Теория функций комплексного переменного

§1. Комплексные числа и действия над ними

1.1. Алгебраическая форма комплексного числа

Комплексными числами (в алгебраической форме) называются выражения вида

$$z = x + iy,$$

где i – символ, называемый мнимой единицей, x и y – произвольные действительные числа. $x = \operatorname{Re} z$ – называется действительной частью числа z, $y = \operatorname{Im} z$ – называется мнимой частью числа z.

Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$.

1. Два комплексных числа z_1 и z_2 называются равными

$$z_1 = z_2, \text{ если } x_1 = x_2 \text{ и } y_1 = y_2.$$

2. Суммой комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число

$$z_3 = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

3. Произведением комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число

$$z_3 = z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Умножение комплексных чисел производится по правилу умножения двучленов.

Из определения произведения комплексных чисел следует, что

$$i^2 = ii = (0 + 1i)(0 + 1i) = -1.$$

Комплексное число $\bar{z} = x - iy$ называется сопряжённым комплексному числу $z = x + iy$.

4. Операция деления комплексного числа z_1 на комплексное число z_2, если $z_2 \neq 0$, определяется как обратная к умножению, т.е.

$$z = \frac{z_1}{z_2}, \quad \text{если } z_1 = z z_2.$$

Из последнего равенства следует, что

$$\frac{z_1}{z_2} = z = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Заметим, что эту формулу удобнее записать в виде:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2}.$$

Пример 1. Пусть $z_1 = -2 + 3i$ и $z_2 = 4 + 5i$. Вычислить

$$z_1 + z_2, \qquad z_1 - z_2, \qquad z_1z_2, \qquad \frac{z_1}{z_2}.$$

Решение:

$$\begin{gathered}
z_1 + z_2 = (-2 + 4) + i(3 + 5) = 2 + 8i,\\
z_1 - z_2 = (-2 - 4) + i(3 - 5) = -6 - 2i,\\
z_1z_2 = (-2 + 3i)(4 + 5i) = -8 + 12i - 10i - 15 = -23 + 2i,\\
\frac{z_1}{z_2} = \frac{-2 + 3i}{4 + 5i} = \frac{(-2 + 3i)(4 - 5i)}{(4 + 5i)(4 - 5i)} = \frac{7 + 22i}{41} = \frac{7}{41} + i\frac{22}{41}.
\end{gathered}$$

Пример 2. Доказать равенство $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z$.
Решение: Пусть $z = x + iy$, тогда

$$\operatorname{Re} z = x, \quad \bar{z} = x - iy.$$

Поэтому

$$z + \bar{z} = x + iy + x - iy = 2x = 2\operatorname{Re} z.$$

1.2. Комплексная плоскость

Комплексное число $z = x + iy$ изображается на плоскости XOY точкой M с координатами (x, y) либо вектором, начало которого находится в точке $O(0, 0)$, а конец в точке $M(x, y)$.

Плоскость, точки которой изображают комплексные числа, будем называть комплексной плоскостью.

Пример 3. Построить на комплексной плоскости точки, изображающие следующие комплексные числа: $z_1 = 3i, z_2 = -4i, z_3 = 5, z_4 = 1 + 2i, z_5 = -2 + 3i, z_6 = -1 - i, z_7 = 2 - 4i$.

Решение:

Операции сложения и вычитания комплексных чисел удобнее производить в алгебраической форме. Геометрически сложение и вычитание чисел z_1 и z_2 производится по правилу сложения и вычитания векторов

Отсюда следует, что $|z_1 - z_2|$ равен расстоянию между точками z_1 и z_2, а уравнение $|z - z_0| = R$ задаёт окружность радиуса R с центром в точке z_0.

Пример 4. Дать геометрическое описание множества точек комплексной плоскости, удовлетворяющих следующим неравенствам:

$$
\begin{aligned}
&1)\ \ |\operatorname{Im} z| < 1,\ 0 < \operatorname{Re} z < 1;\\
&2)\ \ |z - 1 - 2i| < 2;\\
&3)\ \ 1 < |z + 2 + i| < 3;\\
&4)\ \ |z - i| > 1.
\end{aligned}
$$

Решение:

1) прямоугольник с вершинами в точках $-i, 1 - i, 1 + i, i$ (стороны не включаются);

2) круг радиусом 2 с центром в точке $z = 1 + 2i$ (окружность не включается);

3) кольцо между окружностями радиусов 1 и 3 с общим центром в точке $z = -2 - i$ (окружности не включаются);

4) вся плоскость, из которой удалён круг радиуса 1 с центром в точке $z = i$ вместе с его окружностью.

1.3. Тригонометрическая форма комплексного числа

Длина вектора z называется модулем комплексного числа $z = x + iy$ и обозначается $|z|$:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}.$$

Угол φ между положительным направлением оси OX и вектором z называется аргументом z и обозначается $\varphi = \operatorname{Arg} z$. Он определён не однозначно, а с точностью до слагаемого, кратного 2π. Единственное значение аргумента, удовлетворяющее условию $-\pi < \varphi \leqslant \pi$, называется главным значением аргумента и обозначается $\arg z$:

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Для $z = 0$ понятие аргумента не определено.

Главное значение аргумента определяется формулой:

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & \text{если} \quad x > 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi, & \text{если} \quad x < 0, y \geqslant 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi, & \text{если} \quad x < 0, y < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{если} \quad x = 0, y > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{если} \quad x = 0, y < 0. \end{cases}$$

Пользуясь этими понятиями, комплексное число можно записать в тригонометрической форме:

$$z = |z|(\cos(\operatorname{Arg} z) + i\sin(\operatorname{Arg} z)).$$

Пример 5. Записать число $z = -8 - i8\sqrt{3}$ в тригонометрической форме.

Решение:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-8)^2 + (-8\sqrt{3})^2} = 16.$$

Так как

$$x = -8 < 0, \qquad y = -8\sqrt{3} < 0,$$

то

$$\arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi = \operatorname{arctg} \sqrt{3} - \pi = -\frac{2}{3}\pi.$$

Поэтому

$$z = |z|(\cos(\operatorname{Arg} z) + i\sin(\operatorname{Arg} z)) =$$
$$= 16(\cos(-\frac{2}{3}\pi + 2\pi k) + i\sin(-\frac{2}{3}\pi + 2\pi k)), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Операции умножения и деления приобретают наглядный геометрический смысл в тригонометрической форме, а именно:

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2) + i\sin(\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2))$$

и

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2) + i\sin(\operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2)).$$

Из правила умножения следует также, что

$$z^n = |z|^n(\cos(n\operatorname{Arg} z) + i\sin(n\operatorname{Arg} z)).$$

Операция извлечения корня степени n из комплексного числа определяется как обратная к операции возведения в степень, а именно, комплексное число z называется корнем степени n из числа w и обозначается $\sqrt[n]{w} = z$, если $z^n = w$. Корень n-й степени числа $w (w \neq 0)$ имеет n различных значений, которые находятся по формуле

$$z = \sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\left(\frac{\arg w + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\arg w + 2\pi k}{n}\right)\right),$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

где через $\sqrt[n]{|w|}$ обозначено арифметическое значение корня из положительного числа.

Пример 6. Найти все значения $\sqrt[4]{-8 - i8\sqrt{3}}$.

Решение: Воспользуемся тригонометрической формой комплексного числа $-8 - i8\sqrt{3}$, найденной в примере 5:

$$\sqrt[4]{-8 - i8\sqrt{3}} = \sqrt[4]{16\left(\cos\left(-\frac{2}{3}\pi + 2\pi k\right) + i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi + 2\pi k\right)\right)} =$$
$$= 2\left(\cos\left(\frac{-\frac{2}{3}\pi + 2\pi k}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\frac{2}{3}\pi + 2\pi k}{4}\right)\right) (k = 0, 1, 2, 3).$$

Положим последовательно $k = 0, 1, 2, 3$. Будем иметь:

$$z_1 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{3} - i,$$
$$z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 1 + i\sqrt{3},$$
$$z_3 = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = -\sqrt{3} + i,$$
$$z_4 = 2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = -1 - i\sqrt{3}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Построить на комплексной плоскости точки, соответствующие следующим комплексным числам:

1) $a)$ $z = 3$; $b)$ $z = -2$; $c)$ $z = -2i$; $d)$ $z = 3i$; $e)$ $z = 2 + i$; $f)$ $z = -2 + 3i$ $g)$ $z = -3 - 4i$; $k)$ $z = 3 - 2i$.

Найти $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 z_2$; $\dfrac{z_1}{z_2}$:

2) $z_1 = 3 - 2i$, $z_2 = 1 + i$.
3) $z_1 = 17 - i$, $z_2 = 2 - i$.
4) $z_1 = 5 - 3i$, $z_2 = 7 + 2i$.
5) $z_1 = 4 - 5i$, $z_2 = 1 - 3i$.

Выполнить указанные действия:

6) $(2 + 3i)(3 - 2i) + (2 - 3i)(3 + 2i)$.
7) $(5 - 2i)^2$.
8) $(1 + 2i)^2 - (1 - 2i)^2$.
9) $(3 + i)^3$.
10) $\dfrac{3 + i}{6 - 5i}$.
11) $\dfrac{3 - i}{4 + 5i}$.
12) $\dfrac{2 + 3i}{2 + i}$.
13) $\dfrac{(1 + i)(3 + i)}{3 - i} - \dfrac{(1 - i)(3 - i)}{3 + i}$.
14) $\dfrac{(1 + 2i)^2 - (1 - i)^3}{(3 + 2i)^3 - (2 + i)^2}$.

Найти действительные и мнимые части следующих комплексных чисел:

15) $\dfrac{1}{1 - i}$.

16) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3$.
17) $\left(\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$.
18) $\left(\dfrac{i^5+2}{i^{19}+1}\right)^2$.

Найти модули и аргументы следующих комплексных чисел:

19) i.
20) -3.
21) $1+i^{123}$.
22) $3i$.
23) $1+i$.
24) $\sqrt{3}-i$.
25) $-1-i\sqrt{3}$.
26) $1-i\sqrt{3}$.
27) $-i\sqrt{2}$.
28) $3+4i$.
29) $-3-4i$.
30) $-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
31) $\dfrac{1-i}{1+i}$.
32) $-\cos\dfrac{\pi}{7}+i\sin\dfrac{\pi}{7}$.
33) $(-4+3i)^3$.
34) $(1+i)^8(1-i\sqrt{3})^{-6}$.
35) $1+\cos\dfrac{\pi}{7}+i\sin\dfrac{\pi}{7}$.

Доказать равенства:

36) $z+\bar{z}=2\operatorname{Re}z$.
37) $z-\bar{z}=2i\operatorname{Im}z$.
38) $\operatorname{Re}z=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$.
39) $\operatorname{Im}z=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$.
40) $\overline{(\bar{z})}=z$.
41) $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$.
42) $\overline{z_1-z_2}=\bar{z}_1-\bar{z}_2$.
43) $\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$.

44) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.
45) $|\bar{z}| = |z|$.
46) $\bar{z}z = |z|^2$.

Дать геометрическое описание множества точек, удовлетворяющих неравенствам:

47) $\operatorname{Re} z > 0$.
48) $\operatorname{Im} z \leqslant 1$.
49) $|\operatorname{Re} z| < 1$.
50) $|\operatorname{Im} z| < 1,\ 0 < \operatorname{Re} z < 1$.
51) $|z| \leqslant 1$.
52) $|z - i| > 1$.
53) $0 < |z + i| < 2$.
54) $1 < |z - 1| < 3$.
55) $0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4}$.
56) $|\pi - \arg z| < \dfrac{\pi}{4}$.

Указать, какие линии определяются следующими уравнениями:

57) $\operatorname{Im} z^2 = 2$.
58) $\operatorname{Re} \bar{z}^2 = 1$.
59) $\operatorname{Im} \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{2}$.
60) $\operatorname{Re} \dfrac{1}{z} = 1$.
61) $z^2 + \bar{z}^2 = 1$.
62) $|z| = \operatorname{Re} z + 1$.

Найти все значения корней:

63) $\sqrt[3]{1}$.
64) $\sqrt[3]{i}$.
65) $\sqrt[4]{-i}$.
66) $\sqrt[4]{-4}$.
67) $\sqrt[6]{-27}$.
68) $\sqrt[3]{2 - 2i}$.
69) $\sqrt{1 + i}$.
70) $\sqrt{3 - 4i}$.
71) $\sqrt{-3 - 4i}$.
72) $\sqrt{2 + i2\sqrt{3}}$.

Вычислить:

73) $(1 + i)^8(1 - i\sqrt{3})^6$.

74) $(1-i)^7(1+i\sqrt{3})^3$.

75) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^8$.

76) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{20}$.

Найти решения следующих уравнений:

77) $z^2 = i$.

78) $z^2 = 3-4i$.

79) $z^3 = -1$.

80) $z^6 = 64$.

81) $z^7 + 1 = 0$.

82) $z^8 = 1+i$.

83) $z^2 - 2z + 2 = 0$.

84) $z^3 + 6z^2 + 12z + 10 - 2i = 0$.

85) $z^2 - (2+3i)z + 6i = 0$.

86) $z^2 + (3-4i)z - 12i = 0$.

87) $z^6 + 4z^3 + 8 = 0$.

§2. Последовательности и ряды комплексных чисел

2.1. Последовательности комплексных чисел

Пусть $\{z_n\}$ последовательность комплексных чисел.

Число $A = a+ib$ называется пределом последовательности $\{z_n\}$ и обозначается

$$A = \lim_{n\to\infty} z_n,$$

если для любого $\varepsilon > 0$ существует $N(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|z_n - A| < \varepsilon$.

Пусть

$$z_n = x_n + iy_n,\ \xi_n = \eta_n + i\zeta_n,\ A = a+ib,\ B = c+id.$$

Справедливы следующие свойства:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A \Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$;

2) пусть $z_n \neq 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$, тогда

a) $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = |A|$, б) если $A \neq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Arg} z_n = \operatorname{Arg} A$, что следует понимать так: можно выбрать значения $\operatorname{Arg} z_n$, которые будут иметь предел, равный одному из значений $\operatorname{Arg} A$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A \neq \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = B \neq \infty$

а) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n + \xi_n = A + B$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n \xi_n = AB$;

4) пусть $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A \neq \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = B \neq 0$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{z_n}{\xi_n} = \dfrac{A}{B}$.

Последовательность z_n называется сходящейся к ∞, пишут

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty,$$

если для любого > 0 существует $N(M) > 0$ такое, что для любого $n > N(M)$ выполняется неравенство $|z_n| > M$.

Справедливы следующие свойства:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty \Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = +\infty$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty \Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{z_n} = 0$.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[n]{z} - 1)n$, если

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

где k целое фиксированное число.

Решение: Вычислим пределы действительной и мнимой частей числа $(\sqrt[n]{z}-1)n$:

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{Re}(\sqrt[n]{z}-1)n=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{r}\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}-1\right)n=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{r}\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}-\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}-1\right)n=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{r}-1}{\dfrac{1}{n}}\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}-\frac{1-\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}}{\dfrac{1}{n}}\right)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{r}-1}{\dfrac{1}{n}}\cdot\lim_{n\to\infty}\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}-\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}}{\dfrac{1}{n}}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{\ln r}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\ln r.$$

Здесь использованы следующие соотношения эквивалентности (при $\alpha\to 0$)

$$\sin\alpha\sim\alpha,\ 1-\cos\alpha\sim\frac{\alpha^2}{2},\ e^{\alpha}-1\sim\alpha.$$

Вычислим теперь предел мнимой части

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{Im}(\sqrt[n]{z}-1)n=\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt[n]{r}\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}}{\frac{1}{n}}=\varphi+2\pi k.$$

Итак,

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{z}-1)n=\ln r+i(\varphi+2\pi k).$$

2.2. Ряды комплексных чисел

Бесконечный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}z_n$ называется сходящимся, если существует конечный предел последовательности его частичных сумм $\{S_n\}$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}z_n,\qquad S=\lim_{n\to\infty}S_n.$$

Этот предел называется суммой ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}z_n=S.$$

Справедливы следующие свойства:

1. Необходимый признак сходимости ряда. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$.

2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$, где $z_n = x_n + iy_n$ сходится тогда и только тогда, когда одновременно сходятся ряды составленные отдельно из действительных и мнимых частей этого ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} y_n.$$

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n$.

Решение: Докажем, что не выполняется необходимый признак сходимости рядов. Для чего покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n \neq 0$.

$$\left|\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n\right| = \left|\frac{1+i}{1-i}\right|^n.$$

Найдём значение

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{2} = \frac{2i}{2} = i,$$

поэтому

$$\left|\frac{1+i}{1-i}\right|^n = |i|^n = 1,$$

отсюда видно, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n = 1 \neq 0.$$

Необходимый признак сходимости рядов не выполнен, поэтому ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n$$

расходится.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(1+i+ni)}{n(n+1)}.$$

Решение: Сходимость ряда из комплексных чисел эквивалентна одновременной сходимости рядов из действительных и мнимых частей. Поэтому рассмотрим отдельно два ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Оба ряда удовлетворяют признаку Лейбница и поэтому сходятся, а значит сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(1+i+ni)}{n(n+1)}$.

Пример 4. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/4}+i}.$$

Решение: Преобразуем выражение

$$\frac{1}{n^{3/4}+i} = \frac{n^{3/4}-i}{(n^{3/4}+i)(n^{3/4}-i)} = \frac{n^{3/4}-i}{n^{3/2}+1}.$$

Сходимость ряда из комплексных чисел эквивалентна одновременной сходимости рядов из действительных и мнимых частей. Поэтому рассмотрим отдельно два ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{3/4}}{n^{3/2}+1} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}+1}.$$

Так как $\frac{3}{2} > 1$, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}+1}$$

сходится.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{3/4}}{n^{3/2}+1}$$

и сравним его с расходящимся рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/4}}.$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/4}}{n^{3/2}+1} n^{3/4} = 1,$$

то по второму признаку сравнения ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{3/4}}{n^{3/2}+1} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/4}}$$

сходятся и расходятся одновременно.

Ряд из действительных частей расходится, а значит расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/4}+i}$.

2.3. Абсолютно сходящиеся ряды

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$.

Абсолютно сходящийся ряд сходится.

При исследовании рядов на абсолютную сходимость мы будем пользоваться известными признаками сходимости знакопостоянных рядов, в частности, признаками сравнения, признаком Даламбера и признаком Коши.

Пример 5. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(in)^n}{3^n n!}.$$

Решение: Исследуем ряд на абсолютную сходимость, т.е. исследуем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(in)^n}{3^n n!} \right|.$$

Так как

$$\left| \frac{(in)^n}{3^n n!} \right| = \frac{|(in)^n|}{3^n n!} = \frac{|in|^n}{3^n n!} = \frac{n^n}{3^n n!},$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(in)^n}{3^n n!} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n n!}.$$

Пусть $a_n = \dfrac{n^n}{3^n n!}$. Для доказательства сходимости последнего ряда воспользуемся признаком Даламбера

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{3^{(}n+1)(n+1)!} \frac{3^n n!}{n^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{3} = \frac{e}{3} < 1.$$

Откуда следует, что сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left| \dfrac{(in)^n}{3^n n!} \right|$, а значит сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(in)^n}{3^n n!}$.

Замечание. Из сходимости рядов не следует абсолютная сходимость.

