II. МАТРИЦЫ, ОПРЕДЕЛИТЕЛИ, СИСТЕМЫ

Федеральное агентство по образованию
ГОУ ВПО «Уральский государственный технический университет – УПИ»
Институт образовательных информационных технологий

II. МАТРИЦЫ, ОПРЕДЕЛИТЕЛИ, СИСТЕМЫ

Учебное пособие

Научный редактор – доц., канд. физ. - мат. наук О.А. Кеда

Печатается по решению редакционно-издательского совета

Екатеринбург
2005

УДК 512.643(075.8)
ББК 22.143я 73
М 33

Рецензенты:
кафедра физики Уральского государственного лесотехнического университета;
доктор физ. - мат. наук, проф. А.П. Танкеев, зав. лабораторией ИФМ УрО РАН

Авторы**:** А.Б. Соболев, М.А. Вигура, А.Ф. Рыбалко, Н.М. Рыбалко

М 33 II. МАТРИЦЫ, ОПРЕДЕЛИТЕЛИ, СИСТЕМЫ: учебное пособие / А.Б. Соболев, М.А. Вигура, А.Ф. Рыбалко, Н.М. Рыбалко. Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2005. 41 с.

ISBN 5-321-00633-4

Данная работа входит в учебно-методический комплекс дисциплины ЕН.Ф.01.”Математика” для студентов ММФ, СТФ,МТФ, содержит основы теории матриц и определителей и решения систем линейных уравнений, включает подробное решение задач, задачи для самостоятельной работы, проверочные тесты и справочный материал по теме.

Рекомендовано Уральским отделением Учебно-методического объединения вузов РФ в области строительного образования в качестве учебного пособия для студентов строительных специальностей направления 6533500 “Строительство” всех форм обучения

Подготовлено кафедрой высшей математики

УДК 512.643(075.8)
ББК 22.143я 73

ISBN 5-321-00633-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1.1. Матрицы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Матрицей размера $m\times n$ называется прямоугольная таблица чисел a_{ij}, $i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n$, расположенных в m строках и n столбцах:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа a_{ij} называются элементами матрицы. Матрица может быть записана так: $A=(a_{\text{ij}})=\|a_{ij}\|$.

Матрица размера $1\times n$ называется ***матрицей-строкой*** и имеет вид: $A=(a_1\ \ a_2\ \ a_3\ \ \ldots a_n)$. Матрица размера $m\times 1$ называется ***матрицей-столбцом*** и имеет вид:

$$B=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_m \end{pmatrix}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Матрица называется ***квадратной***, если число строк равно числу столбцов ($m=n$), при этом число n называется порядком матрицы. Пример квадратной матрицы 3-го порядка:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Главной диагональю*** квадратной матрицы называется диагональ, составленная из элементов a_{11}, a_{22}, a_{33}, идущая из левого верхнего угла этой матрицы в правый нижний угол. ***Побочной диагональю*** квадратной матрицы называется диагональ, составленная из элементов a_{13}, a_{22}, a_{31}, идущая из правого верхнего угла этой матрицы в левый нижний угол.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Квадратная матрица, у которой все элементы, стоящие ниже (или выше) главной диагонали, равны нулю, называется ***треугольной***, например:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Квадратная матрица, у которой все элементы, стоящие выше и ниже главной диагонали, равны нулю, называется ***диагональной***, т.е. $a_{ii}\neq 0, a_{ij}=0$ при $i\neq j$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Квадратная диагональная матрица с единичными элементами называется ***единичной*** и обозначается буквой *E*. Например, единичная матрица 3-го порядка имеет вид:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Транспонированием*** квадратной матрицы называется такое преобразование, при котором ее строки становятся столбцами с теми же номерами, а столбцы – строками.

Матрицу, транспонированную по отношению к матрице *A*, обозначают A^T. Например, A^T для матрицы *A* (1) имеет вид:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Матрица $\varnothing$ называется ***нулевой***, если все ее элементы равны нулю.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Матрицы A и B называются ***равными***, если они имеют одинаковую размерность и все их соответствующие элементы совпадают.

1.2. Определители второго и третьего порядка

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Определителем второго порядка*** квадратной матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ называется **число**, равное

$$\Delta = |A| = det\, A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad (3)$$

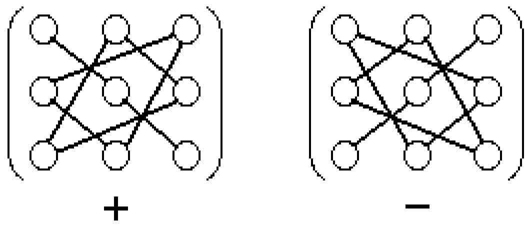
ПРИМЕР: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Определителем третьего порядка*** квадратной матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ называется число, равное

$$\Delta = |A| = det\, A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \qquad (4)$$

Данная формула называется правилом треугольников. Элементы определителя изображаются кружками, а соответствующие произведения отрезками или треугольниками.



Знаки (+) и (–) соответствуют знакам определенных слагаемых, входящих в определитель (4).

ПРИМЕР:

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -4 & 2\\ 0 & 3 & -1\\ -2 & 1 & 5\end{vmatrix}=1\cdot3\cdot5+(-4)\cdot(-1)\cdot(-2)+2\cdot0\cdot1-\,-2\cdot3\cdot(-2)-1\cdot(-1)\cdot1-(-4)\cdot0\cdot5=20\,.$$

1.3. Свойства определителей

С в о й с т в о 1. Определитель квадратной матрицы A не меняется при транспонировании: $\left|A^T\right|=|A|$.

С в о й с т в о 2. При перестановке местами двух строк (столбцов) определитель $|A|$ меняет знак:

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\begin{matrix}(\alpha_1)\\(\alpha_2)\\(\alpha_3)\end{matrix}=-\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\begin{matrix}(\alpha_2)\\(\alpha_1)\\(\alpha_3)\end{matrix}.$$

С в о й с т в о 3. Определитель, содержащий две одинаковые строки (столбца), равен нулю.

С в о й с т в о 4. Общий множитель для элементов некоторой строки (столбца) определителя $|A|$ можно вынести за знак определителя:

$$\begin{vmatrix}k\cdot a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ k\cdot a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ k\cdot a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=k\cdot\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},\quad k=const$$

Это свойство можно сформулировать иначе: умножение всех элементов некоторой строки (столбца) определителя $|A|$ на число k равносильно умножению определителя на это число.

С в о й с т в о 5. Если все элементы некоторой строки (столбца) определителя $|A|$ равны нулю, то и сам определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ 0 & 0 & 0\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=0\,.$$

Это свойство вытекает из предыдущего при $k = 0$.

С в о й с т в о 6. Если все элементы двух строк (столбцов) определителя $|A|$ пропорциональны, то определитель равен нулю.

С в о й с т в о 7. Если каждый элемент некоторой строки (столбца) определителя представляет собой сумму двух слагаемых, то такой определитель можно представить в виде суммы двух определителей:

$$|A| = \begin{vmatrix} a'_{11} + a''_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} + a''_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} + a''_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a''_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a''_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

С в о й с т в о 8. Если к элементам какой-нибудь строки (столбца) определителя $|A|$ прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на произвольный множитель k, то величина определителя не изменится:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + k \cdot a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + k \cdot a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + k \cdot a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

З а м е ч а н и е: пользуясь свойством 8, можно, не меняя величину определителя, все элементы некоторой строки (столбца) определителя, кроме одного, сделать равными нулю.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя $|A|$*** называется определитель, полученный из определителя $|A|$ вычеркиванием i-й строки и j-го столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}.

