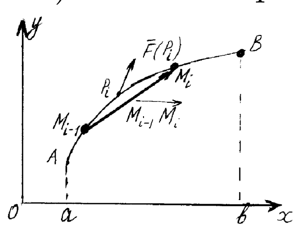
Криволинейные интегралы

§1. Криволинейные интегралы второго рода

Рассмотрим задачу вычисления работы силового поля при перемещении материальной точки вдоль пути l. Напомним, что если в каждой точке пространства (плоскости) задан вектор, то говорят, что в пространстве (на плоскости) задано *векторное поле*. Мы будем интерпретировать вектор, заданный в данной точке пространства, как силу, действующую на материальную точку, помещенную в эту точку пространства. Если задана система координат, то задание вектора эквивалентно заданию координат этого вектора. Поэтому задание векторного поля на плоскости эквивалентно (при фиксированной системе координат Oxy) заданию двух функций F_1 и F_2:

$$\vec{F}(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))\,.$$

Пусть кривая l задается уравнением $y = f(x)$. Разобьем кривую l на n частей точками $(M_0, M_1, \ldots, M_n)$ и на каждой дуге $M_{i-1}M_i$ выберем точку P_i. Если длина Δl_i отрезка кривой $M_{i-1}M_i$ достаточно мала, то можно приближенно заменить криволинейное перемещение по дуге $\smile M_{i-1}M_i$ на прямолинейное перемещение на вектор $\overrightarrow{M_{i-1}M_i}$, а силу $\vec{F}$ считать постоянной и равной $\vec{F}(P_i)$ (см. рисунок). Таким образом, работа ΔA_i при перемещении



вдоль дуги $\smile M_{i-1}M_i$ приближенно может быть вычислена по формуле

$$\Delta A_i \cong \left(\vec{F}(P_i), \overrightarrow{M_{i-1}M_i}\right). \tag{1}$$

Если $((x_0,y_0),\ldots,(x_n,y_n))$ значения координат, отвечающие точкам $(M_0,\ldots,M_n)$, а (x_i^*, y_i^*) значения координат, отвечающие точкам P_i, то формула (1) приобретает вид

$$\Delta A_i \cong F_1\left(x_i^*, y_i^*\right)\Delta x_i + F_2\left(x_i^*, y_i^*\right)\Delta y_i,$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$. Просуммировав выражения для ΔA_i по $i = (1, 2, \ldots n)$, получим приближенную формулу для работы вдоль пути l:

$$\Delta A_i \cong \sum_{i=1}^{n}\left[F_1\left(x_i^*, y_i^*\right)\Delta x_i + F_2\left(x_i^*, y_i^*\right)\Delta y_i\right].$$

Естественно ожидать, что при $d \to 0$ ($d = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta l_i$) мы получим точную формулу

$$A = \lim_{d \to 0}\sum_{i=1}^{n}\left[F_1\left(x_i^*, y_i^*\right)\Delta x_i + F_2\left(x_i^*, y_i^*\right)\Delta y_i\right].$$

Приведенные рассуждения являются мотивацией следующего определения.

Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны в точках дуги AB кривой l, имеющей уравнение $y = f(x)$ $(a < x < b)$.

Криволинейным интегралом 2-го рода (или криволинейным интегралом по координатам) от выражения $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ по направленной дуге AB называется предел интегральных сумм при условии $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta x_i \to 0$, $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta y_i \to 0$:

(2)

$$\int\limits_{\smile AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ \max \Delta y_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n}\left[P(x_i, y_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i)\Delta y_i\right]$$

То есть криволинейный интеграл 2-го рода есть работа, совершаемая переменной силой $\vec{F} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ на криволинейном пути AB.

Криволинейный интеграл по координатам меняет знак на противоположный при изменении направления пути интегрирования

$$\int\limits_{AB} = -\int\limits_{BA}.$$

Кривую интегрирования можно разбить на части

$$\int\limits_{AB} = \int\limits_{AC} + \int\limits_{CB}.$$

Криволинейный интеграл 2-го рода (2) вычисляется по формуле

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_{x_A}^{x_B} [P(x,f(x)) + Q(x,f(x))y']\,dx. \tag{3}$$

Если кривая l задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, где $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, то имеем

(4)

$$\int\limits_{\smile AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_{t_1}^{t_2} (P\,[\varphi(t),\psi(t)]\,\varphi'(t) + Q\,[\varphi(t),\psi(t)]\,\psi'(t))\,dt.$$

Аналогичная формула имеет место для криволинейного интеграла 2-го рода по пространственной кривой l. Если кривая l задана уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, где $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, то

(5)

$$\int\limits_{\smile AB} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz =$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} (P\,[x(t),y(t),z(t)]\,x'(t) + Q\,[x(t),y(t),z(t)]\,y'(t) + R\,[x(t),y(t),z(t)]\,z'(t))\,dt$$

Пример 1. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{l} x\,dy - y\,dx,$$

взятый по окружности радиуса R с центром в начале координат, которая обходится против часовой стрелки.