Пример 6. Исследовать на абсолютную сходимость ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(1+i+ni)}{n(n+1)}.$$

Решение: Исследуем на сходимость ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}(1+i+ni)}{n(n+1)}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+(n+1)^2)^{\frac{1}{2}}}{n(n+1)}.$$
Для доказательства расходимости последнего воспользуемся первым признаком сравнения
$$\frac{1}{n}=\frac{n+1}{n(n+1)}<\frac{(1+(n+1)^2)^{\frac{1}{2}}}{n(n+1)}.$$
Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится, то расходится и ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+(n+1)^2)^{\frac{1}{2}}}{n(n+1)}.$$
Из расходимости последнего ряда следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(1+i+ni)}{n(n+1)}$ абсолютно не сходится. Однако, как видно из примера 3, он сходится условно.

Задачи для самостоятельного решения

Исходя из определения предела последовательности, доказать:

88) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}+i\frac{n-1}{n}\right)=1+i.$

89) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+ni}{1-ni}\right)=-1.$

90) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+i}{2}\right)^n=0.$

Вычислить пределы:

91) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n+1}+i\frac{n}{n+1}\right).$

92) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+i)^2}{2n^2i}.$

93) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{1}{n}\right).$

94) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{z^n}{1+z^{2n}},\ |z|<1.$

95) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{z^n}{1+z^{2n}}$, $|z|>1$.

Выяснить, при каких z существуют пределы:

96) $\lim\limits_{n\to\infty} z^n$.

97) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{z^n}{n}$.

98) $\lim\limits_{n\to\infty} nz^n$.

99) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{z^n}{1+z^n}$.

Доказать равенство:

100) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n = e^x(\cos y + i\sin y)$, где $z = x+iy$. Указание. Найти пределы последовательностей модулей и аргументов.

Доказать, что:

101) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{z_n} = 0$.

Исследовать сходимость следующих рядов:

102) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{in+1}{n+2i}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

103) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2i}{n}\right)^n$.

104) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(1+i)^n}{(n+i)^2}$.

105) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{i^n}{n}$.

106) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n-1)!}{(n!)^2}\cdot\dfrac{(1+i)^n}{8^n+(1+i)^n}$.

107) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n}(1-i)^n$.

108) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{(n+i)\ln^2 n}$.

109) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}+i}$.

110) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{i^n}{\ln n}$.

111) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(1+2i)^n}{2^n n}$.

112) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(1+i)^n n}{2^n}$.

113) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n-1}{7n+3}\right)^n \cdot (3+4i)^n$.

114) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos in}{2^n}$.

115) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n \sin in}{3^n}$.

116) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{i2n}}{n\sqrt{n}}$.

117) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{sh} i\sqrt{n}}{\sin in}$.

118) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln(-1)}{\operatorname{sh} in}$.

119) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2+i^n)^n}{2^n}$.

Доказать абсолютную сходимость следующих рядов:

120) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3 z^n,\ |z| < 1$.

121) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n} z^n,\ |z| < e$.

122) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n-1)!}{(n!)^2} \cdot \dfrac{z^n}{1+z^n},\ |z| \leqslant \dfrac{1}{4}$.

123) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{(n+4i)\ln^2 n}$.

§3. Функции комплексного переменного

Если каждой точке $z = x + iy$ некоторого множества E поставленно в соответствие одно или несколько комплексных чисел $w = u + iv$, то говорят, что на множестве E определена функция (однозначная или многозначная) комплексного переменного $w = f(z)$.

Функцию $f(z)$ можно рассматривать как пару функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$.

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy),\ v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy).$$

Введём некоторые элементарные функции комплексного переменного.

3.1. Показательная функция

Показательную функцию комплексного переменного

$$w = e^z$$

определим равенством

$$e^z = e^{(x+iy)} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

Справедлива следующая формула Эйлера

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y.$$

Используя тождество Эйлера, получаем показательную форму для представления любого комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ в виде:

$$z = re^{i\varphi}.$$

Функция $w = e^z$ определена на всей комплексной плоскости и на действительной оси совпадает с соответствующей функцией действительного переменного.

Укажем некоторые свойства показательной функции:

1) $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$;
2) $e^z \neq 0$, так как $|e^z| = e^x > 0$;
3) e^z периодическая с периодом $T = 2\pi i$, т.е. $e^{z+2\pi i} = e^z$.

Пример 1. Записать в показательной форме число $z = \sqrt{3} + i$.

Решение: Представим число в тригонометрической форме

$$|z| = \sqrt{3+1} = 2,\ \arg z = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$

и

$$z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k\right)\right) = 2e^{i(\frac{\pi}{6}+2\pi k)}.$$

Пример 2. Найти модуль и главное значение аргумента комплексного числа $z = e^{3+5i}$.

Решение: Представим число z в тригонометрической форме

$$z = e^{3+5i} = e^3(\cos 5 + i\sin 5).$$

Отсюда видно, что

$$|z| = e^3,\ \arg z = 5.$$

Пример 3. Решить уравнение $e^z - i = 0$.

Решение: Запишем число i в показательной форме

$$i = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)\right) = e^{i(\frac{\pi}{2}+2\pi k)}.$$

Перепишем уравнение $e^z - i = 0$ в виде

$$e^z = e^{i(\frac{\pi}{2}+2\pi k)},\ \text{поэтому}\ z = i(\frac{\pi}{2} + 2\pi k),\ k \in \mathbb{Z}.$$

3.2. Логарифмическая функция

Логарифмическая функция
$$w = \operatorname{Ln} z,$$
где $z \neq 0$, определяется как функция обратная к показательной функции $z = e^w$, причём
$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z = \ln|z| + i \arg z + i2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$
Эта функция является многозначной. Её значение при $k = 0$ называется главным значением или главной ветвью логарифма и обозначается $\ln|z|$, т.е.
$$\ln z = \ln|z| + i \arg z \text{ и } \operatorname{Ln} z = \ln z + i2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$
Справедливы следующие свойства логарифмической функции:

1) $\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$,
2) $\operatorname{Ln} \dfrac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2$.

Пример 4. Вычислить $\operatorname{Ln}(5 + 3i)$.
Решение: Найдём модуль и аргумент числа $z = 5 + 3i$.
$$|z| = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}, \qquad \arg z = \operatorname{arctg} \frac{3}{5}.$$
Из представления функции $\operatorname{Ln} z$ имеем:
$$\operatorname{Ln}(5 + 3i) = \ln \sqrt{34} + i \left(\operatorname{arctg} \frac{3}{5} + 2\pi k \right),\ k \in \mathbb{Z}.$$

Пример 5. Показать, что $\operatorname{Ln} z - \operatorname{Ln} z \neq 0$.
Решение:
$$\operatorname{Ln} z - \operatorname{Ln} z = \operatorname{Ln} \frac{z}{z} = \operatorname{Ln} 1.$$
Найдём модуль и аргумент $z = 1$, а именно:
$$|z| = 1,\ \operatorname{Arg} z = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$
откуда получим равенство
$$\operatorname{Ln} z - \operatorname{Ln} z = \ln 1 + i2k\pi = i2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

3.3. Общая степенная функция

Общая степенная функция
$$w = z^a,$$
где $a = \alpha + i\beta$ -любое комплексное число, определяется равенством
$$z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}.$$
Это многозначная функция, главное значение которой равно $z^a = e^{a \ln z}$.

Заметим, что степень с произвольным показателем, вообще говоря, не подлежит правилу сложения показателей при умножении степеней, а также правилу умножения показателей при возведении степени в степень. Так
$$z^{a_1} z^{a_2} = e^{a_1 \operatorname{Ln} z} e^{a_2 \operatorname{Ln} z} = e^{a_1 \operatorname{Ln} z + a_2 \operatorname{Ln} z} \neq e^{(a_1+a_2) \operatorname{Ln} z} = z^{a_1+a_2}$$
и
$$(z^{a_1})^{a_2} = (e^{a_1 \operatorname{Ln} z})^{a_2} = e^{a_2(a_1(\operatorname{Ln} z + i2k\pi))} \neq e^{a_2 a_1 \operatorname{Ln} z}.$$

Пример 6. Найти образ линии а) $x = 1$, б) $|z| = 2$, в) $\arg z = \frac{\pi}{6}$ при отображении $w = z^2$.

Решение: а) Для решения задачи запишем w в декартовых координатах:
$$w = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy,\ \operatorname{Re} w = u = x^2 - y^2,\ \operatorname{Im} w = v = 2xy.$$
Пусть $x = 1$. Тогда $u = 1 - y^2$ и $v = 2y$. Исключая y из этих уравнений, будем иметь $u = 1 - \frac{v^2}{4}$. Таким образом, образ прямой $x = 1$ есть парабола $u = 1 - \frac{v^2}{4}$.

б) Пусть $|z| = 2$. Тогда $|w| = |z|^2 = 4$ и $\operatorname{Arg} w = 2 \operatorname{Arg} z$. Отсюда следует, что образом левой полуокружности $|z| = 2,\ -\frac{\pi}{2} < \arg z \leqslant \frac{\pi}{2}$ служит окружность $|w| = 4,\ -\pi < \arg w \leqslant \pi$.

Образом правой полуокружности $|z| = 2,\ -\pi < \arg z \leqslant -\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2} < \arg z \leqslant \pi$ служит та же самая окружность $|w| = 4,\ -\pi < \arg w \leqslant \pi$.

Получили, что образом окружности $|z| = 2$ служит окружность$|w| = 4$, которая пробегается два раза.

в) Пусть $\arg z = \frac{\pi}{6}$. Тогда $\operatorname{Arg} w = 2\arg z + 2\pi k = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$.

При изменении $|z|$ от 0 до $+\infty$, $|w|$ меняется от 0 до $+\infty$ и луч $\arg z = \frac{\pi}{6}$ переходит в луч $\arg z = \frac{\pi}{3}$.

3.4. Общая показательная функция

Общая показательная функция
$$w = a^z,$$

где $a=\alpha+i\beta\neq 0$ -любое комплексное число, определяется равенством

$$a^z=e^{z\,\mathrm{Ln}\,a}.$$

Это многозначная функция, главное значение которой равно $a^z=e^{z\ln a}$.

Пример 7. Найти значение степени $(1-i\sqrt{3})^i$.

Решение: Представим $(1-i\sqrt{3})^i$ согласно определению показательной функции в виде

$$(1-i\sqrt{3})^i=e^{i\,\mathrm{Ln}(1-i\sqrt{3})}.$$

Найдём значение

$$\mathrm{Ln}(1-i\sqrt{3}).$$

Для чего найдём модуль и аргумент комплексного числа $1-i\sqrt{3}$, получим:

$$|1-i\sqrt{3}|=2,\ \arg(1-i\sqrt{3})=\operatorname{arctg}\frac{-\sqrt{3}}{1}=-\frac{\pi}{3},$$

отсюда имеем

$$\mathrm{Ln}(1-i\sqrt{3})=\ln 2+i(-\frac{\pi}{3}+2\pi k).$$

Используя последнее выражение, найдём:

$$(1-i\sqrt{3})^i=e^{i\,\mathrm{Ln}(1-i\sqrt{3})}=e^{i(\ln 2+i(-\frac{\pi}{3}+2\pi k))}=$$
$$=e^{\frac{\pi}{3}-2\pi k}e^{i\ln 2}=e^{\frac{\pi}{3}-2\pi k}(\cos\ln 2+i\sin\ln 2),\ k\in\mathbb{Z}.$$

3.5. Тригонометрические и гиперболические функции

Тригонометрические функции $\sin z$ и $\cos z$ определим через показательную функцию по формулам Эйлера

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\ \text{и}\ \cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}.$$

Укажем некоторые свойства тригонометрических функций:

1) При $z=x$, $\sin z$ и $\cos z$ совпадают с тригонометрическими функциями $\sin x$ и $\cos x$ действительной переменной x.
2) Выполняются основные тригонометрические соотношения.
3) $\sin z$ и $\cos z$ периодические функции с основным периодом 2π.
4) $\sin z$-нечётная функция, $\cos z$-чётная функция.
5) Могут принимать любые значения, а не только ограниченные по модулю единицей.

Определим функции гиперболический синус $\mathrm{sh}\,z$ и гиперболический косинус $\mathrm{ch}\,z$ формулами:

$$\mathrm{sh}\,z=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2}\ \text{и}\ \mathrm{ch}\,z=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}.$$

Связь гиперболических функций с тригонометрическими выражается равенствами

$$\operatorname{sh} z = -i \sin iz,\ \operatorname{ch} z = \cos iz,$$
$$\sin z = -i \operatorname{sh} iz,\ \cos z = \operatorname{ch} iz.$$

Пример 8. Найти действительную и мнимую часть комплексного числа $\cos(1+i)$.

Решение:

Воспользуемся тригонометрической формулой

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2,$$

тогда

$$\cos(1+i) = \cos 1 \cos i - \sin 1 \sin i.$$

Запишем $\cos i$ и $\sin i$ через гиперболические функции

$$\cos i = \operatorname{ch} 1 \text{ и } \sin i = i \operatorname{sh} 1.$$

Окончательно получаем

$$\cos(1+i) = \cos 1 \operatorname{ch} 1 - i \sin 1 \operatorname{sh} 1.$$

Таким образом,

$$\operatorname{Re} \cos(1+i) = \cos 1 \operatorname{ch} 1,\ \operatorname{Im} \cos(1+i) = -\sin 1 \operatorname{sh} 1.$$

Пример 9. Доказать равенство $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$.

Решение: Для доказательства равенства воспользуемся формулой Эйлера

$$\sin 2z = \frac{e^{i2z} - e^{-i2z}}{2i} = \frac{(e^{iz} - e^{-iz})(e^{iz} + e^{-iz})}{2i} =$$
$$= 2\frac{(e^{iz} - e^{-iz})}{2i}\frac{(e^{iz} + e^{-iz})}{2i} = 2 \sin z \cos z.$$

Здесь была использована формула

$$z_1^2 - z_2^2 = (z_1 - z_2)(z_1 + z_2).$$

Пример 10. Найти точки, в которых обращается в нуль функция $\operatorname{sh} z$.

Решение: Представим функцию $\operatorname{sh} z$ через показательную функцию:

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = 0.$$

Отсюда получим равенство

$$e^z - e^{-z} = 0,\ e^z = e^{-z},\ e^{2z} = 1.$$

Положим
$$z = x + iy \text{ и } e^{2z} = e^{2x+i2y} = e^{2x}(\cos 2y + i\sin 2y).$$
Представим число 1 в тригонометрической форме
$$1 = \cos 2\pi k + i \sin 2\pi k,\ \ k \in \mathbb{Z},$$
поэтому $e^{2x} = 1,\ 2y = 2\pi k$ или $x = 0,\ y = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. Окончательно получим, что точки, в которых обращается в нуль функция $\operatorname{sh} z$, можно представить в виде $z = i\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

3.6. Обратные тригонометрические функции

Функции $w = \operatorname{Arcsin} z, w = \operatorname{Arccos} z, w = \operatorname{Arctg} z, w = \operatorname{Arcctg} z$ определяются как функции обратные к тригонометрическим функциям $z = \sin w, z = \cos w, z = \operatorname{tg} w, z = \operatorname{ctg} w$ соответственно. Все они являются многозначными и выражаются через логарифмическую функцию:

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1-z^2}),$$
$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2-1}),$$
$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+iz}{1-iz},$$
$$\operatorname{Arcctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{z+i}{z-i}.$$

Пример 11. Решить уравнение $\sin z = 5$.

Решение: Если $\sin z = 5$, то $z = \operatorname{Arcsin} 5$. Воспользуемся соответствующей формулой
$$z = \operatorname{Arcsin} 5 = -i \operatorname{Ln}(i5 + \sqrt{1-5^2}) = -i \operatorname{Ln}(i5 + \sqrt{-24}).$$
Получим две серии корней
$$z = -i \operatorname{Ln}(i5 + i2\sqrt{6}) \text{ и } z = -i \operatorname{Ln}(i5 - i2\sqrt{6}).$$
Так как
$$|(5+2\sqrt{6})i| = 5 + 2\sqrt{6}, \qquad |(5-2\sqrt{6})i| = 5 - 2\sqrt{6}$$
и
$$\arg(5+2\sqrt{6})i = \arg(5-2\sqrt{6})i = \frac{\pi}{2},$$
получим
$$\operatorname{Ln}(5+2\sqrt{6})i = \ln(5+2\sqrt{6}) + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$$
и
$$\operatorname{Ln}(5-2\sqrt{6})i = \ln(5-2\sqrt{6}) + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi).$$

Следовательно,

$$z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\ln(5 + 2\sqrt{6}),$$
$$z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\ln(5 - 2\sqrt{6}),\ k \in \mathbb{Z}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Записать в показательной форме числа:

124) 1) $z = -1$, 2) $z = i$, 3) $z = 1 - i$, 4) $z = \sqrt{3} - i$.

Найти модули и главные значения аргументов комплексных чисел:

125) 1) e^{3+2i}, 2) e^{1-3i}, 3) e^{2+5i}, 4) e^{3-7i}, 5) $e^{i\varphi}$, $|\varphi| < \pi$, 6) $e^{-i\varphi}$, $|\varphi| < \pi$.

Вычислить значения e^z в точках:

126) 1) $z = 2\pi i$, 2) $z = \pi i$, 3) $z = \dfrac{\pi i}{2}$, 4) $z = -\dfrac{\pi i}{2}$, 5) $z = \dfrac{\pi i}{4}$.

Доказать, что:

127) $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$.

128) $e^{z+2\pi i} = e^z$.

Доказать равенства:

129) $\cos(-z) = \cos z$.

130) $\sin(-z) = -\sin z$.

131) $\operatorname{ch}(-z) = \operatorname{ch} z$.

132) $\operatorname{sh}(-z) = -\operatorname{sh} z$.

133) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$.

134) $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$.

135) $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$.

136) $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$.

137) $\operatorname{ch}(z_1 + z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2$.

Пусть $z = x + iy$. Доказать, что:

138) $\operatorname{Re}\sin z = \sin x \operatorname{ch} y$, $\operatorname{Im}\sin z = \cos x \operatorname{sh} y$.

139) $\operatorname{Re}\cos z = \cos x \operatorname{ch} y$, $\operatorname{Im}\cos z = -\sin x \operatorname{sh} y$.

140) $\operatorname{Re}\operatorname{sh} z = \operatorname{sh} x \cos y$, $\operatorname{Im}\operatorname{sh} z = \operatorname{ch} x \sin y$.

141) $\operatorname{Re}\operatorname{ch} z = \operatorname{ch} x \cos y$, $\operatorname{Im}\operatorname{ch} z = \operatorname{sh} x \sin y$.

Найти действительные и мнимые части следующих чисел:

142) 1) $z = \cos(2 + i)$, 2) $z = \sin 2i$, 3) $z = \operatorname{sh}(-2 + i)$, 4) $z = \operatorname{ch} i$, 5) $z = \operatorname{tg}(2 - i)$.

Найти множество точек, в которых следующие функции принимают действительные значения:

143) 1) e^z, 2) $\cos z$, 3) $\sin z$.

Найти множество точек, в которых следующие функции принимают чисто мнимые значения:

144) 1) e^z, 2) $\sin z$, 3) $\operatorname{ch} z$.

Вычислить:

145) 1) $\operatorname{Ln} e$, 2) $\operatorname{Ln}(-1)$, 3) $\operatorname{Ln} i$, 4) $\operatorname{Ln}(3-4i)$, 5) $\operatorname{Ln}(-4+3i)$ 6) $\operatorname{Ln} \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$, 7) $\operatorname{Ln} \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$.