ПРИМЕР: Найдите минор M_{22} элемента a_{22} определителя 3-го порядка $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Решение: $M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя $|A|$*** называется минор M_{ij} этого элемента со знаком $(-1)^{i+j}$, где i – номер строки, а j – номер столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

ПРИМЕР:

Для определителя $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$: $M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -12,\ A_{22} = (-1)^4 \cdot M_{22} = -12$.

С в о й с т в о 9. Определитель $|A|$ численно равен сумме произведений элементов любой его строки на соответствующие алгебраические дополнения.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3},\ i = 1, 2, 3.$$

ПРИМЕР:

Вычислим определитель 3-го порядка разложением по элементам первой строки: $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 16 \\ -1 & 10 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 16 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2(30+16) + 5(-1) = 92 - 5 = 87.$

С в о й с т в о 10. Алгебраическая сумма произведений элементов любой строки (столбца) определителя $|A|$ на алгебраическое дополнение соответствующих элементов другой строки (столбца) равна нулю.

1.4. Определители высших порядков

Определитель квадратной матрицы n-го порядка имеет вид:

$$det\,A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Для определителей n-го порядка справедливы свойства, изложенные в разделе 1.3.

Определители n-го порядка могут быть вычислены двумя способами.

1. Метод разложения по строке или столбцу (метод понижения порядка):

$$det\,A = |A| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots a_{in}A_{in}.$$

ПРИМЕР:

Вычислим определитель 4-го порядка $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ методом понижения порядка.

Решение:

Обозначим строки определителя через $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, а столбцы - $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$. Приведем определитель к виду, в котором $a_{11} = 1$, а остальные элементы первого столбца равны нулю. Для этого поставим четвертый столбец на место первого, при этом определитель изменит знак:

$$|A| = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ 6 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Обратим в нули элементы первого столбца во второй, третьей и четвертой строках с помощью преобразований $\alpha_2 - 2\alpha_1$, $\alpha_3 - 2\alpha_1$, $\alpha_4 - 6\alpha_1$:

$$|A| = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & 1 & -9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 7 & 1 & -9 \end{vmatrix} =$$

$$= (\alpha_2 \to \alpha_1) \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \\ 7 & 1 & -9 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_2 - 3\alpha_1 \\ \alpha_3 - 7\alpha_1 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -10 & -1 \\ 0 & -20 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & -1 \\ 20 & -2 \end{vmatrix} = 0 .$$

2. Метод приведения к треугольному виду.

Используя свойства, добьемся такой структуры определителя, при которой все его элементы, **стоящие ниже главной диагонали**, равны нулю. Тогда определитель будет численно равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали.

$$|A| \to \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad |A| = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn} .$$

ПРИМЕР:

Вычислим определитель 5-го порядка $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ -3 & 2 & -4 & 5 & -7 \\ 2 & 3 & 19 & 5 & 8 \\ 5 & -3 & -5 & -1 & 4 \end{vmatrix}$ методом приведения к треугольному виду.

Решение:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ -3 & 2 & -4 & 5 & -7 \\ 2 & 3 & 19 & 5 & 8 \\ 5 & -3 & -5 & -1 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} (\alpha_1) \\ (\alpha_2) \\ (\alpha_3) \\ (\alpha_4) \\ (\alpha_5) \end{matrix} = \begin{pmatrix} \alpha_2 - 4\alpha_1 \\ \alpha_3 + 3\alpha_1 \\ \alpha_4 - 2\alpha_1 \\ \alpha_5 - 5\alpha_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & -7 \\ 0 & 2 & 2 & 8 & 2 \\ 0 & 3 & 15 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -15 & -6 & -11 \end{vmatrix} \begin{matrix} (\alpha_1) \\ (\alpha_2) \\ (\alpha_3) \\ (\alpha_4) \\ (\alpha_5) \end{matrix} = (\alpha_5 + \alpha_4) = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 15 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -9 \end{vmatrix} \begin{matrix} (\alpha_1) \\ (\alpha_2) \\ (\alpha_3) \\ (\alpha_4) \\ (\alpha_5) \end{matrix} =$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha_3+\alpha_2\\ \alpha_4+3\alpha_2\end{pmatrix} 2\cdot\begin{vmatrix}1&0&2&1&3\\0&-1&-5&-2&-7\\0&0&-4&2&-6\\0&0&0&-3&-19\\0&0&0&-3&-9\end{vmatrix}\begin{matrix}(\alpha_1)\\(\alpha_2)\\(\alpha_3)\\(\alpha_4)\\(\alpha_5)\end{matrix}=(\alpha_5-\alpha_4)=2\cdot\begin{vmatrix}1&0&2&1&3\\0&-1&-5&-2&-7\\0&0&-4&2&-6\\0&0&0&-3&-19\\0&0&0&0&10\end{vmatrix}=-240\ .$$

1.5. Операции над матрицами и их свойства

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: ***Суммой матриц*** $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ одинаковой размерности $m{\times}n$ называется матрица $C=A+B$, элементы которой равны $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, где $i=1,2,\ldots,m$; $j=1,2,\ldots,n$.

Свойство 1. $A+B=B+A$.

Свойство 2. $(A+B)+C=A+(B+C)$.

Свойство 3. $A+\varnothing=A$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: ***Произведением матрицы A на число*** α называется матрица $C=\alpha\times A$, элементы которой удовлетворяют условию: $c_{ij}=\alpha\cdot a_{ij}$, где $i=1,2,\ldots,m$; $j=1,2,\ldots,n$.

Свойство 4. $A+(-A)=\varnothing$.

Свойство 5. $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$.

Свойство 6. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$.

Свойство 7. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$.

Свойство 8. $0\cdot A=\varnothing$; $1\cdot A=A$.

ПРИМЕР: Найдите $3A+2B$, если $A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&1&-4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2&1&0\\-3&2&2\end{pmatrix}$.

Решение: $3A+2B=\begin{pmatrix}6&3&-3\\0&3&-12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4&2&0\\-6&4&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&5&-3\\-6&7&-8\end{pmatrix}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: ***Произведением матрицы A размерности (m×n) на матрицу B размерности (n×k)*** называется матрица $\boldsymbol{C=A\times B}$ размерности $(\boldsymbol{m\times k})$, элементы которой находятся по формуле:

$$c_{ij}=\sum_{q=1}^{n}a_{iq}b_{qj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj},\ i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,k,$$

т.е. c_{ij} равен сумме произведений элементов i -й строки матрицы A на элементы j–го столбца матрицы B. Число столбцов первой матрицы должно равняться числу строк второй матрицы.

ПРИМЕР: Найдите $A\times B$, если $A=\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&1\\5&2\\6&3\end{pmatrix}$.

Решение: $C=A\times B=\begin{pmatrix}1\cdot4+2\cdot5+3\cdot6 & 1\cdot1+2\cdot2+3\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}32&14\end{pmatrix}$,

размерность матрицы C (1×2).

Свойство 9. $(A\times B)\times C=A\times(B\times C)$.

Свойство 10. $(A+B)\times C=A\times C+B\times C$.

Свойство 11. $A\times(B+C)=A\times B+A\times C$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Матрицы A и B называются ***перестановочными (коммутирующими)***, если $A\times B=B\times A$.

В общем случае произведение матриц не коммутативно: $A\times B\neq B\times A$.

ПРИМЕР: Найдите $A\times B$ и $B\times A$, если $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}$.

Решение: $A\times B=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&6\\7&14\end{pmatrix}$,

$$B\times A=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&10\\7&10\end{pmatrix}.$$

Свойство 12. $A\times E=E\times A=A$.

Свойство 13. $A\times\varnothing=\varnothing\times A=\varnothing$.

Свойство 14. $(A\times B)^T=B^T\times A^T$.

