

# Интегральное исчисление функции одной переменной

## §1. Неопределенный интеграл. Основные свойства неопределенного интеграла

### 1.1. Общие понятия

**Определение 1.** Функция  $F(x)$  называется первообразной для функции  $f(x)$  на  $(a, b)$ , если для любого  $x \in (a, b)$   $F'(x) = f(x)$ .

**Пример 1.** Функция  $\sin(5x - 1)$  есть первообразная для функции  $5 \cos(5x - 1)$  на всей числовой прямой, так как  $(\sin(5x - 1))' = 5 \cos(5x - 1)$ .

Если функция  $f(x)$  имеет на  $(a, b)$  первообразную  $F_0(x)$ , то множество всех первообразных функции  $f(x)$  на  $(a, b)$  совпадает с множеством функций  $F(x) = F_0(x) + C$ , где  $C$  — любая постоянная.

**Определение 2.** Неопределенным интегралом от функции  $f(x)$  на  $(a, b)$  называется множество всех первообразных  $F(x)$  (если они существуют) функции  $f(x)$  на  $(a, b)$ . Неопределенный интеграл от  $f(x)$  на  $(a, b)$  обозначается символом  $\int f(x) dx$ ;  $f(x)$  называется подинтегральной функцией.

**Пример 2.** Пусть  $f(x) = x^2$ . Функция  $F(x) = \frac{x^3}{3}$  есть первообразная для функции  $f(x) = x^2$  на промежутке  $(-\infty; +\infty)$ , так как  $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{3x^2}{3} = x^2$ . Поэтому

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

**Пример 3.** Пусть  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Первообразной  $f(x) = \frac{1}{x}$  на промежутке  $(0, +\infty)$  является функция  $F(x) = \ln x$ , а на промежутке  $(-\infty; 0)$  функция  $F(x) = \ln(-x)$ . Таким образом, функция  $F(x) = \ln|x|$  есть первообразная для функции  $f(x) = \frac{1}{x}$  на любом промежутке, не содержащем 0. Поэтому

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

Основные свойства неопределенного интеграла:

- 1)  $d \int f(x) dx = f(x) dx$ ;
- 2)  $\left(\int f(x) dx\right)' = f(x)$ ;
- 3)  $\int df(x) = \int f'(x) dx$ .

Основные правила вычисления неопределенных интегралов.

1) Пусть на  $(a, b)$  существуют неопределенные интегралы  $\int g(x) dx$  и  $\int f(x) dx$ . Тогда для любых  $\alpha$  и  $\beta$  на  $(a, b)$  справедлива формула:

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx.$$

2) Пусть функции  $u(x), v(x)$  имеют непрерывные производные  $u'(x), v'(x)$  на промежутке  $(a, b)$ . Тогда справедливо равенство:

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) dx$$

или

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

3) Пусть на  $(\alpha; \beta)$  существует неопределенный интеграл  $\int f(t) dt = F(t) + C$ . Пусть функция  $t = u(x)$  имеет непрерывную производную  $u'(x)$  на  $(a, b)$  и  $u((a, b)) \subset (\alpha, \beta)$ . Тогда на  $(a, b)$  справедливо равенство:

$$\int f(u(x))u'(x) dx = \int f(u(x)) du(x) = F(u(x)) + C \left( = \int f(t) dt \right).$$

4) Пусть строго монотонная функция  $x = \omega(t)$  имеет непрерывную производную  $\omega'(t)$  на  $(\alpha, \beta)$  и  $\omega(t) : (\alpha; \beta) \rightarrow (a, b)$ . Пусть функция  $f(x)$  определена на  $(a, b)$  и существует неопределенный интеграл

$$\int f(\omega(t))\omega'(t) dt = \int g(t) dt = G(t) + C.$$

Тогда на  $(a, b)$  имеем:

$$\int f(x) dx = \int f(\omega(t)) d\omega(t) = \int f(\omega(t))\omega'(t) dt = G(t) + C = G(v(x)) + C,$$

где  $t = v(x)$  — функция, обратная к функции  $x = \omega(t)$ .

Таблица основных неопределенных интегралов.