Найти значения степеней:

146) 1) $i^{\sqrt{2}}$, 2) i^i, 3) $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$, 4) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{1+i}$, 5) $(3-4i)^{1+i}$, 6) $(1-i\sqrt{3})^i$.

Вычислить:

147) 1) $\operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{1}{2}\right)$, 2) $\operatorname{Arccos}\left(\dfrac{1}{2}\right)$, 3) $\operatorname{Arccos}(2)$, 4) $\operatorname{Arcsin} i$, 5) $\operatorname{Arctg}(1+2i)$.

Найти решения следующих уравнений:

148) $\ln(z+i) = 0$.

149) $\ln(i-z) = 1$.

150) $e^{-z} + 1 = 0$.

151) $e^z + i = 0$.

152) $\sin z = \dfrac{4i}{3}$.

153) $\sin z = \dfrac{5}{3}$.

154) $\cos z = \dfrac{3i}{4}$.

155) $\cos z = \dfrac{3+i}{4}$.

156) $\operatorname{tg} z = \dfrac{5i}{3}$.

157) $\operatorname{ctg} z = -\dfrac{3i}{5}$.

Найти прообразы следующих линий при отображении $w = z^2$, $w = u + iv$:

158) 1) $u = 3$, 2) $v = 5$.

Найти образы следующих линий при отображении $w = \dfrac{1}{z}$:

159) 1) $x = 3$, 2) $y = 5$, 3) $|z| = R$, 4) $y = x$, 5) $(x-2)^2+y^2 = 1$, 6) $\arg z = \alpha$, 7) $|z-1| = 1$.

§4. Дифференцирование комплексных функций

4.1. Производная функции

Функция $f(z)$, определенная в некоторой окрестности точки z_0, называется дифференцируемой в этой точке, если существует конечный предел

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=f'(z_0),$$

называемый производной функции $f(z)$ в точке z_0.

Справедливы следующие свойства:

Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ дифференцируемы, а C произвольная постоянная, тогда

1) $C'=0$.
2) $(Cf(z))'=Cf'(z)$.
3) $(f(z)+g(z))'=f'(z)+g'(z)$.
4) $(f(z)g(z))'=f'(z)g(z)+f(z)g'(z)$.
5) $\left(\dfrac{f(z)}{g(z)}\right)'=\dfrac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{g^2(z)},\ g(z)\neq 0$.
6) Производная сложной функции. Если функция $w=f(z)$ имеет производную в точке z_0, а функция $\xi=\varphi(w)$, определенная на множестве значений функции $f(z)$, имеет производную в точке $w_0,\ w_0=f(z_0)$, то сложная функция $\xi=\varphi(f(z))$ имеет производную в точке z_0 и справедливо равенство:

$$(\varphi(f(z_0)))'=\varphi'(w_0)f'(z_0).$$

7) Производная обратной функции. Если функция $w=f(z)$ имеет производную в точке z_0 и $f'(z_0)\neq 0$, а обратная к $f(z)$ функция $z=\varphi(w)$ существует и непрерывна, то она имеет производную в точке $w_0,\ w_0=f(z_0)$ и справедливо равенство

$$\varphi'(w_0)=\frac{1}{f'(z_0)}.$$

Таблица производных

1.$(z^n)' = nz^{n-1}$.	2.$(e^z)' = e^z$.
3.$(\sin z)' = \cos z$.	4.$(\cos z)' = -\sin z$.
5.$(\operatorname{tg} z)' = \frac{1}{\cos^2 z}$.	6.$(\operatorname{ctg} z)' = -\frac{1}{\sin^2 z}$.
7.$(\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z$.	8.$(\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z$.
9.$(\operatorname{th} z)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 z}$.	10.$(\operatorname{cth} z)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 z}$.
11.$(\operatorname{Arcsin} z)' = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$.	12.$(\operatorname{Arccos} z)' = -\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$.
13.$(\operatorname{Arctg} z)' = \frac{1}{1+z^2}$.	14.$(\operatorname{Arcctg} z)' = -\frac{1}{1+z^2}$.
15.$(\operatorname{Ln} z)' = \frac{1}{z}$.	

Заметим, что при дифференцировании рассматриваются только однозначные функции. В равенствах (11)–(15) понимаем левую часть как производную от произвольной однозначной ветви соответствующей функции, выделенной в окрестности данной точки.

Пример 1. Найти где дифференцируема функция $f(z) = \dfrac{e^z+1}{e^z-1}$ и найти её производную.

Решение: Функция $f(z)$ определена везде кроме точек, где

$$e^z - 1 = 0,\ e^z = 1.$$

Положим

$$z = x + iy,\ e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Представим число 1 в тригонометрической форме

$$1 = \cos 2\pi k + i \sin 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z},$$

поэтому $e^x = 1,\ y = 2\pi k$ или $x = 0,\ y = 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. Окончательно получим $z = i2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. Таким образом, функция $f(z)$ определена всюду кроме точек $z = i2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

По правилу дифференцирования частного двух функций получим

$$f'(z) = \frac{(e^z+1)'(e^z-1) - (e^z+1)(e^z-1)'}{(e^z-1)^2} =$$

$$= \frac{e^z(e^z-1) - e^z(e^z+1)}{(e^z-1)^2} = \frac{-2e^z}{(e^z-1)^2}.$$

Из последнего равенства видно, что функция является дифференцируемой во всех точках, где она определена.

4.2. Условия Коши–Римана

Пусть $z = x + iy$ и функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $z_0 = x_0 + iy_0$. Функция $f(z)$ дифференцируема в точке z_0 тогда и только тогда, когда

1) $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы как функции двух переменных в точке (x_0, y_0);
2) выполняются условия Коши–Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Пример 2. Доказать, что функция $f(z) = z^2 \operatorname{Im} z$ имеет производную только в одной точке $z = 0$.

Решение: Проверим выполнение условий Коши–Римана для функции

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = z^2 \operatorname{Im} z = (x^2 - y^2)y + 2ixy^2,$$

получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 - 3y^2,$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y^2, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 4xy.$$

Откуда видно, что условия Коши–Римана не выполняются ни в одной точке, кроме точки $z = 0$. Так как условия Коши–Римана являются лишь необходимыми условиями существования производной, то вычислим $f'(0)$ по определению

$$f'(0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(\Delta z) - f(0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} (\Delta z)(\Delta y) = 0.$$

Таким образом, функция $f(z)$ дифференцируема в точке $z = 0$.

Иногда функцию $f(z) = u + iv$ удобно рассматривать как функцию переменных r и φ, где $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Запишем условия Коши–Римана в полярных координатах

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}, \qquad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

Пример 3. Проверить условия Коши–Римана для функции $f(z) = z^n$.

Решение: Запишем $f(z) = u + iv$ в полярных координатах

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),\ u(r, \varphi) = r^n \cos n\varphi,\ v(r, \varphi) = r^n \sin n\varphi$$

и вычислим частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial r} = nr^{n-1}\cos n\varphi, \qquad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -nr^{n}\sin n\varphi,$$
$$\frac{\partial v}{\partial r} = nr^{n-1}\sin n\varphi, \qquad \frac{\partial v}{\partial \varphi} = nr^{n}\cos n\varphi.$$

Условия Коши–Римана в полярных координатах выполнены.

4.3. Геометрический смысл модуля и аргумента производной

Пусть $w = f(z)$ имеет производную в точке z_0 и $f'(z_0) \neq 0$. Пусть C кривая, проходящая через точку z_0. Через Γ обозначим образ кривой C при отображении $w = f(z)$, проходящей через точку $w_0 = f(z_0)$.

Пусть φ угол, образуемый касательной к кривой C в точке z_0 и положительным направлением действительной оси в плоскости z, а θ угол, образуемый касательной к кривой Γ в точке $w_0 = f(z_0)$ с положительным направлением действительной оси в плоскости w (касательные считаются направленными в ту же сторону, что и кривые). Справедливо равенство

$$\theta = \varphi + \arg f'(z_0).$$

Пусть z произвольная точка кривой C. Обозначим

$$\Delta z = z - z_0,\ \ \Delta w = w - w_0.$$

Коэффициентом линейного растяжения кривой C в точке z_0 называется предел

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}.$$

Модуль производной $|f'(z_0)|$ равен коэффициенту линейного растяжения кривой C в точке z_0.

Пример 4. Указать, какая часть плоскости сжимается, а какая растягивается при отображении $w = z^2 + z$.

Решение: Найдём производную данного отображения $w' = 2z + 1 = 2x + 1 + i2y$ и вычислим её модуль

$$|w'| = \sqrt{(2x+1)^2 + 4y^2}.$$

Так как модуль производной является коэффициентом линейного растяжения, то область, где $|w'| < 1$, сжимается, а область, где $|w'| > 1$, растягивается.

Следовательно, окружность $(2x+1)^2 + 4y^2 = 1$ делит плоскость z на две части. Внутренняя её часть $(2x+1)^2 + 4y^2 < 1$ при отображении w сжимается, а внешняя часть $(2x+1)^2 + 4y^2 > 1$ растягивается.

4.4. Аналитические функции

Функция $w = f(z)$ называется аналитической в точке z_0, если она дифференцируема в этой точке и в некоторой её окрестности.

Из определения следует, что функция, аналитическая в точке z_0, будет аналитической в каждой точке некоторой окрестности точки z_0. Поэтому множество точек аналитичности всегда открыто.

Множество точек G комплексной плоскости называется областью, если:

1) оно открыто, т.е. вместе с каждой точкой, принадлежащей этому множеству оно содержит и некоторую окрестность этой точки;
2) оно связно, т.е. вместе с каждой парой точек, принадлежащих этому множеству, оно содержит и некоторую ломаную, соединяющую эти точки.

Точка z_0 назывется граничной точкой области G, если в любой её окрестности содержатся точки как принадлежащие, так и не принадлежащие области G. Множество всех граничных точек области G образуют границу области.

Область G вместе с её границей называется замкнутой областью и обозначается $\bar{G}$.

Функция называется аналитической в области G , если она аналитическая в каждой точке этой области.

Функция называется аналитической в области $\bar{G}$, если она аналитическая в некоторой области D $(\bar{G} \subset D)$.

Функция называется аналитической на кривой γ , если она аналитическая в некоторой области, содержащей эту кривую.

Функция $f(z)$ называется аналитической на бесконечности, если функция $\varphi(z) = f\left(\dfrac{1}{z}\right)$ аналитическая в точке $z = 0$.

Пример 5. Проверить является ли функция $f(z) = z \operatorname{Re} z$

1) аналитической в точке $z = 0$;
2) дифференцируемой в точке $z = 0$.

Решение: Для функции

$$f(z) = u + iv = z \operatorname{Re} z = (x + iy)x = x^2 + ixy, \; u = x^2, \; v = xy.$$

Найдём частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = y, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = x.$$

Отсюда видно, что условия Коши–Римана выполняются только в одной точке $z = 0$. Поэтому, функция не является аналитической в точке $z = 0$. Вычислим производную $f'(0)$. По определению

$$f'(0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(\Delta z) - f(0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta z \Delta x}{\Delta z} = 0.$$

Таким образом, функция $f(z)$ дифференцируема в точке $z = 0$, но не является аналитической.

Пример 6. Показать, что функция $f(z) = z^2 + 3e^z$ аналитическая в области $G = \{z \; : |z| < 1\}$.

Решение: Используя свойство производной суммы и известные производные функций $(z^2)' = 2z$, $(3e^z)' = 3e^z$, найдем производную функции $(f(z))' = (z^2+3e^z)' = 2z+3e^z$. Отсюда видно, что для любой точки z, $|z| < 1$ существует конечная производная функции $f(z) = z^2+3e^z$, поэтому она является аналитической в области G.

Пример 7. Найти аналитическую в комплексной плоскости функцию $f(z) = u + iv$ по заданной её действительной части $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2x$, если $f(i) = -1 + 2i$.

Решение: Из условий Коши–Римана имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x + 2.$$

Поэтому

$$v(x, y) = \int (2x + 2) dy = (2x + 2)y + c(x).$$

Постоянная интегрирования может зависеть от x, так как интегрирование производилось по y. Найдём $c(x)$, для чего используем второе из условий Коши–Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y,\ \frac{\partial v}{\partial x} = 2y + c'(x).$$

Следовательно,

$$2y + c'(x) = 2y,\ c'(x) = 0, c(x) = c_0,\ v(x,y) = (2x+2)y + c_0$$

и

$$f(z) = x^2 - y^2 + 2x + i(2xy + 2y + c_0).$$

Определим c_0 из условия $f(i) = -1 + 2i$, получим:

$$-1 + i(2 + c_0) = 2i - 1, c_0 = 0.$$

Итак,

$$f(z) = x^2 - y^2 + 2x + i(2xy + 2y) = (x^2 - y^2 + i2xy) + 2(x + iy) = z^2 + z.$$

Ответ: $f(z) = z^2 + z$.

Задачи для самостоятельного решения

Пусть $z = x + iy$. Найти все точки, в которых дифференцируемы функции:

160) 1) $\operatorname{Re} z$, 2) x^2y^2, 3) $|z|^2$, 4) $x^2 + iy^2$, 5) $z \operatorname{Re} z$, 6) $2xy - i(x^2 - y^2)$.

Используя производную показательной функции, доказать:

161) $(\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z$.

162) $(\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z$.

163) $(\sin z)' = \cos z$.

164) $(\cos z)' = -\sin z$.

165) $(\operatorname{Ln} z)' = \dfrac{1}{z}$.

Найти, где дифференцируемы следующие функции, и найти их производные:

166) $e^{\operatorname{ch} z}$.

167) $\sin(2e^z)$.

168) $\sin z \operatorname{ch} z - i \cos z \operatorname{sh} z$.

169) ze^{-z}.

170) $\dfrac{e^z}{z}$.

171) $\dfrac{z \cos z}{1 + z^2}$.

172) $\operatorname{tg} z$.

173) $\operatorname{ctg} z$.

174) $\dfrac{e^z+1}{e^z-1}$.

175) $\dfrac{1}{\operatorname{tg} z+\operatorname{ctg} z}$.

176) $(e^z-e^{-z})^2$.

177) $\dfrac{\cos z}{\cos z-\sin z}$.

Проверить выполнение условий Коши–Римана для функций:

178) 1) z^n, 2) e^z, 3) $\cos z$, 4) $\operatorname{Ln} z$.

Найти все точки, в которых коэффициент линейного растяжения равен единице:

179) 1) $w=z^2-2z$, 2) $w=\dfrac{1}{z}$, 3) $w=z^3$, 4) $w=\dfrac{1+iz}{1-iz}$.

Найти все точки, в которых угол поворота равен нулю:

180) 1) $w=iz^2$, 2) $w=\dfrac{1+iz}{1-iz}$, 3) $w=-z^3$, 4) $w=z^2-2z$, 5) $w=\dfrac{i}{z}$.

Определить какая часть плоскости сжимается, а какая растягивается:

181) 1) $w=z^2$, 2) $w=e^z$, 3) $w=\ln(z-1)$.

Пусть кривая C -луч $\arg(z-z_0)=\varphi$, выходящая из точки z_0. Найти коэффициент линейного растяжения и угол поворота в точке z_0 для этого луча при следующих отображениях:

182) 1) $w=z^2$, $z_0=1$, 2) $w=w=\bar{z}^2$, $z_0=i$, 3) $w=ie^{2z}$, $z_0=0$, 4) $w=2z+i\bar{z}$, $z_0=0$, 5) $w=\dfrac{1-iz}{1+iz}$, $z_0=-i$.

Найти аналитическую функцию в окрестности точки z_0, если известны ее действительная $u(x,y)$ или мнимая $v(x,y)$ часть и значение $f(z_0)$:

183) $u=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $f(\pi)=\dfrac{1}{\pi}$.

184) $v=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, $f(1)=0$.

185) $u=3x^2-4xy-3y^2$, $f(i)=-3-2i$.

186) $v=2y(5x-3)$, $f\left(\dfrac{1}{5}\right)=-1$.

187) $v=\sin y\operatorname{ch}(x+1)$, $f\left(-1+\dfrac{\pi}{2}i\right)=i$.

188) $u=\dfrac{2y}{(x+1)^2+y^2}$, $f(i)=i$.

Выяснить, является ли данная функция действительной или мнимой частью аналитической функции:

189) 1)$u(x,y)=e^{y/x}$, 2)$v(x,y)=e^{-x}\sin 2y$.

§5. Интегрирование функций комплексного переменного

5.1. Интеграл по комплексному переменному и его свойства

Пусть $f(z)$ однозначная и непрерывная в области G функция комплексного переменного z. Γ – произвольная кусочно-гладкая кривая,лежащая в области G, с началом в точке a и концом в точке b. Разобьём дугу ab линии Γ на произвольное число n частичных дуг с помощью точек $a = z_0, z_1, ..., z_n = b$, расположенных последовательно в положительном направлении линии Γ. Составим сумму

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(\xi_k)\Delta z_k, \text{ где } \Delta z_k = z_{k+1} - z_k.$$

Точка ξ_k лежит на частичной дуге Γ, соединяющей точки z_k, z_{k+1}. Предел этих интегральных сумм при неограниченном измельчении разбиения (если он не зависит от разбиения) называется интегралом от функции $f(z)$ по кривой Γ и обозначается

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz.$$

Основные свойства интеграла по комплексному переменному:

1) $\int\limits_{\Gamma^+} f(z)dz = -\int\limits_{\Gamma^-} f(z)dz$, где $\Gamma^+,\ \Gamma^-$ обозначают один и тот же путь, проходимый в противоположных направлениях.
2) $\int\limits_{\Gamma} Cf(z)dz = C\int\limits_{\Gamma} f(z)dz,$ - произвольная постоянная.
3) $\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \int\limits_{\Gamma_1} f(z)dz + \int\limits_{\Gamma_2} f(z)dz + ... + \int\limits_{\Gamma_n} f(z)dz$, если путь интегрирования описывается движущейся точкой, проходящей последовательно его части $\Gamma_1,\ \Gamma_2,\ ...,\ \Gamma_n$.
4) $\int\limits_{\Gamma} f_1(z) + f_2(z)dz = \int\limits_{\Gamma} f_1(z)dz + \int\limits_{\Gamma} f_2(z)dz.$

Пусть

$$z = x + iy, \quad f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Вычисление интеграла по комплексному переменному сводится к вычислению обычных криволинейных интегралов второго рода от действительной функции, а именно:

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \int\limits_{\Gamma} u(x, y)dx - v(x, y)dy + i\int\limits_{\Gamma} v(x, y)dx + u(x, y)dy.$$

Эту формулу легко запомнить, если написать в таком виде:

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \int\limits_{\Gamma} (u+iv)(dx+idy).$$

Пример 1. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} (2z+\bar{z}+i)dz,$$

где Γ – дуга параболы $y = x^2$, соединяющая точки $z = 0$ и $z = 1+i$.