Свойство 15. $\det(A\times B)=\det A\det B$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Квадратная матрица A n–го порядка называется ***вырожденной***, если определитель этой матрицы равен нулю $|A|=0$, и ***невырожденной***, если $|A|\neq 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Матрица A^{-1} называется ***обратной*** к матрице A, если

$$A\times A^{-1}=A^{-1}\times A=E.$$

Основным методом вычисления обратной матрицы A^{-1} является ***метод присоединенной матрицы***.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Матрица A^V, составленная из алгебраических дополнений A_{ij} соответствующих элементов a_{ij} матрицы A, называется ***присоединенной к матрице A***:

$$A^V=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1n}\\A_{21}&A_{22}&\cdots&A_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\A_{n1}&A_{n2}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}.$$

Теорема. Если матрица A невырождена, то существует, и притом единственная, обратная матрица A^{-1} , равная $A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\left(A^V\right)^T$, где $\Delta=|A|$, $(A^V)^T$ – транспонированная присоединенная матрица. Доказательство теоремы проводится непосредственной проверкой того факта, что $A\times A^{-1}=E$.

Для обратной матрицы выполняются следующие соотношения:

Свойство 16. $(\alpha\times A)^{-1}=(1/\alpha)\times A^{-1}$.

Свойство 17. $(A\times B)^{-1}=B^{-1}\times A^{-1}$.

Свойство 18. $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$.

1.6. Матричные уравнения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Если матрицы A, B и C известны, то равенство $A\times X\times B=C$ называется ***матричным уравнением*** относительно матрицы X.

Если $|A| \neq 0$; $|B| \neq 0$, т.е. матрицы A и B – невырожденные, уравнение преобразуется следующим образом. Умножим обе части уравнения слева на A^{-1} и справа на B^{-1}: $A^{-1}\times A\times X\times B\times B^{-1}=A^{-1}\times C\times B^{-1}$,

т.к. $A^{-1}\times A = E$ и $B\times B^{-1}=E$, то получаем решение: $X=A^{-1}\times C\times B^{-1}$.

ПРИМЕР: Решите матричное уравнение $A\cdot X = B$, где $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 5 & 9\end{pmatrix}$.

Решение:

Вычислим $|A|=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-2\neq 0$, значит матрица A – невырожденная.

Построим матрицу A^{-1}, обратную матрице A:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\left(A^V\right)^T=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & -3\\ -2 & 1\end{pmatrix}^T=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}.$$

Записываем решение матричного уравнения:

$$X=A^{-1}B=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 5\\ 5 & 9\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4\cdot 3+(-2)\cdot 5 & 4\cdot 5+(-2)\cdot 9\\ (-3)\cdot 3+1\cdot 5 & (-3)\cdot 5+1\cdot 9\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 2\\ -4 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}.$$

1.7. Ранг матрицы

Пусть в матрице A размерности $(m\times n)$ выбраны k строк и k столбцов, причем $k \leq \min(m,n)$. Тогда элементы, стоящие на пересечении выбранных строк и столбцов, образуют квадратную матрицу k-го порядка.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Определитель M_k этой матрицы называется ***минором k-го порядка*** матрицы A.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Рангом*** матрицы A называется число, равное максимальному порядку r отличных от нуля миноров M_k этой матрицы: $r = \text{rang } A=r(A)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Базисным минором*** матрицы A называется любой минор порядка $r(A)$, отличный от нуля.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Матрицы называются ***эквивалентными*** и обозначаются $A\sim B$, если $r(A) = r(B)$.

Ранг матрицы A можно вычислить двумя способами.

1. Метод окаймляющих миноров

Пусть в матрице A элемент $a_{ij}\neq 0$, тогда $M_1\neq 0$ и $r(A)\geq 1$. Окаймляем этот элемент элементами $(j+1)$-го столбца и $(i+1)$-й строки, получаем минор 2-го порядка: $M_2=\begin{vmatrix}a_{i,j} & a_{i,j+1}\\ a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1}\end{vmatrix}$.

Если $M_2 = 0$, то присоединяем другие строки и столбцы, перебирая все возможные миноры 2-го порядка. Если все миноры второго порядка равны нулю, то $r(A) = 1$; если же существует хотя бы один минор 2-го порядка, отличный от нуля, то $r(A) \geq 2$.

Выбираем отличный от нуля минор 2-го порядка M_2 и окаймляем его элементами соседних строк и столбцов до минора 3-го порядка и так до тех пор, пока не будет выполнено условие: $M_r \neq 0$, а все $M_{r+1} = 0$. Тогда ранг матрицы будет равен *r*.

2. Метод элементарных преобразований

К элементарным преобразованиям матрицы относятся:

1) транспонирование;
2) перестановка строк (столбцов);
3) умножение строки (столбца) на число $\alpha \neq 0$;
4) прибавление к элементам строки (столбца) матрицы элементов другой строки, умноженных на некоторое число;
5) отбрасывание нулевой строки (столбца) матрицы.

Теорема. Элементарные преобразования матрицы не меняют ее ранга.

Определение ранга матрицы А методом элементарных преобразований сводится к приведению матрицы к диагональному виду, когда все элементы, кроме $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{rr}$, равны нулю. Тогда ранг матрицы А равен числу отличных от нуля диагональных элементов.

ПРИМЕР: Вычислите ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -3 \\ 3 & 4 & 3 & -1 \\ 5 & 6 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ методом элементарных преобразований.

Решение:

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -3 \\ 3 & 4 & 3 & -1 \\ 5 & 6 & -1 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{array} \end{array} \sim (\beta_2 - \beta_1) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & -3 \\ 3 & 1 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim (\beta_1 \leftrightarrow \beta_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -3 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{array} \sim \begin{pmatrix} \alpha_2 - \alpha_1 \\ \alpha_3 - \alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -6 & 6 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{array} \sim (\alpha_3 - \alpha_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{array} \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} \beta_2 - 2\beta_1 \\ \beta_3 - 5\beta_1 \\ \beta_4 + 3\beta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \beta_3 + 2\beta_2 \\ \beta_4 - 2\beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \text{rang}\, A = 2.$$

1.8. Проверочный тест: определители и матрицы

1. Определитель – это
а) матрица; б) число; в) вектор; г) прямоугольная таблица чисел;
д) неопределяемое понятие.

Ответ:

2. Матрица – это
а) прямоугольная таблица чисел; б) неопределяемое понятие;
в) отличный от нуля минор; г) диагональная таблица чисел; д) определитель.

Ответ:

3.Определитель $|2|$ равен
а) 0; б) 1; в) 2; г) бесконечности; д) 10.

Ответ:

4. Определитель $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$ равен
а) 0; б) 8; в) –8; г) 16; д) бесконечности.

Ответ:

5. Определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ равен
а) $3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$; б) 6; в) 9; г) 0; д) не существует; е) $+\infty$; ж) π^2.

Ответ:

6. Определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ равен
а) 0; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$; в) 8; г) 2; д) $1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}+2\cdot(-1)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}+3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$.

Ответ:

7. Элемент a_{12} матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 8 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ равен
а) 5; б) 8; в) 4; г) –11; д) бесконечности.

Ответ:

8. Минор M_{12} матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ равен

а) 2; б) 4; в) 36; г) 0; д) 24.

Ответ:

9. Алгебраическое дополнение A_{32} матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}$; г) –7; д) 0.

Ответ:

10. Матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ можно умножить на матрицу а) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; г) $(1 \quad 3)$; д) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ответ:

11. Ранг матрицы $\begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 1 & 10 & 2 \end{pmatrix}$ равен

а) 99; б) 3; в) 2; г) 0; д) ∞; е) не существует.