- 1)  $\int 0 \cdot dx = C$ ;
- 2)  $\int 1 dx = x + C$ ;
- 3)  $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$ ;
- 4)  $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C \quad (x \neq 0)$ ;
- 5)  $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$ ,  $\int e^x dx = e^x + C$ ;
- 6)  $\int \sin x dx = -\cos x + C$ ;
- 7)  $\int \cos x dx = \sin x + C$ ;
- 8)  $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n; n = 0; \pm 1; \pm 2; \dots)$ ;
- 9)  $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C \quad (x \neq \pi n; n = 0; \pm 1; \pm 2; \dots)$ ;

- 10)  $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0);$   
 11)  $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C \quad (a \neq 0; |x| \neq |a|);$   
 12)  $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0; |x| < |a|);$   
 13)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln |x + \sqrt{x^2+k}| + C \quad (k \neq 0, \text{ в случае } k < 0 \text{ } |x| > |k|);$   
 14)  $\int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + C;$   
 15)  $\int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + C;$   
 16)  $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C;$   
 17)  $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C; \quad (x \neq 0).$

Таблица основных дифференциалов.

- 1)  $dx = \frac{1}{a} d(ax + b) \quad (a \neq 0);$   
 2)  $x^p dx = \frac{dx^{p+1}}{p+1} \quad (p \neq -1);$   
 3)  $\frac{dx}{x} = d(\ln |x|) \quad (x \neq 0);$   
 4)  $\sin x \, dx = -d \cos x;$   
 5)  $\cos x \, dx = d \sin x;$   
 6)  $\frac{dx}{\cos^2 x} = d \operatorname{tg} x;$   
 7)  $\frac{dx}{\sin^2 x} = -d \operatorname{ctg} x;$   
 8)  $a^x dx = \frac{da^x}{\ln a}; \quad e^x dx = de^x;$   
 9)  $\operatorname{sh} x \, dx = d \operatorname{ch} x;$   
 10)  $\operatorname{ch} x \, dx = d \operatorname{sh} x;$   
 11)  $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d \operatorname{arcsin} x = -d \operatorname{arccos} x;$   
 12)  $\frac{dx}{1+x^2} = d \operatorname{arctg} x = -d \operatorname{arcctg} x.$

## 1.2. Интегрирование путем замены переменных

Один из наиболее распространенных методов, применяемых при вычислении неопределенных интегралов — метод замены переменных. В его основе лежат правила 3 и 4, сформулированные в предыдущем пункте. Метод подстановки состоит в том, что согласно виду подынтегральной функции составляют вспомогательную функцию, подстановка которой в исходный интеграл приводит его к виду, более удобному для интегрирования.

Выделяются две формы подстановки.

**I.** Пусть требуется вычислить интеграл  $\int g(x) \, dx$ . Согласно правилу 3 выберем, если это удастся, такую функцию  $u(x)$ , что подынтегральное выражение представляется в виде:

$$\int g(x) \, dx = \int f(u(x))u'(x) \, dx = \int f(u(x)) \, du(x).$$

Тогда, делая замену переменных  $t = u(x)$ , по сказанному выше, достаточно

найти интеграл

$$\int f(t) dt, \quad t = u(x).$$

Изложенный метод применяется при вычислении интегралов вида:

1)  $\int f(ax + b) dx,$

делая замену  $t = ax + b$ , получим:

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} \int f(ax + b) d(ax + b) = \frac{1}{a} \int f(t) dt;$$

2)  $\int f(\sin x) \cos x dx,$

делая замену  $t = \sin x$ , получим:

$$\int f(\sin x) \cos x dx = \int f(\sin x) d \sin x = \int f(t) dt;$$

3)  $\int f(\cos x) \sin x dx,$

делая замену  $t = \cos x$ , получим:

$$\int f(\cos x) \sin x dx = - \int f(\cos x) d \cos x = - \int f(t) dt;$$

4)  $\int f(\operatorname{tg} x) \frac{1}{\cos^2 x} dx,$

делая замену  $t = \operatorname{tg} x$ , получим:

$$\int f(\operatorname{tg} x) \frac{dx}{\cos^2 x} = \int f(\operatorname{tg} x) d \operatorname{tg} x = \int f(t) dt;$$