Решение:

$$\int\limits_{\Gamma} (2z+\bar{z}+i)dz = \int\limits_{\Gamma} 3xdx-(y+1)dy + i\int\limits_{\Gamma} (y+1)dx+3xdy =$$

$$= \int\limits_{0}^{1} (3x-2(x^2+1)x)dx + i\int\limits_{0}^{1} (x^2+1+6x^2)dx =$$

$$= \int\limits_{0}^{1} (x-2x^3)dx + i\int\limits_{0}^{1} (7x^2+1)dx = \left[\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{2}\right)\right]_0^1 + i\left[\left(\frac{7}{3}x^3+x\right)\right]_0^1 = \frac{10}{3}i.$$

Часто вычисление интеграла по комплексному переменному сводится к вычислению обыкновенного определённого интеграла. Пусть уравнение линии Γ задано в виде

$$z(t) = x(t)+iy(t), t \in [a,b],$$

где $x(t),\ y(t)$ две непрерывно-дифференцируемые функции действительного переменного t такие, что двум различным значениям параметра t (за исключением, быть может, $t = a$ и $t = b$) соответствуют две различные точки комплексной плоскости. Имеем

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \int\limits_{a}^{b} f(z(t))z'(t)dt =$$

$$= \int\limits_{a}^{b} u(x(t),y(t))x'(t)dt - v(x(t),y(t))y'(t)dt +$$

$$+ i\int\limits_{a}^{b} v(x(t),y(t))x'(t)dt + u(x(t),y(t))y'(t)dt.$$

Пример 2. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{1}{(\sqrt{z})_1} dz,$$

где Γ – правая полуокружность $|z| = 2$, $\operatorname{Re} z \geqslant 0$, пробегаемая от точки $z = -2i$ до точки $z = 2i$. Через $(\sqrt{z})_1$ обозначена одна из непрерывных ветвей двузначной функции $\sqrt{z}$.

Решение: Запишем дугу Γ в параметрическом виде как $z = 2e^{it}$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$. Получим

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{1}{(\sqrt{z})_1} dz = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{2ie^{it}dt}{\sqrt{2}e^{i\frac{t}{2}}} = \sqrt{2} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} ie^{i\frac{t}{2}}dt =$$

$$= \left[2\sqrt{2}e^{i\frac{t}{2}}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\sqrt{2}\left(e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\frac{\pi}{4}}\right) = 4\sqrt{2}i \sin\frac{\pi}{4} = 4i.$$

5.2. Формула Ньютона–Лейбница

Первообразной для функции $f(z)$ в области G называем всякую функцию $F(z)$, удовлетворяющую всюду в области G условию

$$F'(z) = f(z).$$

В дальнейшем будем предполагать, что граница области состоит из конечного числа замкнутых кривых (мы не даём определения этих понятий (см. рисунок)),

где граница состоит из трёх замкнутых кривых $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$.

Если область G ограничена и её граница состоит из одной замкнутой кривой, то она называется односвязной областью.

Пусть область G односвязная и кривая Γ лежит внутри G. Пусть функция $f(z)$ аналитическая в области G.

Справедлива формула Ньютона–Лейбница

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \int\limits_{A}^{B} f(z)dz = F(B) - F(A),$$

где A и B начало и конец пути интегрирования, $F(z)$ первообразная для функции $f(z)$.

Пример 3. Применяя формулу Ньютона–Лейбница, вычислить интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} (z-1)dz,$$

где кривая Γ соединяет точки $A = 2+i,\ B = -2-i$, как показано на рисунке.

Решение: Функция $f(z) = z - 1$ аналитическая во всей комплексной плоскости, поэтому мы можем применить формулу Ньютона–Лейбница

$$\int\limits_{\Gamma} (z-1)dz = \int\limits_{2+i}^{-2-i} (z-1)dz = \left[\frac{z^2}{2} - z\right]_{2+i}^{-2-i} =$$

$$= \frac{(-2-i)^2}{2} - (-2-i) - \frac{(2+i)^2}{2} + (2+i) = 4 + 2i.$$

Пример 4. Применяя формулу Ньютона–Лейбница, вычислить интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{1}{z}dz,$$

где кривая Γ четверть окружности, соединяющая точки $A = 1,\ B = i$, как показано на рисунке.

Решение: Функция $f(z) = \frac{1}{z}$ аналитическая в односвязной области G .

Однозначная функция $F(z) = \ln z = \ln|z| + i \arg z$ является первообразной для функции $f(z) = \frac{1}{z}$. По формуле Ньютона–Лейбница получим

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{1}{z} dz = \int\limits_{1}^{i} \frac{1}{z} dz = \ln(i) - \ln(1) = i\frac{\pi}{2}.$$

Замечание. Если кривая Γ соединяет точки $A = 1, B = i$, как показано на рисунке, то в этом случае формулу Ньютона–Лейбница применять нельзя. Функция $f(z) = \frac{1}{z}$ не является аналитической в точке $z = 0$, поэтому область G, где рассматривается первообразная функции $f(z)$, не может содержать точку $z = 0$. На рисунке видно, что область, которая содержит кривую Γ, но не содержит точку $z = 0$, не может быть односвязной. Это противоречит условиям теоремы Ньютона–Лейбница.

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить интегралы:

190) $\int\limits_0^1 (1+it)^2 dt.$

191) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{1}{1+it} dt.$

192) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{1+it}{1-it} dt.$

193) $\int\limits_0^\pi e^{-it} dt.$

194) $\int\limits_{-\pi}^\pi e^{i3t} dt.$

Вычислить интегралы $\int\limits_\Gamma \operatorname{Re} z dz$, $\int\limits_\Gamma \operatorname{Im} z dz$, где:

195) Γ – радиус вектор точки $2+i$.

196) Γ – верхняя полуокружность $|z|=1$ (начало пути в точке $z=1$).

197) Γ – окружность $|z-2|=3$, проходимая против часовой стрелки.

Вычислить интегралы $\int\limits_\Gamma |z| dz$, где:

198) Γ – отрезок $z=(2-i)t,\ 0 \leqslant t \leqslant 1$.

199) Γ – окружность $|z|=5$, проходимая против часовой стрелки.

200) Γ – левая полуокружность $|z|=1$ (начало пути в точке $z=i$).

Вычислить интегралы:

201) $\int\limits_\Gamma |z|\bar{z} dz$, где Γ – замкнутый контур, состоящий из верхней полуокружности $|z|=1$ и отрезка $-1 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1,\ \operatorname{Im} z = 0$.

202) $\int\limits_\Gamma e^{\bar{z}} dz$, где Γ – отрезок прямой, соединяющий точки $z_1=0,\ z_2=1+i$.

203) $\displaystyle\int\limits_\Gamma \frac{1}{z-i} dz$, где Γ – линия, состоящая из правой полуокружности $|z-i|=1$ и отрезка, соединяющего точки $z_1=2i,\ z_2=3i$.

204) $\int\limits_\Gamma \operatorname{Re}(\sin z)\cos z dz$, где Γ – $|\operatorname{Im} z| \leqslant 1,\ \operatorname{Re} z = \dfrac{\pi}{4},\ z=\dfrac{\pi}{4}-i$ – начало пути.

Найти первообразные функций:

205) 1) e^{az}, 2) $\operatorname{ch} az$, 3) $\operatorname{sh} az$, 4) $\cos az$, 5) $\sin az$, 6) ze^{az}, 7) $z^2 \operatorname{ch} az$, 8) $z\cos az$.

Пользуясь формулой Ньютона–Лейбница, вычислить:

206) $\int\limits_{1+i}^{-1-i} (z^2-z+1) dz.$

207) $\int\limits_0^i (z-i)e^{-z}dz.$

208) $\int\limits_0^i \dfrac{\ln z}{z}dz$, по отрезку соединяющему точки $z_1 = 1,\ z_2 = i.$

209) $\int\limits_0^{1+i} \sin z \cos z dz.$

§6. Теорема Коши. Интегральная формула Коши

Интегральная теорема Коши. Если G односвязная область и $f(z)$ аналитическая функция в G, то для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой Γ, лежащей в области G

$$\int\limits_\Gamma f(z)dz = 0.$$

Теорему Коши можно распространить и на случай многосвязной области. Пусть $f(z)$ аналитическая в многосвязной области D. Пусть замкнутая область $\bar{G}$ принадлежит D. Граница G состоит из конечного числа замкнутых кусочно-гладких кривых $\Gamma_0,\ \Gamma_1,\ ...,\ \Gamma_n$, каждый из которых положительно ориентирован относительно области G (т.е. при обходе область G остаётся слева). Обозначим через Γ составной контур, состоящий из контуров $\Gamma_0,\ \Gamma_1,\ ...,\ \Gamma_n$. При этих предположениях справедливо равенство

$$\int\limits_\Gamma f(z)dz = \int\limits_{\Gamma_0} f(z)dz + \int\limits_{\Gamma_1} f(z)dz + ... + \int\limits_{\Gamma_n} f(z)dz = 0.$$

Интегральная формула Коши. Пусть $f(z)$ аналитическая в области D и область G с границей Γ, состоящей из одной или нескольких кусочно-гладких кривых, ориентированных положительно относительно области G, содержится в D. Тогда для любой точки $z_0 \in G$ справедлива интегральная формула Коши:

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$

и

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0),$$

где $f^{(n)}$ - производная порядка n функции $f(z)$.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int\limits_{\Gamma} \frac{1}{z^2+1} dz$, где кривая Γ

$$1)\Gamma : |z-1| = \tfrac{1}{2};\;\; 2)\Gamma : |z-i| = \tfrac{1}{2};\;\; 3)\Gamma : |z+i| = \tfrac{1}{2};\;\; 4)\Gamma : |z| = 2.$$

Замечание. Здесь и дальше, если не оговорено противное, полагаем, что контур Γ обходится в положительном направлении.

Решение: 1) Так как функция $\frac{1}{z^2+1}$ аналитическая в круге $|z-1| \leqslant \frac{1}{2}$, то применима интегральная теорема Коши, поэтому

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{1}{z^2+1} dz = 0.$$

2) В круге $|z-i| \leqslant \frac{1}{2}$ функция $\frac{1}{z^2+1}$ имеет особенность в точке $z = i$ и поэтому не является аналитической. Для вычисления интеграла воспользуемся интегральной формулой Коши

$$\int\limits_{\Gamma_1} \frac{1}{z^2+1} dz = \int\limits_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z^2+1} dz = \int\limits_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{(z-i)(z+i)} dz =$$

$$= \int\limits_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{z+i}}{z-i} dz = 2\pi i \frac{1}{z_0+i}\bigg|_{z_0=i} = \pi.$$

В этом случае $z_0 = i$, $f(z) = \frac{1}{z+i}$, контур $\Gamma = \Gamma_1 : |z-i| = \frac{1}{2}$ обходится против часовой стрелки.

3) В круге $|z+i| \leqslant \frac{1}{2}$ функция $\frac{1}{z^2+1}$ имеет особенность в точке $z = -i$ и не является аналитической. Для вычисления интеграла воспользуемся

интегральной формулой Коши

$$\int\limits_{\Gamma_2} \frac{1}{z^2+1}dz = \int\limits_{|z+i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z^2+1}dz = \int\limits_{|z+i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{(z-i)(z+i)}dz =$$

$$= \int\limits_{|z+i|=\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{z-i}}{z+i}dz = 2\pi i \frac{1}{z_0-i}\Big|_{z_0=-i} = -\pi.$$

В этом случае $z_0 = -i$, $f(z) = \dfrac{1}{z-i}$ контур $\Gamma = \Gamma_2 : |z+i| = \frac{1}{2}$ обходится против часовой стрелки.

4) В круге $|z| \leqslant 2$ функция $\dfrac{1}{z^2+1}$ имеет две особенности в точках $z = i$, $z = -i$. Для вычисления интеграла воспользуемся теоремой Коши для многосвязной области G. В качестве G возьмём область, границей которой служат окружности

$$\Gamma_0 : |z| = 2; \quad \Gamma_1^- : |z-i| = \frac{1}{2}; \quad \Gamma_2^- : |z+i| = \frac{1}{2}.$$

Контур Γ_0 обходится против часовой стрелки, а контуры Γ_1, Γ_2 по часовой стрелке. Функция $\dfrac{1}{z^2+1}$ аналитическая в указанной области. Поэтому

$$\int\limits_{\Gamma_0} \frac{1}{z^2+1}dz + \int\limits_{\Gamma_1^-} \frac{1}{z^2+1}dz + \int\limits_{\Gamma_2^-} \frac{1}{z^2+1}dz = 0$$

и

$$\int\limits_{\Gamma_0} \frac{1}{z^2+1}dz = \int\limits_{\Gamma_1} \frac{1}{z^2+1}dz + \int\limits_{\Gamma_2} \frac{1}{z^2+1}dz$$

или

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{1}{z^2+1}dz = \pi - \pi = 0.$$

Пример 2. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{e^z}{(1-z)^3}dz,$$

где кривая $\Gamma : |z-1| = \dfrac{1}{2}$.

Решение: Положим $n = 2,\ f(z) = -e^z,\ z_0 = 1$. Применим интегральную формулу Коши.

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{e^z}{(1-z)^3}dz = \frac{2\pi}{2!}i\frac{d^2}{dz^2}(-e^z)|_{z=1} = -i\pi e.$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить интегралы (все окружности обходятся против часовой стрелки):

210) $\displaystyle\int\limits_{|z-2i|=2} \frac{1}{z^2+9}dz.$

211) $\displaystyle\int\limits_{|z+i|=3} \frac{1}{z^2+9}dz.$

212) $\displaystyle\int\limits_{|z|=4} \frac{1}{z^2+9}dz.$

213) $\displaystyle\int\limits_{|z-2|=2} \frac{z}{z^4-1}dz.$

214) $\displaystyle\int\limits_{|z+1|=2} \frac{1}{z^2+z+1}dz.$

215) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{\sin z}{z}dz.$

216) $\displaystyle\int\limits_{|z-3|=2} \frac{\cos z}{z^2-4}dz.$

217) $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{\sin^2 z}{z-\frac{\pi}{4}}dz.$

218) $\displaystyle\int\limits_{|z-3|=\frac{5}{2}} \frac{\sin\dfrac{1}{z}}{z-2}dz.$

219) $\displaystyle\int\limits_{|z|=3} \frac{\cos\pi z+3\sin\pi z}{(z^2-4)(z+i)}dz.$

220) $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=1} \frac{z^2e^z}{z^2-1}dz.$

221) $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=1} \frac{\operatorname{ch} z^2}{i-z}dz.$

222) $\displaystyle\int\limits_{|z-2i|=2} \frac{\operatorname{sh} z}{z^2+1}dz.$

223) $\displaystyle\int\limits_{|z-2i|=2} \frac{\operatorname{tg} z}{z^2+\pi^2}dz.$

224) $\displaystyle\int\limits_{|z+1|=1} \frac{1}{(1+z)(z-1)^3}dz.$

225) $\displaystyle\int\limits_{|z-2|=1} \frac{e^z}{(2-z)^2}dz.$

226) $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin\pi z}{(z^2-1)^2}dz.$

227) $\displaystyle\int\limits_{|z-1-i|=2} \frac{\cos z}{(z-i)^3}dz.$

228) $\displaystyle\int\limits_{|z+i|=3} \frac{\sin z}{z+i}dz.$

229) $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2-1}dz.$

230) $\displaystyle\int\limits_{|z|=4} \frac{\cos z}{z^2-\pi^2}dz.$

231) $\displaystyle\int\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz.$

232) $\displaystyle\int\limits_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz.$

233) $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz.$

§7. Степенные ряды. Разложение функции в степенной ряд

7.1. Степенные ряды

Степенным рядом называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \ldots + c_n(z-z_0)^n + \ldots,$$

где c_n и z_0 комплексные числа, а z комплексное переменное.

Если $z_0 = 0$, то получаем ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots$$

Областью сходимости степенного ряда является внутренность круга с центром в точке z_0 и радиусом R с возможным добавлением точек, лежащих на границе этого круга. Радиус круга называется радиусом сходимости и определяется по формулам

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$$

и

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|},$$

если пределы существуют.

Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ при $|z-z_0| < R$ сходится абсолютно, а при $|z-z_0| > R$ расходится. Множество точек сходимости ряда на окружности $|z-z_0| = R$ может быть пустым, может полностью совпадать с ней, может в одних точках окружности сходиться, а в других расходиться.

Если радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ есть число $R>0$, то открытый круг $|z-z_0|<R$ называют кругом сходимости этого ряда. Если $R=\infty$ кругом сходимости называют всю комплексную плоскость. Если $R=0$, то ряд сходится только в точке $z=z_0$.

Таким образом, степенной ряд определяет функцию

$$S(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$$

для всех комплексных чисел, удовлетворяющих условию $|z-z_0|<R$, и, может быть, для некоторых или всех чисел , удовлетворяющих условию $|z-z_0|=R$. Функция $S(z)$ является аналитической в круге сходимости.

Пример 1. Найти радиус сходимости и область сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{3^n n^3}.$$

Решение: По условию имеем $|c_n|=\dfrac{1}{3^n n^3}$. Для того чтобы найти радиус сходимости, воспользуемся формулой

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|},$$

получим

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}(n+1)^3}{3^n n^3}=\lim_{n\to\infty} 3\left(1+\frac{1}{n}\right)^3=3.$$

Проверим, будет ли сходиться ряд на окружности $|z-i|=3$. Для чего найдём модуль выражения, стоящего под знаком суммы при $|z-i|=3$, а именно

$$\left|\frac{(z-i)^n}{3^n n^3}\right|=\frac{3^n}{3^n n^3}=\frac{1}{n^3}.$$

Из сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n^3}$ непосредственно следует абсолютная сходимость ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-i)^n}{3^n n^3}$ во всех точках окружности $|z-i|=3$. Таким образом, исследуемый ряд сходится во всех точках z , удовлетворяющих условию $|z-i|\leqslant 3$.

Пример 2. Найти радиус сходимости и область сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{5^n}.$$

Решение: По условию имеем $|c_n| = \dfrac{1}{5^n}$. Для того чтобы найти радиус сходимости, воспользуемся формулой

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|},$$

получим

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{5^n}} = \frac{1}{5}$$

и $R = 5$. Проверим сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{5^n}$ на окружности $|z| = 5$. Для чего найдём модуль выражения , стоящего под знаком суммы при $|z| = 5$, а именно

$$\left|\frac{z^n}{5^n}\right| = \frac{5^n}{5^n} = 1.$$

Так как при $|z| = 5$ не выполнен необходимый признак сходимости рядов

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z^n}{5^n} \neq 0,$$

то при $|z| = 5$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{5^n}$ расходится. Таким образом, исследуемый ряд сходится во всех точках z, удовлетворяющих условию $|z| < 5$.

Пример 3. Найти радиус сходимости и область сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Решение: По условию имеем $|c_n| = \dfrac{1}{n!}$. Для того чтобы найти радиус сходимости, воспользуемся формулой

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|},$$

получим

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \infty.$$

Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$ сходится во всех точках комплексной плоскости.

7.2. Ряды Тейлора

Пусть функция $f(z)$ аналитическая в точке z_0 (т.е. дифференцируемая в этой точке и некоторой ее окрестности). Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

называется рядом Тейлора функции f в точке z_0.

Пример 4. Написать ряд Тейлора для функции $f(z)=e^z$ в точке $z=0$.