Ответ:

Правильные ответы:

1. б).
2. а).
3. в).
4. в).
5. а),б).
6. а),б),д).
7. в).
8. в).
9. в),г).
10. б).
11. в).

2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

2.1. Системы *m* линейных уравнений с *n* неизвестными.

Рассмотрим систему линейных уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: ***Решением*** системы линейных уравнений (1) называется такое множество чисел $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, при подстановке которых в каждое из уравнений системы получается верное равенство.

Система (1) может быть записана в матричном виде $A \cdot X = B$, где

$$\left(\mathrm{A}|\mathrm{B}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$ - расширенная матрица системы,

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ - основная матрица системы,

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$ - столбец неизвестных, $$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$ - столбец свободных членов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Определитель матрицы A называется ***главным*** **определителем** системы линейных уравнений и обозначается символом Δ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Система линейных уравнений (1) называется ***неоднородной,*** если матрица B не является нуль–матрицей $\widetilde{O}$, и называется ***однородной,*** если $B = \widetilde{O}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Система линейных уравнений называется **совместной**, если она имеет решения, и называется **несовместной** - в противном случае. Система называется ***определенной,*** если она имеет единственное решение, и называется ***неопределенной***, если она имеет бесконечное множество решений.

2.2. Системы *n* линейных уравнений с *n* неизвестными

Рассмотрим систему вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{2}$$

Теорема (правило Крамера). Если главный определитель системы линейных уравнений (1) не равен нулю, то система совместна и определена, причем единственное решение вычисляется по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

Здесь Δ_i - определители, получаемые из главного определителя системы Δ заменой i-го столбца на столбец свободных членов.

Доказательство:

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{23} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – основная матрица системы (2),

а A_{ij} – алгебраические дополнения элементов a_{ij} этой матрицы $(i, j = 1, 2, ..., n)$.

Чтобы найти неизвестное x_1, домножим первое уравнение системы на A_{11}, второе уравнение – на A_{21}, …, *n* – е уравнение – на A_{n1} и сложим все полученные уравнения. В результате получим:

$$\begin{aligned} & x_1 \cdot \left(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \ldots + a_{n1}A_{n1} \right) + \\ & + x_2 \cdot \left(a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + \ldots + a_{n2}A_{n2} \right) + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + x_n \cdot \left(a_{1n}A_{1n} + a_{2n}A_{2n} + \ldots + a_{nn}A_{nn} \right) = \\ & = b_1A_{11} + b_2A_{21} + \ldots + b_nA_{n1}. \end{aligned}$$

В этом уравнении выражение

$$a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \ldots + a_{n1}A_{n1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta,$$

где Δ – главный определитель системы (1), полученный разложением по элементам первой строки, а выражения

$$a_{1i}A_{11} + a_{2i}A_{21} + \ldots + a_{ni}A_{n1} = 0 \text{ при } i = 2, 3, ..., n,$$

поскольку представляют собой сумму произведений элементов i–й строки на алгебраические дополнения первой, отличной от i–й, строки.

В правой части уравнения имеем

$$b_1A_{11}+b_2A_{21}+...+b_nA_{n1}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & ... & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_n & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}=\Delta_1.$$

Таким образом, уравнение примет вид $x_1\cdot\Delta=\Delta_1$, следовательно, $x_1=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}$. Для получения любого неизвестного x_i достаточно домножить соответствующие уравнения на A_{1i}, A_{2i}, ..., A_{ni}, а затем сложить. В результате получаем

$$x_i=\frac{\Delta_i}{\Delta},\ i=1,2,...,n.$$

ПРИМЕР: Решите систему:

$$\begin{cases} 2x+3y+2z=9, \\ x+2y+3z=14, \\ 3x+4y+z=16. \end{cases}$$

По формулам Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}=-6\neq 0,\qquad \Delta_1=\begin{vmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 14 & 2 & -3 \\ 16 & 4 & 1 \end{vmatrix}=-12,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & 9 & 2 \\ 1 & 14 & -3 \\ 3 & 16 & 1 \end{vmatrix}=-18,\qquad \Delta_3=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 14 \\ 3 & 4 & 16 \end{vmatrix}=12.$$

Посчитаем значения неизвестных:

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta}=2,\ y=\frac{\Delta_2}{\Delta}=3,\ z=\frac{\Delta_3}{\Delta}=-2.$$

2.3. Системы *m* линейных уравнений с *n* неизвестными. Теорема Кронекера–Капелли

Рассмотрим систему линейных уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases} \qquad (3)$$

Теорема Кронекера–Капелли. Для того чтобы система линейных уравнений (3) была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был равен рангу расширенной матрицы системы:

$$rang(\mathrm{A})=rang\left(\mathrm{A}|\mathrm{B}\right).$$

Если $rang(\mathrm{A})\neq rang\left(\mathrm{A}|\mathrm{B}\right)$ то система заведомо не имеет решений.

ПРИМЕР: Решите систему $\begin{cases} 2x+3y=5, \\ 2x+3y=2. \end{cases}$

$\left(A|B\right)=\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \end{array}\right)$, $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=0$, $\Delta_1=\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\neq 0 \;\Rightarrow\; rang\left(A\right)=1$, $rang\left(A|B\right)=2$,

по теореме Кронекера – Капелли система несовместна.

Если $rang(\mathrm{A})=rang\left(\mathrm{A}|\mathrm{B}\right)$, то возможны два случая:

1) $rang\left(A\right)=n$ (числу неизвестных) – тогда решение единственное и может быть получено по формулам Крамера;

2) $rang\left(A\right)<n$ – тогда решений бесконечно много.

2.4. Схема отыскания решения системы *m* линейных уравнений с *n* неизвестными

Пусть $rang(\mathrm{A})=rang\left(\mathrm{A}|\mathrm{B}\right)=r$ и $rang\left(A\right)<n$. Тогда любой отличный от нуля минор, составленный из коэффициентов матрицы порядка r, можно выбрать в качестве ***базисного***, при этом неизвестные x_i, имеющие своими коэффициентами элементы базисного минора, называются ***базисными неизвестными***, а остальные $(n-r)$ неизвестных – ***свободными.*** Свободные неизвестные могут принимать произвольные значения. Пусть, для определенности, базисный минор располагается в первых r строках и r столбцах матрицы A системы:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix}\neq 0 .$$

Тогда $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_r$ – базисные неизвестные, а $x_{r+1},\ \dots,\ x_n$ – свободные неизвестные.

Перенесем свободные неизвестные в правую часть уравнений системы:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1r}x_r=b_1-a_{1,r+1}x_{r+1}-\dots-a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2r}x_r=b_2-a_{2,r+1}x_{r+1}-\dots-a_{2n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\dots+a_{rr}x_r=b_n-a_{r,r+1}x_{r+1}-\dots-a_{rn}x_n. \end{cases} \tag{4}$$

Система (4) является следствием исходной системы (3) и ее решение может быть найдено или по формулам Крамера, или матричным способом. При этом базисные неизвестные $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_r$ выражаются определенным образом через свободные. Если свободные неизвестные принимают значения

$x_{r+1}=c_1,\quad x_{r+2}=c_2,\quad \dots,\quad x_n=c_{n-r}$,

то базисные неизвестные выражаются через свободные $x_i=x_i(c_1,\ c_2,\ \dots,\ c_{n-r})$, $i=1,2,\dots,r$.