5)  $\int (\ln x) \frac{1}{x} dx,$

делая замену  $t = \ln x$ , получим:

$$\int f(\ln x) \frac{dx}{x} = \int f(\ln(x)) d \ln x = \int f(t) dt;$$

6)  $\int f(e^x) e^x dx,$

делая замену  $t = e^x$ , получим:

$$\int f(e^x) e^x dx = \int f(e^x) de^x = \int f(t) dt;$$

7)  $\int (ax^2 + b)^p x dx,$

делая замену  $t = ax^2 + b$ , получим:

$$\int (ax^2 + b)^p x dx = \frac{1}{2} \int (ax^2 + b)^p dx^2 = \frac{1}{2a} \int (ax^2 + b)^p d(ax^2 + b) = \frac{1}{2a} \int t^p dt.$$

**Пример 4.**

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{5x+2}} &= \frac{1}{5} \int \frac{d(5x+2)}{\sqrt{5x+2}} = \\ &= \frac{1}{5} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{5} \int t^{-1/2} dt = \frac{2}{5} t^{1/2} + C = \frac{2}{5} \sqrt{5x+2} + C. \end{aligned}$$

**Пример 5.**

$$\begin{aligned} \int \sin(3x-4) dx &= \frac{1}{3} \int \sin(3x-4) d(3x-4) = \\ &= \frac{1}{3} \int \sin t dt = -\frac{1}{3} \cos t + C = -\frac{1}{3} \cos(3x-4) + C. \end{aligned}$$

**Пример 6.**

$$\int \frac{dx}{2x-6} = \frac{1}{2} \int \frac{d(2x-6)}{2x-6} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln |t| + C = \frac{1}{2} \ln |2x-6| + C.$$

**Пример 7.**

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \int \sin^3 x d \sin x = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

**Пример 8.**

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x}{4-\cos x} dx &= \int \frac{d(-\cos x)}{4-\cos x} = \int \frac{d(-\cos x+4)}{4-\cos x} = \\ &= \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln |4-\cos x| + C. \end{aligned}$$

**Пример 9.**

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin x \cos x} &= \int \frac{\cos x}{\sin x \cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\operatorname{tg} x \cos^2 x} dx = \\ &= \int \frac{d \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln |\operatorname{tg} x| + C. \end{aligned}$$

**Пример 10.**

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x d \ln x = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{1}{2} \ln^2 x + C.$$

**Пример 11.**

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1} d2x = \frac{1}{2} \int \frac{de^{2x}}{e^{2x} + 1} = \frac{1}{2} \int \frac{d(e^{2x} + 1)}{e^{2x} + 1} = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln |t| + C = \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1) + C. \end{aligned}$$

**Пример 12.**

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{5x^2 - 3} &= \frac{1}{2} \int \frac{dx^2}{5x^2 - 3} = \frac{1}{2 \cdot 5} \int \frac{d(5x^2 - 3)}{5x^2 - 3} = \\ &= \frac{1}{10} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{10} \ln |t| + C = \frac{1}{10} \ln |5x^2 - 3| + C. \end{aligned}$$

**II.** Применяя вторую форму подстановки, пользуются правилом 4. В подынтегральное выражение непосредственно подставляют вместо  $x$  функцию  $x = \omega(t)$ , а именно:

$$\int f(x) dx = \int f(\omega(t)) d\omega(t) = \int f(\omega(t)) \omega'(t) dt = \int g(t) dt,$$

где  $g(t)$  — более удобная для интегрирования функция, чем  $f(x)$ . При этом на функцию  $\omega(t)$  накладываются условия строгой монотонности, что обеспечивает существование обратной функции  $t = v(x)$  и представление:

$$\int f(x) dx = \int g(t) dt = G(t) + C = G(v(x)) + C.$$

**Пример 13.**

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(4 + \sqrt[3]{x})}.$$

Применяя подстановку  $x = t^6$ , получим  $\sqrt{x} = t^3$ ,  $\sqrt[3]{x} = t^2$ ,  $dx = dt^6 = 6t^5 dt$  и

$$\begin{aligned} \int \frac{6t^5 dt}{t^3(4 + t^2)} &= 6 \int \frac{t^2}{4 + t^2} dt = 6 \int \frac{t^2 + 4 - 4}{t^2 + 4} dt = \\ &= 6 \int \left( 1 - \frac{4}{t^2 + 4} \right) dt = 6 \int dt - 24 \int \frac{dt}{t^2 + 4} = \\ &= 6t - 12 \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C = 6\sqrt[6]{x} + 12 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[6]{x}}{2} + C. \end{aligned}$$