Решение: Функция $f(z)=e^z$ аналитическая в точке $z=0$ и

$$f^{(n)}(0)=e^z|_{z=0}=e^0=1.$$

Поэтому ряд Тейлора функции $f(z)=e^z$ в точке $z=0$ будет иметь вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

7.3. Разложение функции в степенной ряд

В предыдущем пункте было сказано, что сумма степенного ряда является аналитической функцией внутри круга сходимости. Вполне естественно поставить вопрос о возможности разложения в степенной ряд аналитической функции. Справедливы следующие утверждения:

1) Если функция $f(z)$ однозначная и аналитическая в круге $|z-z_0|<R$, тогда в каждой точке этого круга она единственным образом представляется сходящимся рядом Тейлора

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n.$$

2) Каждый сходящийся степенной ряд является рядом Тейлора своей суммы.

При разложении функции в степенной ряд

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$$

коэффициенты c_n далеко не всегда эффективно вычисляются по формулам $c_n=\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. Для вычисления коэффициентов ряда Тейлора существует ряд искусственных приемов, которые аналогичны приемам, применяемым в случае функций действительного переменного. При этом используются основные табличные разложения

$$\begin{aligned}
e^z &= \sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{z^n}{n!} = 1 + z + \tfrac{z^2}{2!} + \tfrac{z^3}{3!} + \ldots + \tfrac{x^n}{n!} + \ldots, \quad |z| < \infty,\\
\sin z &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\tfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \tfrac{z^3}{3!} + \tfrac{z^5}{5!} - \ldots + (-1)^n\tfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots,\\
&\qquad |z| < \infty,\\
\cos z &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\tfrac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \tfrac{z^2}{2!} + \tfrac{z^4}{4!} - \ldots + (-1)^n\tfrac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \quad |z| < \infty,\\
\operatorname{sh} z &= \sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z + \tfrac{z^3}{3!} + \tfrac{z^5}{5!} + \ldots + \tfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \quad |z| < \infty,\\
\operatorname{ch} z &= \sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 + \tfrac{z^2}{2!} + \tfrac{z^4}{4!} + \ldots + \tfrac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \quad |z| < \infty,\\
(1+z)^m &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}z^n = 1 + mz + \tfrac{m(m-1)}{2!}z^2 +\\
&\quad + \tfrac{m(m-1)(m-2)}{3!}z^3 + \ldots + \tfrac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}z^n + \ldots,\\
&\qquad m \in \mathbb{Z},\ |z| < 1.
\end{aligned}$$

Приведём некоторые частные случаи последней формулы.

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{1+z} &= 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots + (-1)^n z^n + \ldots, \quad |z| < 1,\\
\tfrac{1}{1-z} &= 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^n + \ldots, \quad |z| < 1.
\end{aligned}$$

Пример 5. Непосредственным вычислением $f^{(n)}(0)$ доказать следующую формулу:

$$\sin z = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad |z| < \infty.$$

Решение: Функция $\sin z$ аналитическая при $|z| < \infty$. Напишем ряд Тейлора для функции $\sin z$ в точке $z = 0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin^{(n)}(0)}{n!}z^n.$$

Найдём $\sin^{(n)}(0)$.

1) Пусть $n = 2k+1$, тогда $\sin^{(2k+1)}(0) = (-1)^k\cos(0) = (-1)^k,\ k = 0, 1, \ldots$
2) Пусть $n = 2k$, тогда $\sin^{(2k)}(0) = (-1)^k\sin(0) = 0, k = 0, 1, \ldots$

Тогда ряд Тейлора для функции $\sin z$ в точке $z = 0$ запишется в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Отсюда, в силу аналитичности функции $\sin z$, получим равенство:

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad |z| < \infty.$$

Пример 6. Разложить в степенной ряд в окрестности точки $z = 0$ функцию

$$f(z) = \frac{1}{3}\left(e^z + 2e^{-\frac{z}{2}} \cos\frac{z\sqrt{3}}{2}\right).$$

Решение: Запишем функцию $\cos\frac{z\sqrt{3}}{2}$ через показательную функцию по формуле Эйлера

$$\cos\frac{z\sqrt{3}}{2} = \frac{e^{i\frac{z\sqrt{3}}{2}} + e^{-i\frac{z\sqrt{3}}{2}}}{2}.$$

Тогда

$$2e^{-\frac{z}{2}} \cos\frac{z\sqrt{3}}{2} = e^{-\frac{z}{2}(1-i\sqrt{3})} + e^{-\frac{z}{2}(1+i\sqrt{3})}.$$

Опираясь на разложение $e^z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, получим:

$$e^{-\frac{z}{2}(1-i\sqrt{3})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\frac{z}{2})^n (1-i\sqrt{3})^n}{n!}$$

и

$$e^{-\frac{z}{2}(1+i\sqrt{3})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\frac{z}{2})^n (1+i\sqrt{3})^n}{n!}.$$

Запишем число $1 + i\sqrt{3}$ и $1 - i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме.

$$|1 + i\sqrt{3}| = |1 - i\sqrt{3}| = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

и

$$\arg(1 + i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}, \qquad \arg(1 - i\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}.$$

Поэтому

$$1 + i\sqrt{3} = 2(\cos(\frac{\pi}{3} + 2\pi k) + i\sin(\frac{\pi}{3} + 2\pi k)), \qquad k \in \mathbb{Z}$$

и

$$1 - i\sqrt{3} = 2(\cos(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k) + i\sin(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k)), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Возведём оба числа в степень n, получим

$$(1 + i\sqrt{3})^n = 2^n(\cos(\frac{\pi n}{3} + 2\pi kn) + i\sin(\frac{\pi n}{3} + 2\pi kn)), \qquad k \in \mathbb{Z}$$

и
$$(1-i\sqrt{3})^n = 2(\cos(\frac{\pi n}{3}+2\pi kn) - i\sin(\frac{\pi n}{3}+2\pi k)), \qquad k\in\mathbb{Z}.$$
Отсюда получим:
$$e^{-\frac{z}{2}(1+i\sqrt{3})} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\frac{z}{2})^n 2^n\cos\frac{\pi n}{3}}{n!} + i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\frac{z}{2})^n 2^n\sin\frac{\pi n}{3}}{n!}$$
и
$$e^{-\frac{z}{2}(1+i\sqrt{3})} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\frac{z}{2})^n 2^n\cos\frac{\pi n}{3}}{n!} + i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\frac{z}{2})^n 2^n\sin\frac{\pi n}{3}}{n!}.$$
Из полученных равенств имеем:
$$e^z + 2e^{-\frac{z}{2}}\cos\frac{z\sqrt{3}}{2} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z)^n\cos\frac{\pi n}{3}}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}.$$
Подставляя последовательно $n=1,\ 2,\ \ldots\ ,\ 6$, окончательно получим
$$f(z) = \frac{1}{3}\left(e^z + 2e^{-\frac{z}{2}}\cos\frac{z\sqrt{3}}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{3n}}{(3n)!}.$$

Пример 7. Разложить в степенной ряд функцию
$$f(z) = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

Решение: Запишем функцию $f(z) = \dfrac{1}{(1-z)^2}$ в виде
$$\frac{1}{(1-z)^2} = \left(\frac{1}{1-z}\right)'.$$
Отсюда, используя разложение $\frac{1}{1-z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$, получим
$$\frac{1}{(1-z)^2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}(z^n)' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n,\ \ |z|<1.$$

Пример 8. Разложить в степенной ряд в окрестности точки $z=0$ функцию
$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-2)}.$$

Решение: Запишем функцию $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z-2)}$ в виде:
$$\frac{1}{(z+1)(z-2)} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z-2}\right).$$

Разложим функцию $\dfrac{1}{z-2}$ в степенной ряд.

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}},\ |z|<2.$$

Окончательно получим

$$\frac{1}{(z+1)(z-2)} = -\frac{1}{3}\left((-1)^n z^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}\right),\ |z|<1.$$

Пример 9. Разложить в степенной ряд в окрестности точки $z=1$ функцию

$$f(z) = \operatorname{ch} z.$$

Решение: Представим функцию $\operatorname{ch} z$ в виде:

$$\operatorname{ch} z = \operatorname{ch}(z-1+1) = \operatorname{ch} 1 \operatorname{ch}(z-1) + \operatorname{sh} 1 \operatorname{sh}(z-1).$$

Обозначим $z-1=u$, тогда $\operatorname{ch}(z-1)=\operatorname{ch} u$ и $\operatorname{sh}(z-1)=\operatorname{sh} u$. Воспользуемся разложением в ряд Тейлора функции $\operatorname{ch} u$ и $\operatorname{sh} u$:

$$\operatorname{ch} u = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^{2n}}{(2n)!}, \qquad \operatorname{sh} u = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Откуда получим

$$\operatorname{ch} z = \operatorname{ch} 1 \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^{2n}}{(2n)!} + \operatorname{sh} 1 \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти области сходимости следующих степенных рядов:

234) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n (z-i)^n$.

235) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{z+i}{in}\right)^n$.

236) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{3^n n^3}$.

237) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(\dfrac{z+i}{1-i}\right)^n$.

Найти радиусы сходимости следующих степенных рядов:

238) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$.

239) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(in)^n}{n!} z^n$.

240) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (3+i^n)^n z^n$.

241) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n! e^{-n^2} z^n$.

242) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n z^n$.

243) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n+2^n) z^n$.

244) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (3+(-1)^n)^n (z-1+i)^n$.

Выяснить, в каких точках окружности круга сходимости сходятся следующие ряды:

245) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n\sqrt{n}}$.

246) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n \ln^2 n}$.

247) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$.

248) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(2n)! n!} (-1)^n z^{2n}$.

249) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n} z^{3n}$.

250) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{\pi i n^2}{2}}}{n} z^n$.

251) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{\pi i n^2}{2}}}{\sqrt{n}} z^n$.

Непосредственным вычислением $f^{(n)}(z_0)$ доказать формулы, справедливые для всех z:

252) $e^{az} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{az_0} \frac{a^n}{n!} (z-z_0)^n$.

253) $\operatorname{sh} az = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+1}$.

254) $\operatorname{ch} az = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n}}{(2n)!} z^{2n}$.

255) $\sin az = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+1}$.

256) $\cos az = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{a^{2n}}{(2n)!}z^{2n}$.

Опираясь на разложение $e^{az} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a^n}{n!}z^n$, доказать формулы:

257) $\cos\sqrt{z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{z^n}{(2n)!}$.

258) $\dfrac{1}{4}(e^z + e^{-z} + 2\cos z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^{4n}}{(4n)!}$.

259) $e^{z\operatorname{ctg}1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos n}{\sin^n 1}\cdot\dfrac{z^n}{n!}$.

Используя формулу суммы бесконечной геометрической прогрессии, путём почленного дифференцирования доказать формулы:

260) $\dfrac{2}{(1+z)^3} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(n+2)z^n,\ |z|<1$.

261) $\dfrac{1}{z^2+a^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n a^{-2n-2}z^{2n},\ |z|<|a|,\ a\neq 0$.

262) $\dfrac{1}{(1+z^2)^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)z^{2n},\ |z|<1$.

Разложив предварительно производные, путём почленного интегрирования доказать следующие формулы для главных значений многозначных функций:

263) $\ln(1+z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{z^n}{n},\ |z|<1$.

264) $\operatorname{arctg} z = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{z^{2n+1}}{2n+1},\ |z|<1$.

Указанные функции разложить в ряд Тейлора по степеням z и определить его радиус сходимости:

265) $\cos^2\dfrac{iz}{2}$.

266) $\operatorname{ch}^2\dfrac{z}{2}$.

267) $\dfrac{iz}{z^2+i}$.

268) $\dfrac{2z-5}{z^2-5z+6}$.

269) $\dfrac{z}{(z^2+1)(z^2-4)}$.

270) $\dfrac{z}{z^2+2z+2}$.

Разложить в ряд Тейлора:

271) e^z по степеням $(2z-1)$.

272) $\sin z$ по степеням $\left(z+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

273) $\cos(3z-1)$ по степеням $(z+1)$.

274) $\dfrac{1}{7z+3}$ по степеням $(z+2)$.

275) $\dfrac{1}{z^2+1}$ по степеням $(z-1)$.

§8. Ряды Лорана. Изолированные особые точки

8.1. Общие понятия

Среди рядов, отличных от степенных, наиболее близким к степенному является ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{(z-z_0)^n}=c_0+\frac{c_1}{(z-z_0)}+\frac{c_2}{(z-z_0)^2}+\ldots+\frac{c_n}{(z-z_0)^n}+\ldots,$$

где c_n и z_0 комплексные числа, а z комплексное переменное.

Если $z_0=0$, то получаем ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{z^n}=c_0+\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z^2}+\ldots+\frac{c_n}{z^n}+\ldots$$

Областью сходимости ряда вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{c_n}{(z-z_0)^n}$ является внешность круга с центром в точке z_0 и радиусом r с возможным добавлением точек, лежащих на границе этого круга. Радиус круга определяется по формулам

$$r=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}$$

и

$$r=\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|},$$

если пределы существуют.

Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{c_n}{(z-z_0)^n}$ при $|z-z_0|>r$ сходится абсолютно, а при $|z-z_0|<r$ расходится. Множество точек сходимости ряда на окружности $|z-z_0|=r$ может быть пустым, может полностью совпадать с ней, может в одних точках окружности сходиться, а в других расходиться.

Если радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{c_n}{(z-z_0)^n}$ число $r>0$, то областью сходимости ряда является внешность круга $|z-z_0|>r$. Если $r=\infty$, то область сходимости вырождается в бесконечно удалённую точку. Если $r=$

0, то областью сходимости является вся комплексная плоскость из которой выброшена точка $z = z_0$.

Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(z-z_0)^n}$ определяет функцию

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(z-z_0)^n}$$

для всех комплексных чисел, удовлетворяющих условию $|z - z_0| > R$, и, может быть, для некоторых или всех чисел , удовлетворяющих условию $|z - z_0| = R$. Функция $S(z)$ является аналитической в области сходимости $|z - z_0| > R$. Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(z-z_0)^n}$ определяет функцию

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(z-z_0)^n}$$

для всех комплексных чисел, удовлетворяющих условию $|z - z_0| > R$, и, может быть, для некоторых или всех чисел , удовлетворяющих условию $|z - z_0| = R$. Функция $S(z)$ является аналитической в области сходимости $|z - z_0| > R$.

Пример 1. Найти радиус сходимости и область сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{(z-i)^n}.$$

Решение: Найдём радиус сходимости ряда.

$$r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^n} = e.$$

Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{(z-i)^n}$ сходится абсолютно при $|z - i| > e$. Исследуем сходимость ряда на границе круга $|z-i| = e$. Для чего найдём модуль выражения, стоящего под знаком суммы, при $|z - i| = e$, а именно

$$\left|\frac{e^n}{(z-i)^n}\right| = 1.$$

Так как при $|z-i| = e$ не выполнен необходимый признак сходимости рядов

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{(z-i)^n} \neq 0,$$

то при $|z - i| = e$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{(z-i)^n}$ расходится. Таким образом, исследуемый ряд сходится во всех точках z, удовлетворяющих условию $|z - i| > e$.

В общем случае рассматривается ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n.$$

Этот ряд состоит из суммы двух рядов

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-z_0)^n \text{ и } \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n.$$

Он сходится тогда и только тогда, когда сходятся оба этих ряда. Как было сказано раньше, областью сходимости первого ряда является внешность круга с центром в точке z_0 и радиусом r. Областью сходимости второго ряда является внутренность круга с центром в точке z_0 и радиусом R.

Область сходимости ряда $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ есть:

1) пустое множество, если $r > R$,
2) кольцо $V_{R,r} := \{z|r < |z-z_0| < R\}$ с возможным добавлением точек, лежащих на границе этого кольца, если $r < R$.

Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ определяет функцию

$$S(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$$

для всех комплексных чисел, удовлетворяющих условию $r < |z-z_0| < R$, и, может быть, для некоторых или всех чисел, удовлетворяющих условию $|z-z_0| = r,\ |z-z_0| = R$. Функция $S(z)$ является аналитической в области сходимости $r < |z-z_0| < R$.

Пример 2. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{(z-3i)^n} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(z-3i)^n}{5^n n^5}$.

Решение: Найдём область сходимости ряда по отрицательным степеням $(z-3i)$, вычислив для этого

$$r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n} = 2.$$

Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{(z-3i)^n}$ сходится абсолютно при $|z-3i| > 2$. На границе круга $|z-3i| = 2$ этот ряд расходится, так как не выполнен необходимый признак сходимости

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{2^n}{(z-3i)^n}\right| = 1 \neq 0.$$

Исследуем второй ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-3i)^n}{5^n n^5}$. Вычислим для этого

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}(n+1)^5}{5^n n^5}=\lim_{n\to\infty}5\left(1+\frac{1}{n}\right)^5=5.$$

На окружности $|z-3i|=5$ ряд сходится абсолютно, так как

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(z-3i)^n}{5^n n^5}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{5^n n^5}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5}.$$

Следовательно, область сходимости второго ряда $|z-3i|\leqslant 5$. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(z-3i)^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-3i)^n}{5^n n^5}$$

сходится в кольце $2<|z-3i|\leqslant 5$.

Пример 3. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(z+2-4i)^n}+\sum_{n=1}^{\infty}n(z+2-4i)^n.$$

Решение: Найдём радиусы сходимости этих рядов

$$r=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$$

и

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1.$$

Получили $R=r$. Исследуем сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(z+2-4i)^n}$ на окружности $|z+2-4i|=1$. Он расходится, так как общий член не стремится к нулю. Таким образом, данный ряд всюду расходится.

8.2. Ряды Лорана

Пусть функция $f(z)$ аналитическая в кольце $V_{R,r}:=\{z\;|r<|z-z_0|<R\}$.

Ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n,\ c_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz,\ n\in\mathbb{Z},$$

где Γ – окружность $|z-z_0|=\rho,\ r<\rho<R$, называется рядом Лорана функции $f(z)$ в кольце $V_{R,r}:=\{z\;|r<|z-z_0|<R\}$.

В исследованиях о разложимости функции в ряд Лорана основными являются следующие утверждения:

1. Однозначная аналитическая в кольце $V_{R,r} := \{z\,|r < |z-z_0| < R\}$ функция $f(z)$ в каждой точке кольца $V_{R,r}$ единственным образом представляется сходящимся рядом Лорана.

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n,\ c_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-z_0)^n$$

называют главной частью ряда Лорана. Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$$

называют правильной частью ряда Лорана.

2. Если функция $f(z)$ аналитическая в круге $|z-z_0| < R$, то ряд Лорана в этом круге совпадает с рядом Тейлора для этой функции.

3. Любой ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ в кольце сходимости является рядом Лорана своей суммы

$$S(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n.$$

На практике, при разложении функции $f(z)$ в кольце $V_{R,r}$ в ряд Лорана, формула $c_n = \dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz,\ n \in \mathbb{Z}$ для вычисления коэффициентов ряда Лорана применяется редко. Для получения Лорановских разложений можно воспользоваться любым законным приемом. Часто при этом используются известные разложения функций в ряд Тейлора, которые приведены в предыдущем параграфе.

Пример 4. Функцию $f(z) = \dfrac{1}{z^2+4}$ разложить в ряд Лорана в кольце $V_{4,0} := \{z\,|0 < |z-2i| < 4\}$.

