцова М.А. Прямая линия на плоскости. Свердловск: УПИ, 1965.

8. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Буркова Л.М., Медведева Н.С., Пишулина И.Я. Свердловск: УПИ, 1984.

9. Бахвалов С.В., Моденов П.С., Порхоменко А.С. Сборник задач по аналитической геометрии. М.: Наука, 1964.

10. Задачи системы АПРОЗ / Под ред. Жидковой Н.П., Чистяковой О.А. Екатеринбург: ВЦ УПИ, 1995.

11. Элементы аналитической геометрии и линейной алгебры. Часть 1,2. / Под ред. Машрова С.И. Екатеринбург: УГТУ, 1997.

12. Математика. Ч. 3: Векторная алгебра. Тригонометрия. / А.Ф. Рыбалко, Б.А. Менькова, Н.М. Рыбалко. Екатеринбург: ООО “Издательство УМЦ ЦПИ”, 1999, 110с.

13. Геометрия 9, 10 класс / Под ред. Скопеца З.А. М.: Просвещение, 1975, 1976.

Приложение 1. Система аксиом геометрии Г. Вейля

I группа. Аксиомы сложения векторов.

Каждым двум векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ однозначно сопоставляется вектор, называемый их суммой и обозначаемый $\vec{a}+\vec{b}$.

1.1. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ - для любых трех векторов.

1.2. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ - для любых двух векторов.

1.3. Существует такой вектор $\vec{0}$ (нулевой вектор), что $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ для любого вектора $\vec{a}$.

1.4. Для любого вектора $\vec{a}$ существует такой вектор $\vec{b}$, что $\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$, $\vec{b}$ - вектор, противоположный $\vec{a}$, его обозначают $-\vec{a}$.

II группа. Аксиомы умножения вектора на число.

Каждому вектору $\vec{a}$ и каждому действительному числу k однозначно сопоставляется вектор, называемый произведением вектора $\vec{a}$ на число k и обозначаемый $k\vec{a}$.

2.1. $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$ - для любого вектора $\vec{a}$.

2.2. $k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}$ - для любого вектора $\vec{a}$ и для любых действительных чисел k и l.

2.3. $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$ - для любого вектора $\vec{a}$ и для любых действительных чисел k и l.

2.4. $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$ - для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и для любого действительного числа k.

III группа. Аксиомы скалярного умножения.

Каждым двум векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сопоставляется некоторое действительное число, называемое их скалярным произведением и обозначаемое $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

3.1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ - для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

3.2. $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}$ - для любых трех векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

3.3. $(k\vec{a})\vec{b}=k(\vec{a}\vec{b})$ - для любых двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и для любого действительного числа k.

3.4. $(\vec{a}\cdot\vec{a})>0$ - для любого вектора $\vec{a}\neq 0$.

IV группа. Аксиомы размерности.

4.1. Существуют три вектора $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ таких, что равенство $k\vec{a}+l\vec{b}+m\vec{c}=\vec{0}$ выполняется только тогда, когда $k=l=m=0$.

4.2. Для любых четырех векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ выполняется равенство $k\vec{a}+l\vec{b}+m\vec{c}+n\vec{d}=\vec{0}$ при неравных одновременно нулю k,l,m,n.

V группа. Аксиомы откладывания векторов.

Задано непустое множество (пространство), элементы которого называются точками. Каждой паре точек A,B однозначно сопоставляется некоторый вектор, обозначаемый $\overrightarrow{AB}$.

5.1. Для любой точки A и любого вектора $\vec{a}$ найдется такая точка B, что $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$.

5.2. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ - для любых точек A, B и C.

5.3. Если $\overrightarrow{AB}=\vec{0}$, то точки A и B совпадают.

Приложение 2. Основные формулы и обозначения

$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ - вектор, $|\vec{a}|$ - длина вектора.

Линейные операции над векторами

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;

2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$;

3) существует $\vec{0}$ такой что $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ для любого вектора $\vec{a}$;

4) существует $\vec{a}'$ такой что $\vec{a} + \vec{a}' = \vec{0}$;

5) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$;

6) $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$;

7) $\alpha(\beta \cdot \vec{a}) = (\alpha \cdot \beta)\vec{a}$;

8) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ (существование единицы).

Разложение вектора по базису

$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = (\alpha, \beta, \gamma)$ - разложение вектора по базису в трехмерном пространстве.

В декартовой системе координат заданы точки $A(A_x, A_y, A_z)$, $B(B_x, B_y, B_z)$.