**Пример 14.**

$$\int \sqrt{9 - x^2} dx.$$

Применяя подстановку  $x = 3 \sin t$ ,  $-3 \leq x \leq 3$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $t = \arcsin \frac{x}{3}$ ,  $dx = d(3 \sin t) = 3 \cos t dt$ , получим

$$\begin{aligned} \int \sqrt{9 - 9 \sin^2 t} 3 \cos t dt &= \int \sqrt{9 \cos^2 t} 3 \cos t dt = 9 \int \cos^2 t dt = \\ &= 9 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{9}{2} \left( \int dt + \int \cos 2t dt \right) = \frac{9}{2} t + \frac{9}{4} \sin 2t + C = \\ &= \frac{9}{2} \arcsin \frac{x}{3} + \frac{9}{4} \sin \left( 2 \arcsin \frac{x}{3} \right) + C. \end{aligned}$$

Преобразуем отдельно выражение  $\sin \left( 2 \left( \arcsin \frac{x}{3} \right) \right)$ , для этого воспользуемся формулой:

$$\sin 2t = 2 \sin t \cos t = 2 \sin t \cdot \sqrt{1 - \sin^2 t}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2},$$

поэтому

$$\begin{aligned} \sin \left( 2 \arcsin \frac{x}{3} \right) &= 2 \sin \left( \arcsin \frac{x}{3} \right) \cdot \sqrt{1 - \sin^2 \left( \arcsin \frac{x}{3} \right)} = \\ &= 2 \cdot \frac{x}{3} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}} = \frac{2}{9} x \cdot \sqrt{9 - x^2}. \end{aligned}$$

Отсюда окончательно получим:

$$\int \sqrt{9 - x^2} dx = \frac{9}{2} \arcsin \frac{x}{3} + \frac{1}{2} x \cdot \sqrt{9 - x^2} + C.$$

### 1.3. Интегрирование по частям

Пусть функции  $u(x)$ ,  $v(x)$  имеют непрерывные производные  $u'(x)$ ,  $v'(x)$  на промежутке  $(a, b)$ , тогда справедливо равенство:

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) dx \quad (1)$$

или

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Необходимо заметить, что применение метода интегрирования по частям приводит к частичному интегрированию, так как и правая часть формулы (1) содержит интеграл. Однако при правильном применении метода интеграл из правой части (1) будет табличным или легко сводящимся к табличному. При вычислении некоторых интегралов метод интегрирования по частям может применяться несколько раз. Правило интегрирования по

частям имеет более ограниченную область применения, чем замена переменной. Но есть целые классы интегралов, например:

$$\int x^k \ln^m x dx, \quad \int x^k \sin ax dx, \quad \int x^k \cos ax dx, \quad \int x^k e^{ax} dx,$$

$$\int x^k \arcsin ax dx, \quad \int x^k \arccos ax dx, \quad \int x^k \operatorname{arctg} ax dx$$

и другие, которые вычисляются именно с помощью интегрирования по частям.

**I.** При интегрировании функций вида  $P_m(x) \sin ax$ ,  $P_m(x) \cos ax$ ,  $P_m(x)e^{ax}$ , где  $P_m(x)$  произвольный многочлен степени  $m$ , в качестве функции  $u(x)$  из формулы (1) берется многочлен  $P_m(x)$ , а в качестве  $v'(x)$  другой сомножитель.

**Пример 15.**  $\int x \cdot \sin 3x dx$ . Пусть  $u(x) = x$ ,  $v'(x) = \sin 3x$ , тогда

$$dv = \sin 3x dx = \frac{\sin 3x}{3} d3x = -\frac{1}{3} d \cos 3x.$$

$$\int x \cdot \sin 3x dx = -\frac{1}{3} \int x d \cos 3x = -\frac{1}{3} \left( x \cdot \cos 3x - \int \cos 3x dx \right) =$$

$$= -\frac{1}{3} x \cos 3x + \frac{1}{3} \int \cos 3x dx = -\frac{1}{3} x \cos 3x + \frac{1}{9} \int \cos 3x d3x =$$