Решение: Запишем $f(z)$ в виде суммы простых дробей

$$f(z) = \frac{1}{z^2+4} = -\frac{i}{4(z-2i)} + \frac{i}{4(z+2i)} = -\frac{i}{4(z-2i)} + \frac{1}{16(1+\frac{(z-2i)}{4i})}.$$

Разложим в ряд Тейлора функцию $\dfrac{1}{16\left(1+\frac{z-2i}{4i}\right)}$. Так как $\left|\frac{z-2i}{4i}\right|<1$ в кольце $0<|z-2i|<4$, то воспользуемся разложением

$$\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n,\ |z|<1,$$

и получим

$$\frac{1}{16(1+\frac{(z-2i)}{4i})}=16\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{(z-2i)}{4i}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{4^{n+2}}(z-2i)^n.$$

Окончательно имеем

$$f(z)=\frac{1}{z^2+4}=-\frac{i}{4(z-2i)}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{4^{n+2}}(z-2i)^n.$$

Пример 5. Функцию $f(z)=ze^{\frac{1}{z-1}}$ разложить в ряд Лорана в кольце $V_{3,0}:=\{z\ |0<|z-1|<3\}$.

Решение: Обозначим $z-1=u$, тогда $f(z)=(u+1)e^{\frac{1}{u}}$. Воспользуемся разложением в ряд Тейлора показательной функции:

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}.$$

Откуда

$$e^{\frac{1}{u}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{u}\right)^n,\ |u|\neq 0.$$

Окончательно получим

$$f(z)=(u+1)e^{\frac{1}{u}}=(u+1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{u}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{u^{n-1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{u^n}=$$
$$=u+1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{u^n}+1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{u^n}=u+2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{(n+1)!}\frac{1}{u^n}=$$
$$=z+1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{(n+1)!}\frac{1}{(z-1)^n},\ |z-1|>0.$$

Пример 6. Разложить функцию

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

в ряд Лорана 1) в круге $|z| < 1$, 2) в кольце $V_{2,1} := \{z: \ 1 < |z| < 2\}$, 3) в кольце $V_{\infty,1} := \{z: \ 2 < |z| < \infty\}$.

Решение: Запишем $f(z)$ в виде суммы простых дробей

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = -\frac{1}{(z-1)} + \frac{1}{(z-2)}.$$

1) Так как функция $f(z)$ аналитична в круге $|z| < 1$, то ряд Лорана совпадает с рядом Тейлора для этой функции.
Воспользуемся формулой

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \ |z| < 1.$$

Откуда будем иметь:

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n, \ \left|\frac{z}{2}\right| < 1.$$

Таким образом,

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n, \ |z| < 1.$$

2) Для аналитической в круге $|z| < 2$ функции $\frac{1}{z-2}$ в кольце

$$V_{2,1} := \{z \ |1 < |z| < 2\}$$

справедливо разложение в ряд Тейлора

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n, \ |z| < 2,$$

приведенное в предыдущем пункте. А для функции $\dfrac{1}{1-z}$ будем иметь

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}, \ |z| > 1.$$

Окончательно

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}, \ 1 < |z| < 2.$$

3) При $|z| > 2$ дробь $\dfrac{1}{1-z}$ имеет то же разложение, что и в предыдущем пункте, а дробь $\dfrac{1}{z-2}$ разлагается следующим образом:

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\dfrac{2}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n}.$$

Итак,

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \sum_{n=1}^{\infty}(2^{n-1}-1)\frac{1}{z^n},\ |z| > 2.$$

8.3. Изолированные особые точки однозначного характера

Пусть функция f не является аналитической в точке $z = a$. Точка $z = a$ называется изолированной особой точкой функции f, если существует такая проколотая окрестность этой точки, т.е. кольцо $V_{R,0} := \{z \,|0 < |z| < R\}$, в котором функция f аналитическая.

Пусть $z = a$ – изолированная особая точка функции f. Рассмотрим разложение в кольце $V_{R,0}$ функции f в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n.$$

В зависимости от разложения различают три типа изолированных особых точек.

1. Если в разложении в ряд Лорана отсутствует главная часть, т.е. члены с отрицательными степенями

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n,$$

то точка $z = a$ называется устранимой особой точкой функции f.

При подходе к устранимой особой точке $z = a$ функция f имеет конечный предел, и если его принять в качестве значения функции в точке $z = a$, то f становится аналитической в точке $z = a$.

2. Если в разложении в ряд Лорана главная часть содержит конечное число членов

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{-1} c_n(z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n,\ m > 0,\ c_m \neq 0,$$

то точка $z = a$ называется полюсом порядка m функции f.

Изолированная особая точка $z = a$ функции f является полюсом тогда и только тогда, когда

$$\lim_{z \to a} f(z) = \infty.$$

Пусть функция $\varphi(z)$ аналитическая в точке $z = a$. Точка $z = a$ называется нулем порядка k функции $\varphi(z)$, если

$$\varphi(z_0) = \varphi'(z_0) = ... = \varphi^{(k-1)}(z_0) = 0, \ \varphi^{(k)}(z_0) \neq 0.$$

Если в точке z_0 функция $\varphi(z)$ имеет нуль порядка k, то в её разложении в ряд Тейлора будут отсутствовать первые k членов, а именно:

$$\varphi(z) = \frac{\varphi^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k + \frac{\varphi^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!}(z - z_0)^{k+1} + ... =$$

$$= c_k(z - z_0)^k + c_{k+1}(z - z_0)^{k+1} + ... = \sum_{n=k}^{\infty} c_n(z - z_0)^n =$$

$$= (z - z_0)^k \sum_{n=k}^{\infty} c_n(z - z_0)^{n-k} = (z - z_0)^k \psi(z),$$

где функция $\psi(z)$ аналитическая в точке z_0 и $\psi(z_0) \neq 0$.

Точка $z = a$ является полюсом порядка m функции f тогда и только тогда, когда функция $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$ аналитическая в точке $z = a$ и точка $z = a$ её нуль порядка m.

3. Если в разложении в ряд Лорана главная часть содержит бесконечное число членов

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n,$$

то точка $z = a$ называется существенно особой точкой функции f.

Для того, чтобы изолированная особая точка $z = a$ была существенно особой точкой функции f, необходимо и достаточно, чтобы f не имела предела при $z \to a$.

Рассмотрим однозначную функцию $f(z)$, аналитическую вне круга $|z| > R$, за исключением, быть может, бесконечно удалённой точки. Выполним преобразование $\xi = \dfrac{1}{z}$. Сведём изучение функции $f(z)$ к изучению функции $\psi(\xi) = f(\frac{1}{\xi}) = f(z)$ в окрестности точки $\xi = 0$. Точка $z = \infty$ называется устранимой особой точкой функции $f(z)$, если точка $\xi = 0$ будет устранимой особой точкой функции $\psi(\xi)$. Точка $z = \infty$ называется полюсом порядка m функции $f(z)$, если точка $\xi = 0$ будет полюсом порядка m функции $\psi(\xi)$. Точка $z = \infty$ называется существенно особой точкой функции $f(z)$, если точка $\xi = 0$ будет существенно особой точкой функции $\psi(\xi)$.

Пример 7. Найти изолированные особые точки функции

$$f(z)=\frac{\sin z(z^2+4)}{z}$$

и определить их тип.

Решение: Найдём точки, где функция $f(z)$ не определена. Такими точками являются точки $z=0$ и $z=\infty$.

Исследуем поведение функции в окрестности точки $z=0$. Так как

$$\lim_{z\to 0}f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z(z^2+4)}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}(z^2+4)=4,$$

то точка $z=0$ является устранимой особой точкой.

Исследуем поведение функции в окрестности точки $z=\infty$. Выполнив преобразование $z=\dfrac{1}{\xi}$, будем иметь:

$$\psi(\xi)=f\left(\frac{1}{\xi}\right)=\xi\sin\frac{1}{\xi}\left(\left(\frac{1}{\xi}\right)^2+4\right)=\frac{1}{\xi}\sin\frac{1}{\xi}(1+4\xi^2)=\frac{1}{\xi}\sin\frac{1}{\xi}+4\xi\sin\frac{1}{\xi}.$$

Разложим функцию $\sin\frac{1}{\xi}$ в окрестности точки $\xi=0$ в ряд Лорана

$$\sin\frac{1}{\xi}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\frac{1}{\xi^{2n+1}}}{(2n+1)!}=\frac{1}{\xi}-\frac{(\frac{1}{\xi})^3}{3!}+\frac{(\frac{1}{\xi^5}}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{\frac{1}{\xi^{2n+1}}}{(2n+1)!}+\ldots,\ |\xi|>0.$$

Окончательно получим

$$\psi(\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\frac{1}{\xi^{2n+2}}}{(2n+1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\frac{1}{\xi^{2n}}}{(2n+1)!}.$$

В разложении ряда Лорана функции $\psi(\xi)$ в окрестности точки $\xi=0$ главная часть содержит бесконечное число членов, поэтому точка $\xi=0$ является существенно особой точкой функции $\psi(\xi)$. А точка $z=\infty$ существенно особой точкой функции $f(z)$.

Пример 8. Найти изолированные особые точки функции

$$f(z)=\frac{1}{(z+2i)^2(z-i)}$$

и определить их тип.

Решение: Найдём точки, где функция $f(z)$ не определена. Такими точками являются точки $z=-2i$ и $z=i$.

Исследуем поведение функции в окрестности точки $z=-2i$. Рассмотрим функцию

$$\varphi(z)=\frac{1}{f(z)}=(z+2i)^2(z-i)=(z+2i)^2\psi(z),$$

где $\psi(z) = (z - i)$, $\psi(-2i) = -3i \neq 0$. Откуда следует, что $z = -2i$ нуль второго порядка функции $\varphi(z)$, а значит $z = -2i$ полюс второго порядка функции $f(z)$.

Исследуем поведение функции в окрестности точки $z = i$. Рассмотрим функцию

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z)} = (z + 2i)^2(z - i) = (z - i)^2\psi(z),$$

где $\psi(z) = (z + 2i)^2$, $\psi(i) = -9 \neq 0$. Откуда следует, что $z = i$ нуль первого порядка функции $\varphi(z)$, а значит $z = i$ полюс первого порядка функции $f(z)$.

Пример 9. Найти изолированные особые точки функции

$$f(z) = ze^{\frac{1}{z-1}}$$

и определить их тип.

Решение: Найдём точки, где функция $f(z)$ не определена. Такими точками являются точки $z = 1$ и $z = \infty$.

Исследуем поведение функции в окрестности точки $z = 1$. Разложим функцию $ze^{\frac{1}{z-1}}$ в окрестности точки $z = 1$ в ряд Лорана (см. пример 5), получим:

$$f(z) = z + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{(n+1)!} \frac{1}{(z-1)^n}, \ |z - 1| > 0.$$

Из этого разложения следует, что $z = 1$ является существенно особой точкой.

Исследуем поведение функции в окрестности точки $z = \infty$. Выполнив преобразование $z = \frac{1}{\xi}$, получим :

$$\nu(\xi) = f\left(\frac{1}{\xi}\right) = \frac{1}{\xi}e^{\frac{1}{\frac{1}{\xi}-1}} = \frac{1}{\xi}e^{\frac{\xi}{1-\xi}}.$$

Исследуем поведение функции $\nu(\xi)$ в окрестности точки $\xi = 0$. Рассмотрим функцию

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\nu(\xi)} = \xi\frac{1}{e^{\frac{\xi}{1-\xi}}} = \xi\psi(\xi),$$

где $\psi(\xi) = \frac{1}{e^{\frac{\xi}{1-\xi}}}$, $\psi(0) = 1 \neq 0$. Откуда следует, что $\xi = 0$ нуль первого порядка функции $\varphi(\xi)$, а значит $\xi = 0$ полюс первого порядка функции $\nu(\xi)$. А точка $z = \infty$ является нулём первого порядка функции $f(z) = ze^{\frac{1}{z-1}}$.

Пример 10. Определить тип изолированной особой точки $z = 0$ функции

$$f(z) = \frac{\sin 3z - 3\sin z}{\sin z(\sin z - z)}.$$

Решение: Рассмотрим функцию

$$\varphi(z)=\frac{1}{f(z)}=\frac{\sin z(\sin z-z)}{\sin 3z-3\sin z}=\frac{(z-\frac{1}{6}z^3+\ldots)(-\frac{1}{6}z^3+\ldots)}{3z-\frac{9}{2}z^3+\ldots-3z+\frac{1}{2}z^3+\ldots}=$$

$$=\frac{-\frac{1}{6}z^4+\ldots}{-4z^3+\ldots}=\frac{z^4(-\frac{1}{6}+\ldots)}{z^3(-4+\ldots)}=z\frac{-\frac{1}{6}+\ldots}{(-4+\ldots)}=z\psi(z),$$

где $\psi(z)=\frac{-\frac{1}{6}+\ldots}{(-4+\ldots)}$, $\psi(0)=\frac{1}{24}\neq 0$. Откуда следует, что $z=0$ нуль первого порядка функции $\varphi(z)$, а значит $z=0$ полюс первого порядка функции $f(z)$.

Задачи для самостоятельного решения

Найти области сходимости следующих рядов:

276) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(\sqrt{2}+i\sqrt{2})^n}{(z-i)^n}$.

277) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n+n^3}{(z+2i)^n}$.

278) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3n^2+1}\left(\dfrac{4+3i}{z+1}\right)^n$.

279) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{z}{3}\right)^n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2}{z}\right)^n$.

280) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{z}{2}\right)^n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3}{z}\right)^n$.

281) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n-n^2}{(z+2)^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z+2)^n}{(n+i)^n}$.

282) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{i\,\mathrm{sh}\,n}{(z-i)^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-i)^n}{n^2}$.

283) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-2i)^{-n}}{n!}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-2i)^n}{n^2+1}$.

284) $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\dfrac{(z+3i)^n}{n^4+3}$.

285) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}z^{-n}\,\mathrm{ch}\,\dfrac{i}{n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{z}{\ln in}\right)^n$.

286) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\mathrm{sh}^n(1+i\frac{\pi n}{2})}{(z-i)^n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin in}{7^n n^2}(z-i)^n$.

287) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-2-i)^{-n}}{(2+(-1)^n)^n}$.

288) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(z+1+i)^{-n}}{5^n(2+(-1)^n)^n} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(z+1+i)^n(2+(-1)^n)^n}{5^n}$.

Разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z = z_0$ следующие функции:

289) $z^4 \sin^2 \dfrac{1}{z}$, $z_0 = 0$.

290) $\cos \dfrac{i}{z} + \dfrac{z}{z-1}$, $z_0 = 0$.

291) $\dfrac{1}{(z+2)z}$, $z_0 = -2$.

292) $\dfrac{1}{(z-3)^2 z}$, $z_0 = 1$.

293) $z \cos \dfrac{1}{2z+1}$, $z_0 = -\dfrac{1}{2}$.

294) $\sin \dfrac{z}{z-1}$, $z_0 = 1$.

Разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z = \infty$ следующие функции:

295) $\dfrac{z}{2z+5}$.

296) $\dfrac{3z}{z^2-1}$.

297) $z^2 e^{\frac{1}{z}}$.

298) $\dfrac{z}{z^2+2z+2}$.

Разложить в ряд Лорана по степеням $z - z_0$ в указанном кольце следующие функции:

299) $\dfrac{1}{z(z-3)^2}$, $(z_0 = 1,\ 1 < |z-1| < 2)$.

300) $\dfrac{1}{z^2(z^2-9)}$, $(z_0 = 1,\ 1 < |z-1| < 2)$.

301) $\dfrac{z+i}{z^2}$, $(z_0 = i,\ 0 < |z| < 2)$.

302) $\dfrac{z^2-1}{z^2+1}$, $(z_0 = 1,\ 0 < |z| < 3)$.

303) $\dfrac{1}{z(z-1)(z-2)}$, $(z_0 = 0,\ 1 < |z| < 2)$.

304) $\dfrac{2z}{z^2-2i}$, $(z_0 = 1,\ 0 < |z| < 2)$.

305) $\dfrac{z^3}{(z+1)(z-2)}$, $(z_0 = -1,\ 0 < |z+1| < 3)$.

306) $\dfrac{1}{(z^2-1)(z^2+4)}$, $(z_0 = 0,\ 2 < |z| < 10)$.

307) $z^3 e^{\frac{1}{z}}$, $(z_0 = 0,\ 0 < |z| < \infty)$.

308) $z^2 \sin\pi\dfrac{z+1}{z}$, $(z_0=0,\ 0<|z|<\infty)$.

309) $z^3 \cos\dfrac{1}{z-2}$, $(z_0=2,\ 0<|z-2|<\infty)$.

310) $\dfrac{e^z}{z(1-z)}$, $(z_0=0,\ 0<|z|<\infty)$.

311) $\dfrac{e^{\frac{1}{z-1}}}{z(1+z)}$, $(z_0=1,\ 1<|z-1|<2)$.

Доказать, что точка $z=z_0$ является устранимой особой точкой для следующих функций:

312) $\dfrac{z^2-1}{z-1}$, $(z_0=1)$.

313) $\dfrac{\sin z}{z}$, $(z_0=0)$.

314) $\dfrac{z}{\operatorname{tg} z}$, $(z_0=0)$.

315) $\dfrac{1-\cos z}{z^2}$, $(z_0=0)$.

316) $\operatorname{ctg} z-\dfrac{1}{z}$, $(z_0=0)$.

317) $\dfrac{1}{e^z-1}-\dfrac{1}{\sin z}$, $(z_0=0)$.

318) $\dfrac{z^2-1}{z^3+1}$, $(z_0=\infty)$.

Доказать, что точка $z=z_0$ является полюсом для следующих функций:

319) $\dfrac{1}{z}$, $(z_0=0)$.

320) $\dfrac{1}{(z^2+1)^2}$, $(z_0=i)$.

321) $\dfrac{z^2+1}{z+1}$, $(z_0=\infty)$.

322) $\dfrac{z}{1-\cos z}$, $(z_0=0)$.

323) $\dfrac{z}{(e^z-1)^2}$, $(z_0=0)$.

324) $\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{z}$, $(z_0=\infty)$.

325) $\dfrac{z}{e^z+1}$, $(z_0=\pi i)$.

326) $\operatorname{tg}\pi z$, $(z_0=\dfrac{1}{2})$.

Доказать, что точка $z=z_0$ является существенно особой точкой функций:

327) e^z, $(z_0=\infty)$.

328) e^{-z^2}, $(z_0 = \infty)$.

329) $\sin\dfrac{\pi}{z^2}$, $(z_0 = 0)$.

330) $z^2\cos\dfrac{\pi}{z}$, $(z_0 = 0)$.

331) $\cos\dfrac{z}{z+1}$, $(z_0 = -1)$.

Найти все изолированные особые точки однозначного характера и определить их тип для следующих функций:

332) $\dfrac{1}{z^3}e^{iz}$.

333) $\operatorname{tg}\dfrac{1}{z}$.

334) $\dfrac{z^2}{\cos z - 1}$.

335) $\dfrac{z^4+1}{z^4-1}$.

336) $z\cos\dfrac{1}{z} - z$.

§9. Вычеты и их применения

9.1. Вычет относительно изолированной конечной точки

Вычетом аналитической функции f относительно её изолированной особой точки $z = a$ называется коэффициент c_{-1} при первой отрицательной степени разложения функции f в ряд Лорана в окрестности этой точки.

Обозначение вычета:

$$c_{-1} = \operatorname*{res}_a f(z).$$

Принимая во внимание интегральное преставление для коэффициентов ряда Лорана, имеем

$$\operatorname*{res}_a f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(z)dz,$$

где Γ окружность с центром в точке $z = a$, $\Gamma \subset O_a$ (O_a - окрестность точки, где функция f аналитическая).