Общее решение неоднородной системы $\mathrm{A}\cdot\mathrm{X}=\mathrm{B}$ можно записать в виде матрицы–столбца:

$$X = \begin{pmatrix} x_1(c_1, \ c_2, \ ..., \ c_{n-r}) \\ x_2(c_1, \ c_2, \ ..., \ c_{n-r}) \\ .... \\ x_r(c_1, \ c_2, \ ..., \ c_{n-r}) \\ c_1 \\ ... \\ c_{n-r} \end{pmatrix}.$$

Поскольку свободные неизвестные могут принимать произвольные числовые значения, то исходная система имеет бесконечно много решений.
Общее решение X при $r < n$ может быть записано в матричном виде следующим образом:

$$X = X_0 + c_1 \cdot X_1 + c_2 \cdot X_2 + ... + c_{n-r} \cdot X_{n-r},$$

где частные решения X_i $(i = 0, 1, 2, ..., n-r)$ получены при следующих значениях постоянных:

$$X_0 = \begin{pmatrix} x_1(0, \ 0, \ ..., \ 0) \\ x_2(0, \ 0, \ ..., \ 0) \\ .... \\ x_r(0, \ 0, \ ..., \ 0) \\ 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, \ X_1 = \begin{pmatrix} x_1(1, \ 0, \ ..., \ 0) \\ x_2(1, \ 0, \ ..., \ 0) \\ .... \\ x_r(1, \ 0, \ ..., \ 0) \\ 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, \ X_2 = \begin{pmatrix} x_1(0, \ 1, \ ..., \ 0) \\ x_2(0, \ 1, \ ..., \ 0) \\ .... \\ x_r(0, \ 1, \ ..., \ 0) \\ 0 \\ 1 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, \ ..., \ X_{n-r} = \begin{pmatrix} x_1(0, \ 0, \ ..., \ 1) \\ x_2(0, \ 0, \ ..., \ 1) \\ .... \\ x_r(0, \ 0, \ ..., \ 1) \\ 0 \\ 0 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ПРИМЕР: Решите систему $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 = -7, \\ 3x_1 - 7x_2 + x_3 - 5x_4 = -8. \end{cases}$

Рассмотрим расширенную матрицу системы:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & -5 & -7 \\ 3 & -7 & 1 & -5 & -8 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} \alpha_2 - 2\alpha_1 \\ \alpha_3 - 3\alpha_1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & -5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim (\alpha_3 - \alpha_2) \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim (\alpha_1 + 4\alpha_2) \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Следовательно, $r(A) = r(A|B) = 2$, поэтому система совместна и не определена. Выберем x_1 и x_2 в качестве базисных неизвестных и запишем преобразованную систему:

$$\begin{cases} x_1 = -5 + 2x_3 + 4x_4, \\ x_2 = -1 + x_3 + x_4. \end{cases}$$

Полагая $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$, где c_1 и c_2 – произвольные числа, получаем общее решение системы

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 + 2c_1 + 4c_2 \\ -1 + c_1 + c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2.5. Однородные системы

Однородная система имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0, \end{cases}$$

ей соответствует матричное уравнение $A \cdot X = \varnothing$.

Однородная система **всегда совместна**, так как $r(A) = r\left(A \middle| B\right)$, поскольку нулевой столбец не меняет ранг матрицы, всегда существует нулевое решение $(0,\ 0,\ ...,\ 0)$.

Теорема. Для того чтобы однородная система имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы $r = r(A) < n$.

Следствие. Для того чтобы однородная система n линейных уравнений с n неизвестными имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы $\Delta = 0$.

Если $r < n$, то заведомо $\Delta = 0$ и тогда возникают свободные неизвестные c_1, c_2, ..., c_{n-r}, система имеет нетривиальные решения, причем их бесконечно много.

Общее решение X при $r < n$ может быть записано в матричном виде следующим образом:

$$X = X_0 + c_1 \cdot X_1 + c_2 \cdot X_2 + ... + c_{n-r} \cdot X_{n-r},$$

и совпадает с соответствующим общим решением неоднородной системы при $B = 0$.

ПРИМЕР: Решите систему $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 = 0, \\ 3x_1 - 7x_2 + x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$

Рассмотрим матрицу системы:

$$A=\begin{pmatrix}1&-4&2&0\\2&-3&-1&-5\\3&-7&1&-5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}\alpha_2-2\alpha_1\\\alpha_3-3\alpha_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-4&2&0\\0&5&-5&-5\\0&5&-5&-5\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim(\alpha_3-\alpha_2)\begin{pmatrix}1&-4&2&0\\0&1&-1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim(\alpha_1+4\alpha_2)\begin{pmatrix}1&0&-2&-4\\0&1&-1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Следовательно, $r(A)=2$. Выберем x_1 и x_2 в качестве базисных неизвестных и запишем преобразованную систему:

$$\begin{cases}x_1=2x_3+4x_4,\\x_2=x_3+x_4.\end{cases}$$

Полагая $x_3=c_1$, $x_4=c_2$, где c_1 и c_2 – произвольные числа, получаем общее решение однородной системы в виде:

$$X=c_1\begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}4\\1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

2.6. Метод Гаусса решения систем *m* линейных уравнений с *n* неизвестными

Одним из основных методов решения систем линейных уравнений является ***метод Гаусса.***

Эквивалентными преобразованиями системы являются следующие:

1) перемена местами двух любых уравнений системы;
2) умножение любого уравнения системы на произвольное число $k\neq0$;
3) прибавление к одному уравнению системы другого уравнения, умноженного на произвольное число $k\neq0$.

Элементарным преобразованиям уравнений соответствуют элементарные преобразования элементов расширенной матрицы системы $(A|B)$. Заметим, что элементарные преобразования матрицы не изменяют ее ранга.

Сформулируем алгоритм Гаусса как преобразование строк матрицы $(A|B)$ к верхнему треугольному виду, которое позволяет не только вычислить ранги матриц (A) и $(A|B)$, но и записать решение системы.

Наиболее удобен метод Гаусса – Ньютона, в котором матрицу приводят не к треугольному, а к диагональному виду. При этом сразу получается решение системы уравнений.

ПРИМЕР: Решите систему $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$.

Запишем расширенную матрицу системы

$$\left(A|B\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} \alpha_2 - 2\alpha_1 \\ \alpha_3 - \alpha_1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right),$$

Ранг основной матрицы системы равен трем, совпадает с рангом расширенной матрицы системы, следовательно, по теореме Кронекера – Капелли система линейных уравнений совместна. Вернемся к системе уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ \quad - 3x_2 - x_3 = -9 \\ \quad\quad - 2x_3 = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 3 = 6 \\ \quad - 3x_2 - 3 = -9 \\ \quad\quad x_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 5 = 6 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases}.$$

2.7. Проверочный тест: системы линейных уравнений

1. Ранг матрицы – это максимальный порядок отличных от нуля а) векторов; б) матриц; в) миноров; г) определителей; д) точек этой матрицы.

Ответ:

2. Ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ равен

а) 0; б) 2; в) 3; г) не существует; д) 6.

Ответ:

3. Ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ & 2 & 2 & 2 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ & & 2 & 2 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ & & & 2 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$ равен

а) 2; б) 4; в) 6; г) 7; д) 8; е) $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$; ж) не существует.

Ответ:

4. Система линейных уравнений совместна, если а) ее ранг равен 2; б) ранг ее расширенной матрицы равен 0;

в) ранг ее основной матрицы равен рангу ее расширенной матрицы;

г) ранг ее основной матрицы больше ранга ее расширенной матрицы;

д) ранг ее основной матрицы меньше ранга ее расширенной матрицы.

Ответ:

5. Система линейных уравнений имеет единственное решение тогда и только тогда, когда

а) число ее базисных неизвестных равно 1;

б) число ее базисных неизвестных равно 0;

в) число ее свободных неизвестных равно 0;

г) число ее базисных неизвестных равно числу ее свободных неизвестных;

д) ее ранг равен числу неизвестных;
е) ее ранг равен 1;
ж) ее ранг не существует;
з) число уравнений равно числу неизвестных.