$$= -\frac{1}{3} x \cos 3x + \frac{1}{9} \sin 3x + C.$$

**Пример 16.**  $\int xe^{-4x} dx$ . Пусть  $u(x) = x$ ,  $v'(x) = e^{-4x}$ , тогда

$$v'(x) dx = dv(x) = e^{-4x} dx = -\frac{e^{-4x}}{4} d(-4x) = -\frac{1}{4} de^{-4x}.$$

$$\int xe^{-4x} dx = -\frac{1}{4} \int x de^{-4x} = -\frac{1}{4} \left( x \cdot e^{-4x} - \int e^{-4x} dx \right) =$$

$$= -\frac{1}{4} xe^{-4x} + \frac{1}{4} \int e^{-4x} dx = -\frac{1}{4} xe^{-4x} - \frac{1}{16} \int e^{-4x} d(-4x) =$$

$$= -\frac{1}{4} xe^{-4x} - \frac{1}{16} e^{-4x} + C.$$

Как было сказано выше, при вычислении интегралов формула интегрирования по частям может применяться несколько раз.



**Пример 17.**  $\int x^2 \cdot \cos 2x dx$ . Пусть  $u(x) = x^2$ ,  $v'(x) = \cos 2x$ , тогда

$$v'(x) dx = dv(x) = \cos 2x dx = \frac{1}{2} \cos 2x d2x = \frac{1}{2} d \sin 2x.$$

$$\int x^2 \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int x^2 d \sin 2x = \frac{1}{2} \left( x^2 \sin 2x - \int \sin 2x dx^2 \right). \quad (2)$$

Так как  $dx^2 = 2x dx$ , то в последнем интеграле получим

$$\int \sin 2x dx^2 = \int (\sin 2x) \cdot 2x dx.$$

Полагая  $u(x) = 2x$ ,  $v'(x) = \sin 2x$ ;  $v'(x) dx = \sin 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x d2x = -\frac{1}{2} d \cos 2x$ , имеем

$$\begin{aligned} \int (\sin 2x) \cdot 2x dx &= \int 2x \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) d \cos 2x = - \int x d \cos 2x = \\ &= - \left( x \cos 2x - \int \cos 2x dx \right) = -x \cos 2x + \frac{1}{2} \int \cos 2x d2x = \\ &= -x \cos 2x + \frac{1}{2} \sin 2x + C. \end{aligned}$$

Окончательно, подставляя последний результат в (2), получим

$$\begin{aligned} \int x^2 \cos 2x dx &= \frac{1}{2} \left( x^2 \cdot \sin 2x + x \cos 2x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) + C = \\ &= \frac{1}{2} x^2 \sin 2x + \frac{1}{2} x \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x + C. \end{aligned}$$

**II.** При интегрировании функций вида:  $P_m(x) \arcsin ax$ ,  $P_m(x) \arccos ax$ ,  $P_m(x) \operatorname{arctg} ax$ ,  $P_m(x) \ln ax$  в качестве  $v'(x)$  выбирается многочлен  $P_m(x)$ , а в качестве  $u(x)$  оставшаяся функция.

**Пример 18.**  $\int x \ln x dx$ . Пусть  $u(x) = \ln x$ ,  $v'(x) = x$ , тогда

$$v'(x) dx = x dx = \frac{1}{2} dx^2.$$

$$\begin{aligned} \int x \ln x dx &= \frac{1}{2} \int \ln x dx^2 = \frac{1}{2} \left( x^2 \ln x - \int x^2 d \ln x \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( x^2 \ln x - \int x^2 \cdot \frac{1}{x} dx \right) = \frac{1}{2} \left( x^2 \ln x - \frac{x^2}{2} \right) + C = \\ &= \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C. \end{aligned}$$