Заметим, что в случае когда $z = a$ устранимая особая точка, $\operatorname*{res}_a f(z) = 0$. Если $z = a$ – полюс первого порядка, то $\operatorname*{res}_a f(z) \neq 0$. В остальных случаях $\operatorname*{res}_a f(z)$ может быть равным, а может и не быть равным нулю.

Пусть $z = a$ полюс функции f порядка m. Вычет функции f в точке $z = a$ может быть найден по формуле:

$$\operatorname*{res}_a f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (f(z)(z-a)^{m-1}).$$

Для полюса первого порядка получим

$$\operatorname*{res}_a f(z) = \lim_{z \to a} f(z)(z-a).$$

Часто оказывается полезной небольшая модификация последней формулы.

Пусть функция f в окрестности полюса первого порядка $z = a$ имеет вид

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ аналитические в точке $z = a$ функции, причём $\varphi(a) \neq 0$, $\psi(a) = 0$, $\psi'(a) \neq 0$, имеем

$$\operatorname*{res}_a f(z) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

Пример 1. Найти $\operatorname*{res}_1 z e^{\frac{1}{z-1}}$.

Решение: В примере предыдущего параграфа мы нашли разложение этой функции в окрестности точки $z = 1$ в ряд Лорана, а именно:

$$f(z) = z + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{(n+1)!} \frac{1}{(z-1)^n}, \; |z-1| > 0.$$

Из этого разложения следует, что $c_1 = \frac{3}{2}$, т.е. $\operatorname*{res}_1 z e^{\frac{1}{z-1}} = \frac{3}{2}$.

Пример 2. Найти $\operatorname*{res}_0 \dfrac{\cos z - 1}{z^2 \sin z}$.

Решение: В точке $z = 0$ данная функция имеет полюс первого порядка, так как

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{z^2 \sin z}{\cos z - 1} = -\frac{z^2 \cos \frac{z}{2}}{\sin \frac{z}{2}} = -z \frac{z \cos \frac{z}{2}}{\sin \frac{z}{2}} = z\varphi(z),$$

где

$$\varphi(z) = -\frac{z \cos \frac{z}{2}}{\sin \frac{z}{2}} \quad \text{и} \quad \lim_{z \to 0} \varphi(z) = -2.$$

Отсюда получим, что

$$\operatorname*{res}_0 f(z) = \lim_{z \to 0} z f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{1}{\varphi(z)} = -\frac{1}{2}.$$

Пример 3. Найти $\operatorname*{res}_{\frac{\pi k}{2}} \operatorname{ctg} 2z, \; k \in \mathbb{Z}$.

Решение: В точке $z = \frac{\pi k}{2}$ данная функция имеет полюс первого порядка, так как

$$\operatorname{ctg} 2z = \frac{\cos 2z}{\sin 2z}, \ \cos \pi k \neq 0, \ \sin \pi k = 0, \ (\sin 2z)'|_{z=\frac{\pi k}{2}} = 2\cos 2z|_{z=\frac{\pi k}{2}} \neq 0.$$

Воспользуемся формулой для вычисления вычета в случае полюса первого порядка:

$$\operatorname*{res}_{\frac{\pi k}{2}} \operatorname{ctg} 2z = \left[\frac{\cos 2z}{\sin 2z}\right]_{z=\frac{\pi k}{2}} = \left[\frac{\cos 2z}{2\cos 2z}\right]_{z=\frac{\pi k}{2}} = \frac{1}{2}.$$

В случае, когда функция f определена формулой $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ имееют в точке $z = a$ нули порядка выше первого, для вычисления вычета удобно заменить функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ некоторым количеством членов их разложения в ряд Тейлора в окрестности точки $z = a$.

Пример 4. Найти $\operatorname*{res}\limits_0 \dfrac{\sin 3z - 3\sin z}{\sin z(\sin z - z)}$.

Решение: Как показано в примере 10 предыдущего параграфа, в точке $z = 0$ данная функция имеет полюс первого порядка. Воспользуемся представлением (см. пример 10)

$$f(z) = \frac{\sin 3z - 3\sin z}{\sin z(\sin z - z)} = \frac{1}{z}\frac{(-4 + ...)}{-\frac{1}{6} + ...}.$$

Откуда

$$\operatorname*{res}_0 f(z) = \lim_{z\to 0} z f(z) = \lim_{z\to 0} z\frac{1}{z}\frac{(-4 + ...)}{-\frac{1}{6} + ...} = 24.$$

Пример 5. Найти $\operatorname*{res}\limits_0 \dfrac{z^2 + z - 1}{z^2(z-1)}$.

Решение: Покажем, что в точке $z = 0$ данная функция имеет полюс второго порядка. Рассмотрим функцию

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{z^2(z-1)}{z^2 + z - 1} = z^2\frac{z-1}{z^2 + z - 1} = z^2\psi(z),$$

где $\psi(z) = \dfrac{z-1}{z^2 + z - 1}$, $\psi(0) = 1 \neq 0$. Откуда следует, что $z = 0$ нуль второго порядка функции $\varphi(z)$, а значит $z = 0$ полюс второго порядка функции $f(z)$. Найдём

$$\operatorname*{res}_0 f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}(z^2 f(z)) = \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(\frac{z^2 + z - 1}{z^2(z-1)}\right) = \lim_{z\to 0}\frac{z^2 - 2z}{(z-1)^2} = 0.$$

9.2. Вычет относительно бесконечности

Пусть $z = \infty$ изолированная особая точка функции f.

Вычетом функции f относительно бесконечности называется коэффициент c_{-1} при первой отрицательной степени разложения функции f в ряд Лорана в окрестности бесконечности, умноженный на -1.

Обозначение вычета:

$$\operatorname*{res}_{\infty} f(z) = -c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma^-} f(z)dz$$

где Γ окружность с центром в точке $z = 0$, $\Gamma \subset O_\infty$ (функция f аналитическая в окрестности $O_\infty = \{z\ |r < |z| < \infty\}$).

Пример 6. Найти $\operatorname*{res}_{\infty} \dfrac{1}{1-z}$.

Решение: Для функции $\dfrac{1}{1-z}$ при $|z| > 1$ справедливо представление:

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n},\ |z| > 1.$$

По определению $\operatorname*{res}_{\infty} \frac{1}{1-z} = -c_{-1} = 1$.

Сумма вычетов функции f во всех её конечных особых точках $a_k,\ k = 1, 2, ..., n$ и вычета на бесконечности равна нулю:

$$\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{a_k} f(z) + \operatorname*{res}_{\infty} f(z) = 0.$$

Пример 7. Найти $\operatorname*{res}_{\infty} \dfrac{15z^3 - 11z^2 + 4z + 6}{2z^2(z^2-1)}$.

Решение: Представим функцию f в виде суммы простых дробей:

$$f(z) = \frac{2}{z} - \frac{3}{z^2} + \frac{4}{z+1} + \frac{3}{2(z-1)}.$$

Особыми точками функции f являются точки

$$z_1 = 0,\ z_2 = -1,\ z_3 = 1,\ z_4 = \infty.$$

Поскольку точки $z_1,\ z_2,\ z_3$ полюсы первого порядка, то

$$\operatorname*{res}_{0} f(z) = 2,\ \operatorname*{res}_{-1} f(z) = 4,\ \operatorname*{res}_{1} f(z) = \frac{3}{2}.$$

Согласно формуле

$$\operatorname*{res}_{0} f(z) + \operatorname*{res}_{-1} f(z) + \operatorname*{res}_{1} f(z) + \operatorname*{res}_{\infty} f(z) = 0$$

получим

$$\operatorname*{res}_{\infty} f(z) = -\operatorname*{res}_{0} f(z) - \operatorname*{res}_{-1} f(z) - \operatorname*{res}_{1} f(z) = -7,5.$$

9.3. Вычисление интегралов с помощью вычетов

Если функция $f(z)$ аналитическая в области D, кроме конечного числа особых точек $a_k, k = 1, 2, \ldots, n$ и аналитична на границе Γ области D, ориентированной положительно относительно области D, тогда

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{a_k} f(z).$$

Пример 8. Вычислить интеграл $\int\limits_{\Gamma} \frac{1}{z^2+1} dz$, где кривая Γ – граница области $G: \ |z| < 2$.

Решение: Функция $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ имеет две изолированные особые точки $z_1 = i, z_2 = -i$ полюсы первого порядка. Обе эти точки содержатся внутри круга $|z| \leqslant 2$. Поскольку

$$\operatorname*{res}_{i} f(z) = \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{1}{(z-i)(z+i)} = \lim_{z\to i}\frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i}$$

и аналогично

$$\operatorname*{res}_{-i} f(z) = \lim_{z\to -i}(z+i)f(z) = \lim_{z\to -i}(z+i)\frac{1}{(z-i)(z+i)} = \lim_{z\to -i}\frac{1}{z-i} = -\frac{1}{2i},$$

то по формуле

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i(\operatorname*{res}_{i} f(z) + \operatorname*{res}_{-i} f(z))$$

получим $\int\limits_{\Gamma} \frac{1}{z^2+1} dz = \frac{1}{2i} - \frac{1}{2i} = 0$.

Пример 9. Вычислить интеграл $\int\limits_{\Gamma} ze^{\frac{1}{z-1}} dz$, где кривая Γ – граница области $G: \ |z-1| < 3$.

Решение: Функция $f(z) = ze^{\frac{1}{z-1}}$ имеет одну изолированную особую точку $z = 1$ внутри круга G. Как показано в примере 5 предыдущего параграфа, функция $ze^{\frac{1}{z-1}}$ в окрестности точки $z = 1$ раскладывается в ряд Лорана

$$ze^{\frac{1}{z-1}} = z + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{(n+1)!} \frac{1}{(z-1)^n}, \ |z-1| > 0.$$

Поэтому $c_{-1} = \operatorname*{res}_{1} ze^{\frac{1}{z-1}} = \frac{3}{2}$. Окончательно получим

$$\int\limits_{\Gamma} ze^{\frac{1}{z-1}}dz = 2\pi i\frac{3}{2} = 3\pi i.$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить:

337) $\operatorname*{res}_{0} \dfrac{\sin z}{z^2}$.

338) $\operatorname*{res}_{\infty} e^{\frac{1}{z}}$.

339) $\operatorname*{res}_{1} \dfrac{e^z}{(z-1)^2}$.

340) $\operatorname*{res}_{\infty} z^2 \sin\dfrac{\pi}{z}$.

341) $\operatorname*{res}_{\frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos z}{z-\frac{\pi}{4}}$.

342) $\operatorname*{res}_{0} \sin z \sin\dfrac{1}{z}$.

343) $\operatorname*{res}_{-1} \sin\dfrac{z}{z+1}$.

Найти вычеты следующих функций во всех их конечных особых точках:

344) $\dfrac{1}{(z^2+1)(z-1)^2}$.

345) $\dfrac{z^2}{(z+1)^3}$.

346) $\dfrac{\cos z}{(z-2)^2}$.

347) $\dfrac{\sin \pi z}{(z-3)^3}$.

348) $\operatorname{tg} z$.

349) $\operatorname{cth} z$.

350) $\operatorname{cth}^2 \pi z$.

351) $\dfrac{1}{e^z+1}$.

352) $\dfrac{\operatorname{ch} z}{(z^2+1)(z-3)}$.

Найти вычеты следующих функций в бесконечности:

353) $\dfrac{z^4+1}{z^6-1}$.

354) $\cos\dfrac{\pi(z+2)}{2z}$.

355) $\dfrac{\sin\frac{1}{z}}{z-1}$.

356) $\dfrac{\cos^2\frac{\pi}{z}}{z+1}$.

Вычислить с помощью теории вычетов:

357) задачи 210) – 233).

Вычислить интеграл $\int\limits_{\Gamma} f(z)dz$, где Γ – положительно ориентированная граница области G:

358) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma}\frac{z^2}{\sin^3 z\cos z}dz,\ G: |z|>1.$

359) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma}\frac{e^z}{(z-\pi i)^2}dz,\ G: |z|>4.$

360) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma}\frac{\cos z}{z^3}dz,\ G: |z|<1.$

361) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma}\left(\sin\frac{1}{z^2}+e^{z^2}\cos z\right)dz,\ G: |z|<1.$

362) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma}\frac{z^3e^{\frac{1}{z}}}{1+z}dz,\ G: |z|<2.$

363) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma}\frac{z}{e^{z^2}-1}dz,\ G: |z|>4.$

364) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma}\frac{z^3}{e^{z^2}-1}dz,\ G: |z|<4.$

365) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma}z^2\sin\frac{1}{z}dz,\ G: |z|>1.$

366) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma}\frac{\cos\frac{z}{2}}{z^2-4}dz,\ G: |z-3|+|z+3|<10.$

Ответы

2) $4-i,\ 2-3i,\ 5+i,\ \frac{1}{2}-i\frac{5}{2}$. **3)** $19-2i,\ 15,\ 33-19i,\ 7+3i$. **4)** $12-i,\ -2-5i,\ 41-11i,\ \frac{29}{53}-i\frac{31}{53}$. **5)** $5-8i,\ 3-2i,\ -11-17i,\ \frac{19}{10}+i\frac{7}{10}$. **6)** 24. **7)** $21-20i$. **8)** $8i$. **9)** $18+26i$. **10)** $\frac{13}{61}+i\frac{21}{61}$. **11)** $\frac{7}{41}-i\frac{19}{41}$. **12)** $\frac{7}{5}+i\frac{4}{5}$. **13)** $i\frac{14}{5}$. **14)** $\frac{44}{318}-i\frac{5}{318}$. **15)** $\operatorname{Re} z=\frac{1}{2},\ \operatorname{Im} z=\frac{1}{2}$. **16)** $\operatorname{Re} z=0,\ \operatorname{Im} z=1$. **17)** $\operatorname{Re} z=-1,\ \operatorname{Im} z=0$. **18)** $\operatorname{Re} z=-2,\ \operatorname{Im} z=\frac{3}{2}$. **19)** $|z|=1,\ \arg z=\frac{\pi}{2}$. **20)** $|z|=3,\ \arg z=\pi$. **21)** $|z|=\sqrt{2},\ \arg z=-\frac{\pi}{4}$. **22)** $|z|=3,\ \arg z=\frac{\pi}{2}$. **23)** $|z|=\sqrt{2},\ \arg z=\frac{\pi}{4}$. **24)** $|z|=2,\ \arg z=-\frac{\pi}{6}$. **25)** $|z|=2,\ \arg z=-\frac{2\pi}{3}$. **26)** $|z|=2,\ \arg z=-\frac{\pi}{3}$. **27)** $|z|=\sqrt{2},\ \arg z=-\frac{\pi}{2}$. **28)** $|z|=5,\ \arg z=\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$. **29)** $|z|=5,\ \arg z=\operatorname{arctg}\frac{4}{3}-\pi$. **30)** $|z|=1,\ \arg z=\frac{2\pi}{3}$. **31)** $|z|=1,\ \arg z=-\frac{\pi}{2}$. **32)** $|z|=1,\ \arg z=\frac{6\pi}{7}$. **33)** $|z|=125,\ \arg z=-\frac{\pi}{2}$. **34)** $|z|=\frac{1}{4},\ \arg z=0$. **35)** $|z|=\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{14},\ \arg z=\frac{\pi}{14}$. **47)** Полуплоскость, расположенная справа от мнимой оси (точки оси не включаются). **48)** Полуплоскость, расположенная ниже горизонтальной прямой, проходящей через точку $z=i$ (точки этой прямой не включаются). **49)** Полоса, состоящая из точек, расстояние которых до мнимой оси меньше единицы. **50)** Прямоугольник с вершинами в точках$-i,\ 1-i,\ 1+i,\ i$(стороны не включаются). **51)** Круг радиуса 1 с центром в точке $z=0$ (включая окружность). **52)** Вся плоскость, из которой удалён круг радиуса 1 с центром в точке $z=i$, вместе с его окружностью. **53)** Круг радиуса 2 с центром в точке $z=-i$, которая удалена (окружность круга не включается). **54)** Кольцо между окружностями радиусов 1 и 3 с общим центром в точке $z=1$ (окружности не включаются). **55)** Угол раствора $\frac{\pi}{4}$ с вершиной в точке $z=0$, расположенный выше действительной оси, являющейся одной из его сторон (стороны угла не включаются). **56)** Угол раствора $\frac{\pi}{2}$ с вершиной в точке $z=0$, биссектрисой которого является отрицательная часть действительной оси (стороны угла не включаются). **57)** Гипербола $xy=1$. **58)** Гипербола $x^2-y^2=1$. **59)** Окружность $x^2+(y+1)^2=1$. **60)** Окружность $(x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{4}$. **61)** Гипербола $2(x^2-y^2)=1$. **62)** Парабола $y^2=2x+1$. **63)** $z_1=1,\ z_2=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\ z_3=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$. **64)** $z_1=-i,\ z_2=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2},\ z_3=-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$. **65)** $z_1=\cos\frac{\pi}{8}-i\sin\frac{\pi}{8},\ z_2=-\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8},\ z_3=\sin\frac{\pi}{8}+i\cos\frac{\pi}{8},\ z_4=-\sin\frac{\pi}{8}-i\cos\frac{\pi}{8}$. **66)** $z_1=1+i,\ z_2=1-i,\ z_3=-1-i,\ z_4=-1+i$. **67)** $z_1=i\sqrt{3},\ z_2=-i\sqrt{3},\ z_3=\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\ z_4=-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2},\ z_5=\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2},\ z_6=-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