Решение.

Параметризация окружности дается формулами

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

$$\int\limits_{l} x\,dy - y\,dx = \int\limits_{0}^{2\pi} [R\cos t \cdot R\cos t - R\sin t\,(-R\sin t)]\;dt = 2\pi R^2.$$

Пример 2. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\smile AB} (xy-1)\,dx + x^2y\,dy$$

от точки $A(1,2)$ до точки $B(2,4)$ по прямой AB.

Решение.

Составим уравнение прямой AB:

$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A} = \frac{y-y_A}{y_B-y_A} \quad\Longrightarrow\quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} \quad\Longrightarrow\quad y = 2x.$$

Согласно формуле (3) и, т.к. $dy = y'\,dx = 2\,dx$,

$$\int\limits_{\smile AB} (x\cdot 2x-1)\,dx + x^2\cdot 2x\cdot 2\,dx = \int\limits_1^2 \left(2x^2-1+4x^3\right)\,dx =$$

$$= \left(\frac{2}{3}x^3 - x + x^4\right)\Big|_1^2 = \frac{56}{3}.$$

Пример 3. Даны точки $O(0,0,0)$ и $B(-2,4,5)$. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int xy^2\,dx + yz^2\,dy - zx^2\,dz$$

по прямой OB.

Решение.

Составим уравнения прямой OB

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} \quad\Longrightarrow\quad \frac{x}{-2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}.$$

Параметризуя эти уравнения, получим

$$\frac{x}{-2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} = t \quad\Longrightarrow\quad x=-2t,\ y=4t,\ z=5t,\ 0\leqslant t\leqslant 1.$$

Далее, вычисляя данный интеграл по (5), получим

$$\int\limits_{\smile AB} xy^2\,dx + yz^2\,dy - zx^2\,dz = \int\limits_0^1 364t^3\,dt = 91.$$

§2. Независимость криволинейного интеграла 2-го рода от пути интегрирования. Нахождение функции по ее полному дифференциалу

В некоторых случаях криволинейный интеграл

$$\int\limits_l P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

не зависит от того, каким образом линия интегрирования соединяет заданные начальную M_0 и конечную M_1 точки плоскости. Важность этого свойства криволинейного интеграла вытекает из его интерпретации, как работы по перемещению материальной точки в силовом поле $\vec{F} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ вдоль кривой l (см. §1). Поэтому независимость интеграла от способа соединения начальной и конечной точек кривой интегрирования эквивалентна независимости работы в соответствующем силовом поле от пути материальной точки, а это означает, что силовое поле является потенциальным, т.е. в нем выполняется закон сохранения энергии.

Условие независимости криволинейного интеграла 2-го рода от пути интегрирования. Пусть D — односвязная область на плоскости (это означает, что любая замкнутая линия, лежащая в этой области, может быть стянута в точку, оставаясь в этой области), $P = P(x,y)$ и $Q = Q(x,y)$ функции, непрерывные в D вместе со своими частными производными. Тогда $\int\limits_l P\,dx + Q\,dy$ не зависит от кривой $l \subset D$ (т.е. зависит лишь от начальной и конечной точек l), если $\oint\limits_C P\,dx + Q\,dy = 0$ для любого замкнутого контура $C \subset D \Leftrightarrow$[1] выражение $P\,dx + Q\,dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $\varphi = \varphi(x,y)$ в области $D \Leftrightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x} = P$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q \Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ в D.

Если $\int\limits_l P\,dx + Q\,dy$ не зависят от пути l, то мы можем использовать обозначение $\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} P\,dx + Q\,dy$, где $M_0(x_0,y_0)$ — начальная, а $M_1(x_1,y_1)$ — конечная точки кривой l. В этом случае справедлива формула Ньютона–

[1] $\Leftrightarrow$ — знак эквивалентности

Лейбница

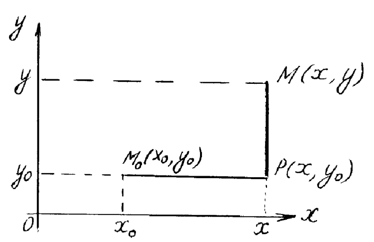
$$\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} d\varphi = \varphi(x,y)\big|_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} = \varphi(x_1,y_1) - \varphi(x_0,y_0),$$

где $P\,dx + Q\,dy = d\varphi$.