Ответ:

6. Система линейных уравнений имеет бесконечно много решений тогда и только тогда, когда

а) она не имеет базисных неизвестных;
б) ее ранг равен 0;
в) она имеет свободные неизвестные;
г) ее ранг равен ∞;
д) ее ранг не равен числу неизвестных;
е) ее ранг равен числу уравнений;
ж) число уравнений не равно числу неизвестных;
з) она имеет неквадратную матрицу.

Ответ:

7. Однородная система линейных уравнений имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда

а) ее ранг равен числу неизвестных;
б) ее ранг не равен числу неизвестных;
в) число свободных неизвестных больше 0;
г) число уравнений меньше числа неизвестных;
д) она имеет неквадратную матрицу.

Ответ:

8. Укажите матрицу несовместной системы линейных уравнений

а) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$; б) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$; в) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right)$; г) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right)$;

д) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right)$.

Ответ:

9. Для того чтобы при решении систем линейных уравнений методом Гаусса для системы уравнений с матрицей $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ получить 0 на месте элемента a_{21}, нужно элементы первой строки матрицы умножить на:

а) 3; б) 5; в) –3; г) 0; д) –7; е) $\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$

и сложить с элементами второй строки.

Ответ:

Правильные ответы:

1. в), г).
2. б).
3. б).
4. в).
5. в), д).
6. в), д).
7. б), в).
8. а).
9. в).

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Задача 1. Вычислите ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 6 & -6 & 9 \\ 1 & 1 & 4 & 4 & 9 \\ 1 & -1 & 8 & -8 & 27 \end{pmatrix}.$$

Решение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 6 & -6 & 9 \\ 1 & 1 & 4 & 4 & 9 \\ 1 & -1 & 8 & -8 & 27 \end{pmatrix} \to \{\alpha_2 - 3\alpha_1 \to \alpha_2\} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 3 & -9 & 6 \\ 1 & 1 & 4 & 4 & 9 \\ 1 & -1 & 8 & -8 & 27 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \left\{\frac{\alpha_2}{3} \to \alpha_2\right\} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 4 & 9 \\ 1 & -1 & 8 & -8 & 27 \end{pmatrix} \to \{\alpha_3 - \alpha_1 \to \alpha_3\} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 8 \\ 1 & -1 & 8 & -8 & 27 \end{pmatrix} \to \{\alpha_4 - \alpha_1 \to \alpha_4\} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 8 \\ 0 & -2 & 7 & -9 & 26 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \{\alpha_4 - \alpha_2 \to \alpha_4\} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & -6 & 24 \end{pmatrix} \to \{\alpha_4 - 2\alpha_3 \to \alpha_4\} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & 8 \end{pmatrix}.$$

В левом верхнем углу матрицы стоит определитель треугольного вида, который равен произведению элементов, стоящих на его главной диагонали $72 \neq 0$, значит ранг матрицы равен четырем.

Ответ**:** ранг матрицы равен 4.

Задача 2. Решите систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -5, \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -4, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_4 = 12, \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 5. \end{cases}$$

Решение:

Запишем расширенную матрицу системы

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -3 & 4 & -5 \\ 1 & 0 & -2 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & 0 & -5 & 12 \\ 4 & 3 & -5 & 0 & 5 \end{array}\right).$$

Если $\Delta \neq 0$, то неизвестные можно найти по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},\ x_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta}.$$

Вычислим основной определитель матрицы системы Δ разложением по элементам первой строки:

$$\Delta=\begin{vmatrix}0&1&-3&4\\1&0&-2&3\\3&2&0&-5\\4&3&-5&0\end{vmatrix}=0\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}0&-2&3\\2&0&-5\\3&-5&0\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}1&-2&3\\3&0&-5\\4&-5&0\end{vmatrix}+$$

$$+(-3)\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}1&0&3\\3&2&-5\\4&3&0\end{vmatrix}+4\cdot(-1)^{1+4}\cdot\begin{vmatrix}1&0&-2\\3&2&0\\4&3&-5\end{vmatrix}=0\cdot0+(-1)\cdot(-30)-3\cdot18-4\cdot(-12)=24.$$

Чтобы получить определитель Δ_1, заменим в Δ первый столбец столбцом свободных членов

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}-5&1&-3&4\\-4&0&-2&3\\12&2&0&-5\\5&3&-5&0\end{vmatrix}=\left\{\begin{matrix}\text{разложим определитель по}\\\text{элементам второго столбца}\end{matrix}\right\}=$$

$$=1\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}-4&-2&3\\12&0&-5\\5&-5&0\end{vmatrix}+0\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}-5&-3&4\\12&0&-5\\5&-5&0\end{vmatrix}+$$

$$+2\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}-5&-3&4\\-4&-2&3\\5&-5&0\end{vmatrix}+3\cdot(-1)^{4+2}\cdot\begin{vmatrix}-5&-3&4\\-4&-2&3\\12&0&-5\end{vmatrix}=$$

$$=-1\cdot(-30)+0+(-2)\cdot0+3\cdot(-2)=24.$$

Аналогично вычисляем Δ_2,Δ_3 и Δ_4:

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}0&-5&-3&4\\1&-4&-2&3\\3&12&0&-5\\4&5&-5&0\end{vmatrix}=48,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}0&1&-5&4\\1&0&-4&3\\3&2&12&-5\\4&3&5&0\end{vmatrix}=24,$$

$$\Delta_4=\begin{vmatrix}0&1&-3&-5\\1&0&-2&-4\\3&2&0&12\\4&3&-5&5\end{vmatrix}=-24.$$

Отсюда $x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{24}{24}=1$, $x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{48}{24}=2$, $x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{24}{24}=1$, $x_4=\frac{\Delta_4}{\Delta}=\frac{-24}{24}=-1$.

Ответ**:** $X=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

Задача 3. Решите систему линейных уравнений

$$\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3+x_4-x_5=1,\\-2x_1-4x_2+4x_3-2x_4+2x_5=-2,\\-x_1-2x_2+2x_3-x_4+x_5=-1.\end{cases}$$

Решение:

Запишем расширенную матрицу системы

$$\left(A|B\right)=\left(\begin{array}{ccccc|c}1&2&-2&1&-1&1\\-2&-4&4&-2&2&-2\\-1&-2&2&-1&1&-1\end{array}\right)\to\{\alpha_2+2\alpha_1\to\alpha_2\}\to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccccc|c}1&2&-2&1&-1&1\\0&0&0&0&0&0\\-1&-2&2&-1&1&-1\end{array}\right)\to\{\alpha_3+\alpha_1\to\alpha_3\}\to\to\left(\begin{array}{ccccc|c}1&2&-2&1&-1&1\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(1\quad 2\quad -2\quad 1\quad -1\mid 1\right).$$

Ранг основной матрицы системы равен единице и совпадает с рангом расширенной матрицы системы, следовательно, по теореме Кронекера – Капелли система линейных уравнений совместна. Она равносильна уравнению:

$$x_1+2x_2-2x_3+x_4-x_5=1.$$

В качестве базисного неизвестного выберем x_1, остальные неизвестные считаем свободными. При $x_2=c_1$, $x_3=c_2$, $x_4=c_3$, $x_5=c_4$ выразим базисное неизвестное через эти параметры:

$x_1=-2c_1+2c_2-c_3+c_4+1$.