68) $z_1=-1-i,\ z_2=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}),\ z_3=\sqrt{2}(-\sin\frac{\pi}{12}+i\cos\frac{\pi}{12})$. **69)** $z_1=\sqrt[4]{2}(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}),\ z_2=\sqrt[4]{2}(-\cos\frac{\pi}{8}-i\sin\frac{\pi}{8})$. **70)** $z_1=2-i,\ z_2=-2+i$. **71)** $z_1=1-2i,\ z_2=-1-2i$. **72)** $z_1=\sqrt{3}+i,\ z_2=-\sqrt{3}-i$. **73)** 2^{10}. **74)** $-2^6(1+i)$. **75)** 1. **76)** $2^9(1+i\sqrt{3})$. **77)** $z_1=\frac{1+i}{\sqrt{2}},\ z_2=-\frac{1+i}{\sqrt{2}}$. **78)** $z_1=2-i,\ z_2=-2+i$. **79)** $z_1=1,\ z_2=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\ z_3=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$. **80)** $z_k=2\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^k,\ k=0,1,2,3,4,5$. **81)** $z_k=e^{\frac{2k+1}{7}\pi i},\ k=0,1,2,3,4,5,6$. **82)** $z_k=\sqrt[16]{2}e^{\frac{\pi i}{4}(k+\frac{1}{8})},\ k=0,1,2,3,4,5,6,7$. **83)** $z_1=1+i,\ z_2=1-i$. **84)** $z_1=-1+i,\ z_2=-2+\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right),\ z_3=-2+\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{12}-i\cos\frac{\pi}{12}\right)$. **85)** $z_1=2,\ z_2=3i$. **86)** $z_1=4i,\ z_2=-3$. **87)** $z_1=1+i,\ z_2=1-i, z_3=-2+\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right),\ z_4=-2+\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}\right),\ z_5=-2+\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{12}+i\cos\frac{\pi}{12}\right),\ z_5=-2+\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{12}-i\cos\frac{\pi}{12}\right)$. **91)** $\frac{1}{2}+i$. **92)** $-\frac{i}{2}$. **93)** $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$. **94)** 0. **95)** 0. **96)** При $|z|<1$, при $|z|>1$, при $z=1$. **97)** При всех. **98)** При всех. **99)** При $|z|<1$, при $|z|>1$, при $z=1$. **102)** Сходится абсолютно. **103)** Сходится абсолютно. **104)** Расходится. **105)** Сходится условно. **106)** Сходится абсолютно. **107)** Сходится абсолютно. **108)** Сходится абсолютно. **109)** Расходится. **110)** Сходится условно. **111)** Расходится. **112)** Сходится абсолютно. **113)** Сходится абсолютно. **114)** Расходится. **115)** Сходится абсолютно. **116)** Сходится абсолютно. **117)** Сходится абсолютно. **118)** Расходится. **119)** Расходится. **124)** $1)e^{i\pi},\ 2)e^{\frac{i\pi}{2}},\ 3)\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}},\ 4)2e^{-\frac{i\pi}{6}}$. **125)** $1)|z|=e^3, \arg z=2,\ 2)|z|=e, \arg z=-3,\ 3)|z|=e^2, \arg z=5-2\pi,\ 4)|z|=e^3, \arg z=-7+2\pi,\ 5)|z|=1, \arg z=\varphi,\ 6)|z|=1, \arg z=-\varphi$. **126)** $1)1,\ 2)-1,\ 3)i,\ 4)-i,\ 5)\frac{1+i}{\sqrt{2}}$. **142)** $1)\operatorname{Re} z=\cos 2\operatorname{ch}1,\ \operatorname{Im} z=-\sin 2\operatorname{sh}1,\ 2)\operatorname{Re} z=0,\ \operatorname{Im} z=\operatorname{sh}2,\ 3)\operatorname{Re} z=-\cos 1\operatorname{sh}2,\ \operatorname{Im} z=\sin 1\operatorname{ch}2,\ 4)\operatorname{Re} z=\cos 1,\ \operatorname{Im} z=0,\ 5)\operatorname{Re} z=-\frac{\sin 4}{2(\cos^2 2+\operatorname{sh}^2 1)},\ \operatorname{Im} z=-\frac{\operatorname{sh}2}{2(\cos^2 2+\operatorname{sh}^2 1)}$. **143)** $1)\operatorname{Im} z=k\pi,\ k\in\mathbb{Z},\ 2)\operatorname{Re} z=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$, или $\operatorname{Im} z=0,\ 3)\operatorname{Re} z=(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$, или $\operatorname{Im} z=0$. **144)** $1)\operatorname{Im} z=(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z},\ 2)\operatorname{Re} z=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$, и $\operatorname{Im} z\neq 0,\ 3)\operatorname{Im} z=(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$, или $\operatorname{Re} z\neq 0$. **145)** $1)1+i2k\pi,\ k\in\mathbb{Z},\ 2)i(2k+1)\pi,\ k\in\mathbb{Z},\ 3)i(4k+1)\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z},\ 4)\ln 5+i(-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+2\pi k),\ k\in\mathbb{Z},\ 5)\ln 5+i(-\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+\pi(2k+1)),\ k\in\mathbb{Z},\ 6)i(\frac{\pi}{3}+2\pi k),\ k\in\mathbb{Z},\ 7)i(-\frac{\pi}{3}+2\pi k),\ k\in\mathbb{Z}$. **146)** $1)\cos 2\sqrt{2}k\pi+i\sin 2\sqrt{2}k\pi,\ k\in\mathbb{Z},\ 2)e^{-\frac{\pi}{2}+2\pi k},\ k\in\mathbb{Z},\ 3)\frac{1-i}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}(8k+1)},\ k\in\mathbb{Z},\ 4)\frac{\sqrt{3}+i}{2}e^{\frac{\pi}{6}(12k-1)},\ k\in\mathbb{Z},\ 5)5(\cos(\ln 5-\operatorname{arctg}\frac{4}{3})+i\sin(\ln 5-\operatorname{arctg}\frac{4}{3})),\ k\in\mathbb{Z},\ 6)e^{\frac{\pi}{3}+2\pi k}(\cos\ln 2+i\sin\ln 2),\ k\in\mathbb{Z}$. **147)** $1)(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z},\ 2)\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ -\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z},\ 3)2\pi k+i\ln(2+\sqrt{3}),\ 2\pi k-i\ln(2+\sqrt{3}),\ k\in\mathbb{Z},\ 4)\pi k+i(-1)^k\ln(1+\sqrt{2}),\ k\in\mathbb{Z},\ 5)-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+(2k+1)\frac{\pi}{2}+i\frac{\ln 5}{4},\ k\in\mathbb{Z}$. **148)** $z=1-i$. **149)** $z=-e+i$. **150)** $z=(2k+1)\pi i,\ k\in\mathbb{Z}$.

151) $z=\frac{\pi}{2}(4k-1)i,\ k\in\mathbb{Z}$. **152)** $z=i(-1)^k\ln 3+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. **153)** $z=i\ln 3+\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ z=-i\ln 3+\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. **154)** $z=-i\ln 2+\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ z=i\ln 2-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. **155)** $z=-\frac{i}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ z=\frac{i}{2}\ln 2-\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. **156)** $z=i\ln 2+\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. **157)** $z=i\ln 2+\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. **158)** 1) Гипербола $x^2-y^2=3$. 2) Гипербола $xy=\frac{5}{2}$. **159)** 1) Окружность $u^2+v^2=\frac{u}{3}$. 2) Окружность $u^2+v^2=-\frac{v}{5}$. 3) Окружность $|w|=\frac{1}{R}$. 4) Прямая $u+v=0$. 5) Окружность $3(u^2+v^2)-4u+1=0$. 6) $\arg w=-\alpha$. 7) Прямая $u=\frac{1}{2}$. **160)** 1) Нигде. 2) На действительной и мнимой оси. 3) В точке $z=0$. 4) На прямой $\operatorname{Re} z=\operatorname{Im} z$. 5) В точке $z=0$. 6) Везде. **166)** $\operatorname{sh} z e^{\operatorname{ch} z}$. **167)** $2e^z\cos(2e^z)$. **168)** $(1-i)\cos z\operatorname{ch} z+(1+i)\sin z\operatorname{sh} z$. **169)** $(1-z)e^{-z}$. **170)** $\frac{e^z}{z}-\frac{e^z}{z^2},\ z\neq 0$. **171)** $\frac{(1+z^2)(\cos z-z\sin z)-2z^2\cos z}{(1+z^2)^2},\ z\neq i,\ z\neq -i$. **172)** $\frac{1}{\cos^2 z}$. **173)** $-\frac{1}{\sin^2 z}$. **174)** $\frac{2e^z}{(e^z-1)^2}$. **175)** $\cos 2z$. **176)** $-2\frac{e^z+e^{-z}}{(e^z-e^{-z})^3}$. **177)** $\frac{1}{(\cos z-\sin z)^2}$. **179)** 1)$|z-1|=\frac{1}{2}$. 2)$|z|=1$. 3)$|z|=\frac{1}{\sqrt{3}}$. 4)$|z+i|=\sqrt{2}$. **180)** 1) $\arg z=-\frac{\pi}{2}$. 2) $\operatorname{Im}((1-i)(z+i))=0$. 3) $\operatorname{Re} z=0$. 4)$1<z<\infty$. 5) $\operatorname{Im}((1+i)z)=0$. **181)** 1) Область, лежащая внутри круга $|z|<\frac{1}{2}$, сжимается, а вне растягивается. 2) Полуплоскость $\operatorname{Re} z<0$ сжимается, а полуплоскость $\operatorname{Re} z>0$ растягивается. 3) Область, лежащая внутри круга $|z-1|<1$, растягивается, а вне сжимается. **182)** 1)$R(\varphi)=2,\ \alpha(\varphi)=0$. 2)$R(\varphi)=2,\ \alpha(\varphi)=-2\varphi-\frac{\pi}{2}$. 3)$R(\varphi)=2,\ \alpha(\varphi)=\frac{\pi}{2}$. 4)$R(\varphi)=\sqrt{5+4\sin 2\varphi},\ \alpha(\varphi)=\operatorname{arctg}\frac{1-\operatorname{tg}^2\varphi}{2+2\operatorname{tg}^2\varphi+2\operatorname{tg}\varphi}$. 5)$R(\varphi)=\frac{1}{2},\ \alpha(\varphi)=-\frac{\pi}{2}$. **183)** $\frac{1}{z}$. **184)** $\ln z$. **185)** $z^2(3+2i)$. **186)** $5z^2-6z$. **187)** $\operatorname{sh}(z+1)$. **188)** $\frac{z-1}{z+1}$. **189)** 1) Не является. 2) Не является. **190)** $\frac{2}{3}+i$. **191)** $\frac{\pi}{4}-\frac{i\ln 2}{2}$. **192)** $\frac{\pi}{2}-1+i\ln 2$. **193)** $-2i$. **194)** 0. **195)** $J_1=2+i,\ J_2=1+\frac{1}{2}i$. **196)** $J_1=\frac{i\pi}{2},\ J_2=-\frac{\pi}{2}$. **197)** $J_1=9\pi i,\ J_2=-9\pi$. **198)** $\sqrt{5}(1-\frac{i}{2})$. **199)** 0. **200)** $-2i$. **201)** πi. **202)** $e\sin 1+i(e\cos 1-1)$. **203)** $\ln 2+\pi i$. **204)** $\frac{i}{4}(2+\operatorname{sh} 2)$. **206)** $-\frac{2}{3}-\frac{10}{3}i$. **207)** $(1-\cos 1)+i(-1+\sin 1)$. **208)** $-\frac{\pi^2}{8}$. **209)** $\frac{1}{4}(1-\cos(2+2i))$. **210)** $\frac{\pi}{3}$. **211)** $-\frac{\pi}{3}$. **212)** 0. **213)** $\frac{\pi i}{2}$. **214)** 0. **215)** 0. **216)** $\frac{\cos 2\pi i}{2}$. **217)** $\frac{\pi i}{8}$. **218)** $2\pi i\sin\frac{1}{2}$. **219)** $-\frac{2\pi}{5}(3\operatorname{sh}\pi+i(\operatorname{ch}\pi-1))$. **220)** $e\pi i$. **221)** $-2\pi i\operatorname{ch} 1$. **222)** $\pi i\sin 1$. **223)** $i\operatorname{th}\pi$. **224)** $-\frac{\pi i}{4}$. **225)** $2e^2\pi i$. **226)** $-\frac{\pi^2 i}{2}$. **227)** $-\pi i\operatorname{ch} 1$. **228)** $2\pi\operatorname{sh} 1$. **229)** $2\pi i\operatorname{sh} 1$. **230)** 0. **231)** $2\pi i$. **232)** $\pi i(2-e)$. **233)** $-\pi i e$. **234)** Сходится в точке $z=i$. **235)** Сходится во всей плоскости $|z|<\infty$. **236)** Сходится в круге $|z|\leqslant 3$. **237)** Сходится внутри круга $|z+i|<\sqrt{2}$. **238)** $R=\frac{1}{4}$. **239)** $R=\frac{1}{e}$. **240)** $R=\frac{1}{4}$. **241)** $R=\infty$. **242)** $R=\frac{1}{2}$. **243)** $R=\frac{1}{2}$. **244)** $R=\frac{1}{4}$. **245)** Во всех. **246)** Во всех. **247)** При $z\neq\frac{1}{4}$. **248)** При $z\neq\frac{4i}{27},\ z\neq-\frac{4i}{27}$. **249)** При $z\neq -1,\ z\neq\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\ z\neq\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$. **250)** При $z\neq 1,\ z\neq i,\ z\neq -i$. **251)** При $z\neq 1,\ z\neq i,\ z\neq -i$.

265) $1+\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $R=\infty$. **266)** $\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\frac{1}{2}$, $R=\infty$. **267)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} i^n z^{2n+1}$, $R=1$. **268)** $-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(3^{-n-1}+2^{-n-1})z^n$, $R=2$. **269)** $\frac{1}{5}\sum\limits_{n=0}^{\infty}((-1)^{n+1}-2^{-2(n+1)})z^{2n+1}$, $R=1$. **270)** $\frac{1}{2i}\sum\limits_{n=1}^{\infty}((-1-i)^{-n}-(i-1)^{-n})z^n$, $R=\sqrt{2}$. **271)** $e^{\frac{1}{2}}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2z-1)^n}{2^n n!}$, $R=\infty$. **272)** $\frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z+\frac{\pi}{3})^{2n+1}}{(2n+1)!}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z+\frac{\pi}{3})^{2n}}{(2n)!}$, $R=\infty$. **273)** $\sin 4\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{2n+1}(z+1)^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cos 4\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{2n}(z+1)^{2n}}{(2n)!}$, $R=\infty$. **274)** $-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{7^n(z+2)^n}{11^{n+1}}$, $R=\frac{11}{7}$. **275)** $\frac{1}{2i}\sum\limits_{n=1}^{\infty}((-1-i)^{-n}-(i-1)^{-n})(z-1)^{n-1}$, $R=\sqrt{2}$. **276)** $|z-i|>2$. **277)** $|z+2i|>3$. **278)** $|z+2i|>3$. **279)** $2<|z|<3$. **280)** Нигде не сходится. **281)** $2<|z+2|<\infty$. **282)** Нигде не сходится. **283)** $0<|z-2i|\leqslant 1$. **284)** $|z+3i|=1$. **285)** $1<|z|<\infty$. **286)** $\frac{e^2+1}{2e}<|z-i|<\frac{7}{e}$. **287)** $|z-2-i|>1$. **288)** $\frac{1}{5}<|z+1+i|<\frac{5}{3}$. **289)** $z^2-\frac{1}{3}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{2n+3}}{z^{2n}(2n+4)!}$, $0<|z|<\infty$. **290)** $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^{2n}(2n)!}+1-\sum\limits_{n=1}^{\infty}z^n$, $0<|z|<1$. **291)** $-\frac{1}{2(z+2)}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2)^n}{2^{n+2}}$, $0<|z+2|<2$. **292)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{9}((-1)^n+\frac{3n+5}{2^{n+2}})$, $|z-1|<1$. **293)** $z+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z+\frac{1}{2})^n}$, $a_{-2k+1}=\frac{(-1)^k}{2^{2k}(2k)!}$, $a_{-2k}=-\frac{1}{2}a_{-2k+1}$, $0<|z+\frac{1}{2}|<\infty$. **294)** $\sin 1\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-1)^{2n}(2n)!}+\cos 1\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-1)^{2n+1}(2n+1)!}$, $0<|z-1|<\infty$. **295)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 5^n}{2^{n+1}z^n}$, $|z|>\frac{5}{2}$. **296)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3}{z^{2n+1}}$, $|z|>1$. **297)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^{n-2}}$, $0<|z|<\infty$. **298)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(1-i)^n-(1+i)^n}{2i}\frac{1}{z^n}$, $|z|>\sqrt{2}$. **299)** $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1}\frac{(-1)^{n-1}}{9}(z-1)^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3n+5}{9(2^{n+2})}(z-1)^n$. **300)** $\sum\limits_{n=-\infty}^{-2}\frac{(-1)^n(n+1)}{9}(z-1)^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}-2^{n+1}}{27(2^{2n+3})}(z-1)^n$. **301)** $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1}(n+1)i^{n+2}(z-i)^n$. **302)** $\sum\limits_{n=-\infty}^{0}(-1)^{n+1}2^{-\frac{n}{2}+1}\sin\frac{\pi n}{4}(z-1)^{n-1}$. **303)** $-\sum\limits_{n=-\infty}^{-2}z^n-\frac{1}{2z}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^{-n-2}z^n$. **304)** $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1}i^{-n-1}(z-1)^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2+i)^{n+1}}(z-1)^n$. **305)** $\frac{1}{3(z+1)}-\frac{8}{9}+\frac{19(z+1)}{27}-\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{8}{3^{n+2}}(z+1)^n$. **306)** $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1}\frac{1+(-1)^n4^{-n-1}}{5}z^{2n}$. **307)** $z^3+z^2+\frac{1}{2}z+\frac{1}{6}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^{-n}}{(n+3)!}$. **308)** $-\pi z+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\pi^{2n+1}}{(2n+1)!}z^{-2n+1}$.

309) $(z-2)^3+6(z-2)^2+\frac{23}{2}(z-2)+5+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{48n^2+72n+23}{(2n+2)!}(z-2)^{-2n+1}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}2(-1)^n\frac{16n^2+24n+5}{(2n+2)!}(z-2)^{2n}$. **310)** $-\sum\limits_{n=-\infty}^{-2}ez^n+(1-e)z^{-1}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{p=n+2}^{\infty}\frac{1}{p!}\right)z^n$. **311)** $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1}(-1)^{n-1}\frac{(z-1)^n}{e}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{p=0}^{n}\frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}(n-p)!}+\sum\limits_{p=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^{p+1}}{(p)!}\right)(z-1)^n$. **332)** $z=0$ – полюс третьего порядка, $z=\infty$ – существенно особая точка. **333)** $z=0$ – не изолированная особая точка, $z=\infty$ – нуль первого порядка. **334)** $z=0$ – устранимая особая точка, $z_k=2\pi k,\ k\in Z$ – полюс второго порядка, $z=\infty$ – не изолированная особая точка, являющаяся предельной точкой полюсов z_k. **335)** $z_1=1,\ z_2=-1,\ z_3=i,\ z_4=-i$ – полюса первого порядка, $z=\infty$-устранимая особая точка. **336)** $z=0$-существенно особая точка, $z=\infty$-нуль первого порядка. **337)** 1. **338)** -1. **339)** e. **340)** $\frac{\pi^3}{6}$. **341)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **342)** 0. **343)** $\cos 1$. **344)** $\operatorname*{res}\limits_{i}f(z)=\frac{1}{4},\ \operatorname*{res}\limits_{-i}f(z)=\frac{1}{4},\ \operatorname*{res}\limits_{1}f(z)=-\frac{1}{2}$. **345)** $\operatorname*{res}\limits_{-1}f(z)=1$. **346)** $\operatorname*{res}\limits_{2}f(z)=-\sin 2$. **347)** $\operatorname*{res}\limits_{3}f(z)=0$. **348)** $\operatorname*{res}\limits_{z_k}f(z)=-1,\ z_k=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$. **349)** $\operatorname*{res}\limits_{z_k}f(z)=1,\ z_k=i\pi k,\ k\in Z$. **350)** $\operatorname*{res}\limits_{z_k}f(z)=0,\ z_k=ik,\ k\in Z$. **351)** $\operatorname*{res}\limits_{z_k}f(z)=-1,\ z_k=i(2k+1)\pi,\ k\in Z$. **352)** $\operatorname*{res}\limits_{3}f(z)=\frac{\operatorname{ch}3}{10},\ \operatorname*{res}\limits_{i}f(z)=-\frac{\cos 1}{20}(1-3i),\ \operatorname*{res}\limits_{-i}f(z)=-\frac{\cos 1}{20}(1+3i)$. **353)** 0. **354)** π. **355)** 0. **356)** -1. **358)** $-2\pi i$. **359)** $2\pi i$. **360)** $-\pi i$. **361)** 0. **362)** $\frac{-2\pi i}{3}$. **363)** $-6\pi i$. **364)** 0. **365)** $\frac{\pi i}{3}$. **366)** 0.