**Пример 19.**  $\int x \operatorname{arctg} 2x dx$ . Пусть  $u(x) = \operatorname{arctg} 2x$ ,  $v'(x) = x$ , тогда

$$\begin{aligned} \int x \operatorname{arctg} 2x dx &= \frac{1}{2} \int \operatorname{arctg} 2x dx^2 = \frac{1}{2} \left( x^2 \cdot \operatorname{arctg} 2x - \right. \\ &\quad \left. - \int x^2 d \operatorname{arctg} 2x \right) = \frac{1}{2} \left( x^2 \operatorname{arctg} 2x - \int \frac{2x^2}{1 + (2x)^2} dx \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( x^2 \operatorname{arctg} 2x - \frac{1}{2} \int \frac{4x^2 + 1}{4x^2 + 1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{4x^2 + 1} dx \right) = \\ &= \frac{x^2 \operatorname{arctg} 2x}{2} - \frac{1}{4} x + \frac{1}{8} \int \frac{d2x}{(2x)^2 + 1} = \frac{x^2 \operatorname{arctg} 2x}{2} - \frac{1}{4} x + \\ &\quad + \frac{1}{8} \operatorname{arctg} 2x + C. \end{aligned}$$

**III.** При интегрировании функций  $e^{ax} \sin bx$ ,  $e^{ax} \cos bx$ ,  $\sqrt{ax^2 + b}$  интегрирование по частям применяется два раза. Вычисление интеграла сводится к решению алгебраического уравнения первой степени.

**Пример 20.**

$$\begin{aligned} \int e^x \cos x dx &= \int \cos x de^x = e^x \cos x - \int e^x d \cos x = \\ &= e^x \cos x + \int e^x \sin x dx = e^x \cos x + \int \sin x de^x = \\ &= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x d \sin x = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx. \end{aligned}$$

Обозначим через  $I = \int e^x \cos x dx$ . Перепишем последнее равенство в виде:

$$I = e^x \cos x + e^x \sin x - I,$$

решая это уравнение, получим

$$\begin{aligned} 2I &= e^x \cos x + e^x \sin x, \\ I &= \frac{1}{2} (e^x \cos x + e^x \sin x), \end{aligned}$$

отсюда имеем:

$$\int e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2} (\cos x + \sin x) + C.$$

**Замечание.** При интегрировании функций вида  $e^{ax} \sin bx$ ,  $e^{ax} \cos bx$  интегрирование по частям применяется два раза, причем в обоих случаях в качестве множителя  $u(x)$  берется функция одного и того же типа: показательная или тригонометрическая.

**Пример 21.**

$$\begin{aligned} \int \sqrt{7-x^2} dx &= x \cdot \sqrt{7-x^2} - \frac{1}{2} \int x \cdot \frac{(-2x)}{\sqrt{7-x^2}} dx = x \cdot \sqrt{7-x^2} + \\ &+ \int \frac{x^2}{\sqrt{7-x^2}} dx = x \sqrt{7-x^2} - \int \frac{7-x^2}{\sqrt{7-x^2}} dx + \int \frac{7}{\sqrt{7-x^2}} dx = \\ &= x \cdot \sqrt{7-x^2} - \int \sqrt{7-x^2} dx + 7 \arcsin \frac{x}{\sqrt{7}}. \end{aligned}$$

Обозначим через  $I = \int \sqrt{7-x^2} dx$ . Перепишем последнее равенство в виде:

$$I = x \sqrt{7-x^2} + 7 \arcsin \frac{x}{\sqrt{7}} - I \quad \text{или} \quad 2I = x \sqrt{7-x^2} + 7 \arcsin \frac{x}{\sqrt{7}},$$

$$I = \frac{1}{2} \left( x \sqrt{7-x^2} + 7 \arcsin \frac{x}{\sqrt{7}} \right), \quad \text{отсюда имеем:}$$

$$\int \sqrt{7-x^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{7-x^2} + \frac{7}{2} \arcsin \frac{x}{\sqrt{7}} + C.$$

**1.4. Интегрирование рациональных функций**

Сначала остановимся на интегрировании так называемых простых дробей. Это дроби следующих четырех типов:

$$\begin{aligned} \text{I. } & \frac{A}{x-a}, & \text{II. } & \frac{A}{(x-a)^m}, \\ \text{III. } & \frac{Ax+B}{x^2+px+q}, & \text{IV. } & \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^m}, \quad (m=2,3,\dots). \end{aligned}$$

Интегрирование дробей вида I и II известно:

$$\begin{aligned} \text{I. } & \int \frac{A}{x-a} dx = A \ln |x-a| + C, \\ \text{II. } & \int \frac{A}{(x-a)^m} dx = -\frac{A}{m-1} \frac{1}{(x-a)^{m-1}} + C. \end{aligned}$$