Функцию $\varphi = \varphi(x,y)$ можно определить из равенства

$$\varphi(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\,dx + Q\,dy,$$

где $M_0(x_0,y_0)$ — произвольная фиксированная точка области D. В качестве линии интегрирования здесь можно взять ломаную, соединяющую точки $M_0(x_0,y_0)$ и $M(x,y)$, звенья которой параллельны координатным осям (см. рисунок).



Тогда

$$\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{M_0P} P\,dx + Q\,dy + \int\limits_{PM} P\,dx + Q\,dy.$$

Заметим, что для участка M_0P: $dy = 0$, т.к. $y_0 = \text{const}$, а для участка PM: $dx = 0$, т.к. $x = \text{const}$. Следовательно,

$$\varphi(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0)\,dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)\,dy.$$

Пример. Проверить, что указанный интеграл не зависит от пути интегрирования и вычислить его с помощью формулы Ньютона–Лейбница:

$$\int\limits_{(-1,2)}^{(2,3)} x\,dy + y\,dx.$$

Решение.

Здесь $P = y$, $Q = x$. Так как $\frac{\partial P}{\partial y} = 1 = \frac{\partial Q}{\partial x}$, этот интеграл не зависит от пути интегрирования. Далее

$$\varphi(x, y) = \int\limits_0^x P(x, 0)\,dx + \int\limits_0^y Q(x, y)\,dy = \int\limits_0^1 0 \cdot dx + \int\limits_0^y x\,dy = xy.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{(-1,2)}^{(2,3)} x\,dy + y\,dx = \quad xy\Big|_{(-1,2)}^{(2,3)} = 6 - (-2) = 8.$$

§3. Формула Грина

Если C — замкнутая граница области D и функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ вместе со своими частными производными первого порядка $\frac{\partial Q}{\partial x}$ и $\frac{\partial P}{\partial y}$ непрерывны в замкнутой области D (включая границу C), то справедлива формула Грина:

$$(1) \qquad \oint\limits_C P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

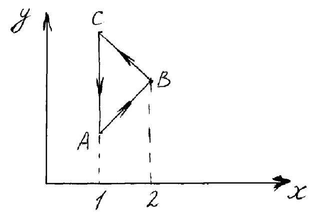
причем обход контура C выбирается так, что область D остается слева.

Пример 1. Вычислить $\oint\limits_C 2\left(x^2 + y^2\right) dx + (x + y)^2 dy$, применяя формулу Грина, если C — контур треугольника с вершинами $A(1, 1)$, $B(2, 2)$, $C(1, 3)$, пробегаемый против хода часовой стрелки.

Решение.

В данном интеграле $P = 2\left(x^2 + y^2\right)$, $Q = (x + y)^2$. Следовательно,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2(x + y) - 4y = 2(x - y).$$



Таким образом,

$$\oint\limits_C 2\left(x^2+y^2\right)dx+(x+y)^2\,dy=\iint\limits_D 2(x-y)dx\,dy,$$

где область D — треугольник ABC.

Уравнение прямой AB: $y=x$, уравнение BC: $y=4-x$. Вычисляем двойной интеграл по данной области

$$\iint\limits_D 2(x-y)dx\,dy=2\int\limits_1^2 dx\int\limits_x^{-x+4}(x-y)\,dy=-\frac{4}{3}.$$

Пример 2. С помощью формулы Грина вычислить интеграл

$$\int\limits_l (2x+y)dx+(y-x)dy,$$

взятый по окружности $x^2+y^2=R^2$, проходимой против часовой стрелки.

Решение.

По формуле (1) имеем

$$\int\limits_l (2x+y)dx+(y-x)dy=\iint\limits_D\left[\frac{\partial}{\partial x}(y-x)-\frac{\partial}{\partial y}(2x+y)\right]dx\,dy=-2\iint\limits_D dx\,dy,$$

где D — круг $x^2+y^2\leqslant R^2$. Поскольку площадь этого круга равна $\iint\limits_D dx\,dy=$ $=\pi R^2$, окончательно получаем

$$\int\limits_l (2x+y)dx+(y-x)dy=-2\pi R^2.$$

Пример 3. Проверить выполнение формулы Грина (1) для функций

$$P(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

и области D: $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

Решение.

Непосредственное вычисление криволинейного интеграла дает:

$$\int\limits_l \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2} = 2\pi$$

(проверьте!). С другой стороны

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x^2 + y^2 - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 + y^2 - 2y \cdot y}{(x^2 + y^2)^2} = 0$$

и поэтому

$$\iint\limits_D \left[\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\right] dx\,dy = 0.$$

Формула Грина в этом случае *не выполняется*. Причина этого заключается в том, что функции P и Q не являются непрерывными в начале координат.