Итак,

$$\begin{cases}x_1=-2c_1+2c_2-c_3+c_4+1,\\x_2=c_1,\\x_3=c_2,\\x_4=c_3,\\x_5=c_4.\end{cases}$$

Ответ: $X=c_1\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_3\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+c_4\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$

Задача 4. Решите систему линейных уравнений

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+4x_4+4x_5+4x_6=18,\\2x_2+3x_3+4x_4+4x_5+4x_6=18,\\3x_3+4x_4+4x_5+4x_6=18,\\2x_1+4x_2+6x_3+8x_4+8x_5+8x_6=36,\\3x_1+6x_2+9x_3+12x_4+12x_5+12x_6=54,\\4x_1+8x_2+12x_3+16x_4+16x_5+16x_6=72.\end{cases}$$

Решение:

Запишем расширенную матрицу системы

$$\left(A|B\right)=\left(\begin{array}{cccccc|c}1&2&3&4&4&4&18\\0&2&3&4&4&4&18\\0&0&3&4&4&4&18\\2&4&6&8&8&8&36\\3&6&9&12&12&12&54\\4&8&12&16&16&16&72\end{array}\right)\to\{\alpha_4-2\alpha_1\to\alpha_4\}\to$$

$$\to\left(\begin{array}{cccccc|c}1&2&3&4&4&4&18\\0&2&3&4&4&4&18\\0&0&3&4&4&4&18\\0&0&0&0&0&0&0\\3&6&9&12&12&12&54\\4&8&12&16&16&16&72\end{array}\right)\to\begin{Bmatrix}\alpha_5-3\alpha_1\to\alpha_5\\\alpha_6-4\alpha_1\to\alpha_6\end{Bmatrix}\to\to\left(\begin{array}{cccccc|c}1&2&3&4&4&4&18\\0&2&3&4&4&4&18\\0&0&3&4&4&4&18\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccccc|c}1&2&3&4&4&4&18\\0&2&3&4&4&4&18\\0&0&3&4&4&4&18\end{array}\right).$$

В левом верхнем углу матрицы стоит треугольный определитель $\begin{vmatrix}1&2&3\\0&2&3\\0&0&3\end{vmatrix}=6\neq0$, значит его можно считать базисным минором. Ранг основной матрицы системы линейных уравнений равен трем и равен рангу ее расширенной матрицы, следовательно, система совместна по теореме Кронекера – Капелли. Для удобства продолжим преобразования матрицы и приведем базисный минор не только к треугольному, но и к диагональному виду. С помощью преобразований $\begin{cases}\alpha_1-\alpha_2\to\alpha_1\\\alpha_2-\alpha_3\to\alpha_2\end{cases}$ получим:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c}1&0&0&0&0&0&0\\0&2&0&0&0&0&0\\0&0&3&4&4&4&18\end{array}\right).$$

Восстановим по полученной матрице решение системы уравнений:

$$\begin{cases}x_1=0,\\2x_2=0,\\3x_3+4x_4+4x_5+4x_6=18.\end{cases}$$

Базисный минор содержит базисные неизвестные x_1, x_2, x_3. Свободными являются неизвестные x_4,x_5,x_6. Придадим свободным неизвестным значения $x_4=c_1,\ x_5=c_2,\ x_6=c_3$ и перенесем их в правую часть уравнений:

$$\begin{cases}x_1=0,\\2x_2=0,\\3x_3=-4c_1-4c_2-4c_3+18,\\x_4=c_1,\\x_5=c_2,\\x_6=c_3\end{cases}\leftrightarrow\begin{cases}x_1=0,\\x_2=0,\\x_3=-\frac{4}{3}c_1-\frac{4}{3}c_2-\frac{4}{3}c_3+6,\\x_4=c_1,\\x_5=c_2,\\x_6=c_3.\end{cases}$$

Ответ: $X=c_1\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\-\frac{4}{3}\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\-\frac{4}{3}\\0\\1\\0\end{pmatrix}+c_3\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\-\frac{4}{3}\\0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\6\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$

Задача 5. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4,\\x_2-x_3+x_4=-3,\\x_1+3x_2-3x_4=1,\\-7x_2+3x_3+x_4=-3.\end{cases}$$

Решение:

Воспользуемся методом Гаусса. Запишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & 3 & -4 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3\\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1\\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3\end{array}\right)\to\{\alpha_3-\alpha_1\to\alpha_3\}\to\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & 3 & -4 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3\\ 0 & 5 & -3 & 1 & -3\\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3\end{array}\right)\to$$

$$\to\left\{\begin{array}{l}\alpha_3-5\alpha_2\to\alpha_3,\\ \alpha_4+7\alpha_2\to\alpha_4\end{array}\right\}\to\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & 3 & -4 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 2 & -4 & 12\\ 0 & 0 & -4 & 8 & -24\end{array}\right)\to\{\alpha_4+2\alpha_3\to\alpha_4\}\to$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & 3 & -4 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 2 & -4 & 12\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\to\left\{\frac{\alpha_3}{2}\to\alpha_3\right\}\to\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & 3 & -4 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6\end{array}\right).$$

В левом верхнем углу стоит треугольный определитель третьего порядка

$$\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0,$$

значит ранг прямой матрицы системы равен 3, равен рангу ее расширенной матрицы, и система совместна.

Чтобы получить ее решение, получим нули под главной диагональю базисного минора с помощью преобразования $\alpha_2+\alpha_3\to\alpha_2$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & 3 & -4 & 4\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6\end{array}\right)\to\{\alpha_1+2\alpha_2\to\alpha_1\}\to\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 3 & -6 & 10\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6\end{array}\right)\to$$

$$\to\{\alpha_1-3\alpha_3\to\alpha_1\}\to\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 0 & 0 & -8\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6\end{array}\right).$$

Восстановим по матрице решение системы уравнений при $x_4=c$:

$$\begin{cases}x_1=-8,\\ x_2=3+c,\\ x_3=6+2c,\\ x_4=c.\end{cases}$$

Ответ: $X=c\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-8\\3\\6\\0\end{pmatrix}$.

Задача 6. Решите систему линейных уравнений

$$\begin{cases}2x_1+x_2-x_3+x_4=1,\\ 3x_1-2x_2+2x_3-3x_4=2,\\ 5x_1+x_2-x_3+2x_4=-1,\\ 2x_1-x_2+x_3-3x_4=4.\end{cases}$$

Решение:

Запишем расширенную матрицу системы уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c}2 & 1 & -1 & 1 & 1\\ 3 & -2 & 2 & -3 & 2\\ 5 & 1 & -1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 1 & -3 & 4\end{array}\right)\to\left\{\begin{array}{l}\alpha_3-\alpha_1-\alpha_2\to\alpha_3,\\ \alpha_4-\alpha_1\to\alpha_4\end{array}\right\}\to\left(\begin{array}{cccc|c}2 & 1 & -1 & 1 & 1\\ 3 & -2 & 2 & -3 & 2\\ 0 & 2 & -2 & 4 & -4\\ 0 & -2 & 2 & -4 & 3\end{array}\right)\to$$

$$\to\{\alpha_4+\alpha_3\to\alpha_4\}\to\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Система несовместна, так как ранг основной матрицы системы не равен рангу расширенной матрицы. Убедимся, что ранг основной матрицы меньше ранга расширенной матрицы. Чтобы не работать с дробями, проделаем вспомогательное преобразование $\alpha_2+\alpha_1\to\alpha_2,\quad \alpha_3:2\to\alpha_3$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)\to\{\alpha_1\leftrightarrow\alpha_2\}\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Таким образом, элемент $a_{11}=1$, что удобно для вычислений.