При интегрировании дробей III и IV в выражении, стоящем в знаменателе, выделяется полный квадрат

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right) = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + k.$$

Тогда интеграл от дроби III запишется в виде:

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} dx &= \int \frac{Ax + B}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + k} dx = \int \frac{A\left(x + \frac{p}{2} - \frac{p}{2}\right) + B}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + k} dx = \\ &= \int \frac{A\left(x + \frac{p}{2}\right)}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + k} dx + \int \frac{B - A \cdot \frac{p}{2}}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + k} dx = \int \frac{At}{t^2 + k} dt + \int \frac{B - A \cdot \frac{p}{2}}{t^2 + k} dt, \end{aligned}$$

где  $t = x + \frac{p}{2}$ .

Первый интеграл легко вычисляется подстановкой  $u = t^2 + k$ , а именно:

$$\int \frac{t dt}{t^2 + k} = \frac{1}{2} \int \frac{dt^2}{t^2 + k} = \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2 + k)}{t^2 + k} = \frac{1}{2} \ln |t^2 + k| + C.$$

Второй интеграл  $\int \frac{dt}{t^2 + k}$  является табличным.

При интегрировании дроби IV аналогично III получим:

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^m} dx &= \int \frac{Ax + B dx}{\left(\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + k\right)^m} = \int \frac{A\left(x + \frac{p}{2} - \frac{p}{2}\right) + B}{\left(\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + k\right)^m} dx = \\ &= A \int \frac{t dt}{(t^2 + k)^m} + \left(B - A \cdot \frac{p}{2}\right) \cdot \int \frac{dt}{(t^2 + k)^m}. \end{aligned}$$

Первый интеграл легко вычисляется подстановкой  $u = t^2 + k$ , а именно:

$$\begin{aligned} \int \frac{t dt}{(t^2 + k)^m} &= \frac{1}{2} \int \frac{dt^2}{(t^2 + k)^m} = \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2 + k)}{(t^2 + k)^m} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^m} = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{m-1} \cdot \frac{1}{u^{m-1}} + C = -\frac{1}{2(m-1)} \cdot \frac{1}{(t^2 + k)^{m-1}} + C. \end{aligned}$$

Второй интеграл вычисляется методом понижения. Пусть  $I_m = \int \frac{dt}{(t^2 + k)^m}$ , тогда  $I_{m-1} = \int \frac{dt}{(t^2 + k)^{m-1}}$ .

Рассмотрим интеграл  $I_m$ :

$$\begin{aligned} I_m &= \int \frac{dt}{(t^2 + k)^m} = \frac{1}{k} \int \frac{k}{(t^2 + k)^m} dt = \frac{1}{k} \int \frac{k + t^2 - t^2}{(t^2 + k)^m} dt = \\ &= \frac{1}{k} \cdot \left( \int \frac{k + t^2}{(t^2 + k)^m} dt - \int \frac{t^2}{(t^2 + k)^m} dt \right) = \\ &= \frac{1}{k} \left( \int \frac{dt}{(t^2 + k)^{m-1}} - \int t \cdot \frac{t dt}{(t^2 + k)^m} \right) = \frac{1}{k} \cdot \left( I_{m-1} - \frac{1}{2} \int t \frac{d(t^2 + k)}{(t^2 + k)^m} \right). \end{aligned}$$

Последний интеграл вычисляется методом интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \int t \frac{d(t^2 + k)}{(t^2 + k)^m} &= -\frac{1}{m-1} \int t d(t^2 + k)^{1-m} = \\ &= -\frac{1}{m-1} \left( \frac{t}{(t^2 + k)^{m-1}} - \int \frac{dt}{(t^2 + k)^{m-1}} \right) = \frac{1}{m-1} \left( \frac{t}{(t^2 + k)^{m-1}} - I_{m-1} \right). \end{aligned}$$

Отсюда имеем, что

$$I_m = \frac{1}{k} \left( I_{m-1} + \frac{1}{2(m-1)} \cdot \frac{t}{(t^2 + k)^{m-1}} - \frac{I_{m-1}}{2(m-1)} \right).$$

Последняя формула сводит вычисление  $I_m$  к вычислению  $I_{m-1}$ . Зная интеграл (см. таблицу интегралов)  $I_1 = \int \frac{dt}{t^2+k}$ , найдем  $I_2 = \int \frac{dt}{(t^2+k)^2}$  и так далее до интеграла  $I_m$ .