$\vec{d} = \overrightarrow{AB} = \{B_x - A_x, B_y - A_y, B_z - A_z\} = d_x\vec{i} + d_y\vec{j} + d_z\vec{k}$, где

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - базисные векторы декартового прямоугольного базиса.

$$\left[\begin{array}{l} d_x = |\vec{d}|\cos\alpha, \\ d_y = |\vec{d}|\cos\beta, \\ d_z = |\vec{d}|\cos\gamma \end{array}\right.$$ -декартовые прямоугольные координаты вектора $\vec{d}$.

$\vec{e}_d = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \left(\frac{dx}{|d|}, \frac{dy}{|d|}, \frac{dz}{|d|}\right)$ - вектор единичной длины данного направления.

Справедливо $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Скалярное произведение векторов

$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi$, где $\varphi = \left(\vec{a} \,\hat{,}\, \vec{b}\right)$.

Алгебраические свойства скалярного произведения

1) $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$;

2) $((\alpha\vec{a}), \vec{b}) = \alpha(\vec{a}, \vec{b})$;

3) $((\vec{a} + \vec{b}), \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c})$;

4) $(\vec{a}, \vec{a}) > 0$, если $\vec{a}$ - ненулевой вектор и

$(\vec{a}, \vec{a}) = 0$, если $\vec{a}$ - нулевой вектор.

Выражение скалярного произведения в декартовых координатах

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Геометрические приложения скалярного произведения

1) Длина вектора $|\vec{a}|$

$|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a},\vec{a})} = \langle \text{в декартовой системе координат} \rangle = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

2) Косинус угла между векторами

$$cos(\vec{a},\hat{\ }\vec{b}) = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} =$$

$$cos(\vec{a},\hat{\ }\vec{b}) = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} =$$

$$\langle \textit{в декартовой системе координат} \rangle = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

3) Проекция вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$

$$np_{\vec{b}}\,\vec{a} = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{b}|} = \langle \text{в декартовой системе координат} \rangle = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

4) Необходимым и достаточным условием ортогональности (перпендикулярности) двух векторов является равенство нулю их скалярного произведения.

Векторное произведение векторов

$$\vec{c} = [\vec{a},\vec{b}]$$

1) Модуль $\vec{c} = |[\vec{a},\vec{b}]| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi$, где $\varphi = (\vec{a},\hat{\ }\vec{b})$;

2) Вектор $\vec{c}$ ортогонален каждому из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

3) Вектор $\vec{c}$ направлен так, что тройка векторов $\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}$ является правой.

Алгебраические свойства векторного произведения

1) $[\vec{a},\vec{b}] = -[\vec{b},\vec{a}]$;

2) $[\alpha\vec{a},\vec{b}] = \alpha[\vec{a},\vec{b}]$;

3) $[\vec{a}+\vec{b},\vec{c}] = [\vec{a},\vec{c}] + [\vec{b},\vec{c}]$;

4) $[\vec{a},\vec{a}] = \vec{0}$.

Выражение векторного произведения в декартовых координатах

$$[\vec{a},\vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Геометрические свойства векторного произведения

1) Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равна

$S_{пар} = \left|[\vec{a},\vec{b}]\right|.$

2) Необходимым и достаточным условием коллинеарности двух векторов является равенство нулю их векторного произведения.

Смешанное произведение векторов

$\left([\vec{a},\vec{b}],\vec{c}\right)$ - смешанное произведение трех векторов.

$\left([\vec{a},\vec{b}],\vec{c}\right) = \left(\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]\right) = \vec{a}\vec{b}\vec{c}.$

В декартовой системе координат

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Геометрический смысл смешанного произведения

Смешанное произведение векторов равно объему параллелепипеда, построенного на приведенных к общему началу векторах $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$, взятому со знаком плюс, если тройка $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ правая, и со знаком минус, если тройка $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ левая. Если же векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны, то $\left([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}\right)$ равно нулю.

Двойное векторное произведение векторов

$[\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a},\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a},\vec{b})$.

(эта формула носит жаргонное мнемоническое название “формула бац минус цаб”).

Учебное издание

Соболев Александр Борисович
Вигура Марина Александровна
Рыбалко Александр Федорович
Рыбалко Наталья Михайловна

III. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

УЧЕБНО – МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ДИСЦИПЛИНЫ
ЕН.Ф.01.”МАТЕМАТИКА”
ДЛЯ СТУДЕНТОВ ММФ, СТФ, МТФ

Редакторы

Подписано в печать 2005 Формат 60x84 1/16
Бумага писчая Плоская печать Усл.печ.л. 2,69
Уч.-изд.л. Тираж Заказ Цена “С”
Редакционно-издательский отдел ГОУ ВПО УГТУ–УПИ
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19

Ризография НИЧ УГТУ–УПИ
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19