С помощью преобразования $\alpha_2-2\alpha_1\to\alpha_2$, получим

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 7 & -7 & 9 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)\to\left\{\begin{array}{l}\alpha_2\leftrightarrow\alpha_3, \\ \alpha_4\cdot(-1)\to\alpha_4\end{array}\right\}\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 7 & -7 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\to$$

$$\to\{\alpha_3-7\alpha_2\to\alpha_3\}\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Ранг прямой матрицы равен 3, так как она содержит минор

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}=-5\neq 0$$

третьего порядка и не содержит отличных от нуля определителей большего порядка.

Ранг расширенной матрицы равен 4, так как она содержит минор

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-5\neq 0$$

четвертого порядка. Следовательно, по теореме Кронекера – Капелли система несовместна.

4. ВАРИАНТЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Вариант 1

1.1. Перемножить матрицы $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^3$.

2.1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

3.1. Найти обратную матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4.1. Решить матричное уравнение $AXBC = E$,

где $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

5.1. Вычислить ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & 4 & 0 \\ 1 & 17 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Решить системы линейных уравнений:

6.1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_4 = 9, \\ 3x_1 + 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$

7.1. $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 6x_4 + 3x_5 = -9, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = -3, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 3. \end{cases}$

8.1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 2x_6 = 11, \\ 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 2x_6 = 11, \\ 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 2x_6 = 11, \\ 2x_4 + 2x_5 + 2x_6 = 11, \\ 2x_5 + 2x_6 = 11, \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 4x_5 + 4x_6 = 22. \end{cases}$

9.1. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_2 + x_3 + x_4 = -3, \\ x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ x_4 + x_5 = -1. \end{cases}$

Вариант 2

1.2. Перемножить матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}^2$.

2.2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

3.2. Найти обратную матрицу $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

4.2. Решить матричное уравнение $A^3X = B$,

где $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

5.2. Вычислить ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Решить системы линейных уравнений

6.2. $\begin{cases} 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 = -3, \\ 4x_4 = 4. \end{cases}$

7.2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 1, \\ -2x_1 - 4x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 2x_5 = -2, \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = -2. \end{cases}$

8.2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 4x_5 + 4x_6 = 0, \\ 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 4x_5 + 4x_6 = 0, \\ 3x_3 + 4x_4 + 4x_5 + 4x_6 = 0, \\ 4x_4 + 4x_5 + 4x_6 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 + 8x_5 + 8x_6 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 12x_4 + 12x_5 + 12x_6 = 0. \end{cases}$

9.2. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = -3, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 7. \end{cases}$

Вариант 3

1.3. Перемножить матрицы $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$.

2.3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$.

3.3. Найти обратную матрицу $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{pmatrix}$.

4.3. Решить матричное уравнение $AXA = C$,

где $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

5.3. Вычислить ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Решить системы линейных уравнений

6.3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 21, \\ 2x_1 + 3x_2 = 0, \\ 2x_2 + 3x_3 = 21, \\ 2x_3 + 4x_4 = 14. \end{cases}$

7.3. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 - 6x_3 - 4x_4 - 2x_5 = 6, \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = -6. \end{cases}$

8.3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 3x_6 = 15, \\ 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 3x_6 = 15, \\ 3x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 3x_6 = 15, \\ 3x_4 + 3x_5 + 3x_6 = 15, \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 6x_4 + 6x_5 + 6x_6 = 30, \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 9x_4 + 9x_5 + 9x_6 = 45. \end{cases}$

9.3. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 = -6. \end{cases}$

Вариант 4

1.4. Перемножить матрицы $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^3$

2.4. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$

3.4. Найти обратную матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4.4. Решить матричное уравнение $ABXC = E$,

где $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

5.4. Вычислить ранг матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Решить системы линейных уравнений

6.4. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 10, \\ 3x_1 + 3x_2 = 15, \\ -x_2 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_4 = 15. \end{cases}$

7.4. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 2, \\ -2x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 2x_5 = -4, \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = -2. \end{cases}$

8.4. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 3x_6 = 15, \\ 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 3x_6 = 15, \\ 3x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 3x_6 = 15, \\ 3x_4 + 3x_5 + 3x_6 = 15, \\ 3x_5 + 3x_6 = 15, \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 6x_4 + 6x_5 + 6x_6 = 45. \end{cases}$

9.4. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 5x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

Вариант 5

1.5. Перемножить матрицы $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.5. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$.

3.5. Найти обратную матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

4.5. Решить матричное уравнение $A^2X = C$,

где $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5.5. Вычислить ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{pmatrix}$.

Решить системы линейных уравнений

6.5. $\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + x_3 = 0, \\ x_2 + x_4 = 2. \end{cases}$

7.5. $\begin{cases} 3x_1 + 12x_2 - 3x_3 + 6x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 0, \\ -x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

8.5. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 6, \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 6, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 2x_6 = 12, \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 3x_6 = 18, \\ 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 4x_5 + 4x_6 = 24, \\ 5x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 5x_6 = 30. \end{cases}$

9.5. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 = -3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 10, \\ x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = -5, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 = 1. \end{cases}$

5. ОТВЕТЫ К ВАРИАНТАМ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Вариант	Задачи				
	1	2	3	4	5
1	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	48	$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	2
2	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$	5	$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$	4
3	$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$	665	$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$	3
4	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	394	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & -1 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$	4
5	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	3

Вариант	Задачи	
	6	7
1	$X=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\3\end{pmatrix}$	$X=C_1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+C_2\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+C_3\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+C_4\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$
2	$X=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$	несовместна
3	$X=\begin{pmatrix}0\\0\\7\\0\end{pmatrix}$	несовместна
4	$X=\begin{pmatrix}5\\0\\0\\0\end{pmatrix}$	$X=C_1\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+C_2\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+C_3\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+C_4\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$
5	$X=\begin{pmatrix}0\\2\\0\\0\end{pmatrix}$	$X=C_1\cdot\begin{pmatrix}-4\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+C_2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+C_3\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+C_4\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

Вариант	Задачи	
	8	9
1	$X = C \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{11}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$	$X = C \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
2	$X = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$X = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 4/5 \\ 2/5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} 1/5 \\ 3/5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
3	$X = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
4	несовместна	$X = C \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
5	$X = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	несовместна

6. БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бугров Е.С. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Е.С. Бугров, С.М. Никольский. М.: Наука, 1984.
2. Бугров Е.С. Высшая математика: Задачник / Е.С. Бугров, С.М. Никольский. М.: Наука, 1982.
3. Сборник задач по математике для втузов / под редакцией А.В. Ефимова. М.: Наука, 1993. Т.1; 1994. Т.2.
4. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д.В.Беклемишев. М.: Наука, 1984.
5. Наумов В.А. Руководство к решению задач по линейной алгебре и аналитической геометрии / В.А.Наумов. М.: Наука, 1993.
6. Фадеев Д.К. Сборник задач по высшей алгебре / Д.К. Фадеев, Н.С. Соминский. М.: Наука, 1997.
7. Беклемишева Л.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре / Л.А. Беклемишева, А.Ю. Петрович, И.А. Чубаров. М.: Наука, 1987.
8. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике / Л.А. Кузнецов М.: Высшая школа, 1994.

Учебное пособие

Соболев Александр Борисович
Вигура Марина Александровна
Рыбалко Александр Федорович
Рыбалко Наталья Михайловна

II. МАТРИЦЫ, ОПРЕДЕЛИТЕЛИ, СИСТЕМЫ

Редактор *Н.П.Кубыщенко*

Подписано в печать 15.04.2005 Формат 60x84 1/16
Бумага писчая Плоская печать Усл.печ.л. 2,38
Уч.-изд.л. 2,2 Тираж Заказ Цена "С"

Редакционно-издательский отдел ГОУ ВПО УГТУ–УПИ
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19

ООО «Издательство УМЦ УПИ»
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 17