### Пример 22.

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+5}{x^2+4x-3} dx &= \int \frac{2x+5}{(x+2)^2-7} dx = \int \frac{2(x+2-2)+5}{(x+2)^2-7} dx = \\ &= \int \frac{2 \cdot (x+2)}{(x+2)^2-7} d(x+2) + \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2-7} = \\ &= 2 \int \frac{t dt}{t^2-7} + \int \frac{dt}{t^2-7} = \int \frac{d(t^2-7)}{t^2-7} + \int \frac{dt}{t^2-7} = \\ &= \ln |t^2-7| + \frac{1}{2\sqrt{7}} \ln \left| \frac{\sqrt{7}-t}{\sqrt{7}+t} \right| + C = \ln |x^2+4x-3| + \frac{1}{2\sqrt{7}} \ln \left| \frac{\sqrt{7}-2-x}{\sqrt{7}+2+x} \right| + C. \end{aligned}$$

### Пример 23.

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+5}{(x^2+4x-3)^2} dx &= \int \frac{2x+5}{((x+2)^2-7)^2} dx = 2 \int \frac{x+2}{((x+2)^2-7)^2} d(x+2) + \\ &+ \int \frac{d(x+2)}{((x+2)^2-7)^2} = 2 \int \frac{t dt}{(t^2-7)^2} + \int \frac{dt}{(t^2-7)^2} = \\ &= \int \frac{d(t^2-7)}{(t^2-7)^2} + \int \frac{dt}{(t^2-7)^2} = -\frac{1}{t^2-7} + \int \frac{dt}{(t^2-7)^2}, \end{aligned}$$

вычислим отдельно последний интеграл:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dt}{(t^2 - 7)^2} &= -\frac{1}{7} \int \frac{(-7) dt}{(t^2 - 7)^2} = -\frac{1}{7} \int \frac{t^2 - 7 - t^2}{(t^2 - 7)^2} dt = \\
 &= -\frac{1}{7} \int \frac{t^2 - 7}{(t^2 - 7)^2} dt + \frac{1}{7} \int \frac{t^2}{(t^2 - 7)^2} dt = -\frac{1}{7} \int \frac{dt}{(t^2 - 7)} + \\
 &+ \frac{1}{14} \int t \frac{d(t^2 - 7)}{(t^2 - 7)^2} = -\frac{1}{7} \int \frac{dt}{t^2 - 7} - \frac{1}{14} \int t d \frac{1}{t^2 - 7} = \\
 &= -\frac{1}{7} \int \frac{dt}{t^2 - 7} - \frac{1}{14} \left( t \cdot \frac{1}{t^2 - 7} - \int \frac{dt}{t^2 - 7} \right) = \\
 &= -\frac{1}{14} \int \frac{dt}{t^2 - 7} - \frac{1}{14} \frac{t}{t^2 - 7} = \frac{1}{14} \cdot \frac{1}{2\sqrt{7}} \ln \left| \frac{\sqrt{7} + t}{\sqrt{7} - t} \right| - \frac{1}{14} \frac{t}{t^2 - 7} + C.
 \end{aligned}$$

Окончательно получим:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{2x + 5}{(x^2 + 4x - 3)^2} dx &= -\frac{1}{t^2 - 7} + \frac{1}{28\sqrt{7}} \ln \left| \frac{\sqrt{7} + t}{\sqrt{7} - t} \right| - \frac{1}{14} \frac{t}{t^2 - 7} + C = \\
 &= -\frac{1}{x^2 + 4x - 3} + \frac{1}{28\sqrt{7}} \ln \left| \frac{\sqrt{7} + 2 + x}{\sqrt{7} - 2 - x} \right| - \frac{1}{14} \frac{x + 2}{x^2 + 4x - 3} + C.
 \end{aligned}$$

Прежде чем перейти к общему случаю интегрирования правильных дробей, сформулируем одну из теорем алгебры, имеющую фундаментальное значение в теории интегрирования рациональных дробей: *каждая правильная дробь  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  может быть представлена в виде суммы конечного числа простых дробей.*

Разложение правильной дроби на простые тесно связано с разложением многочлена  $Q(x)$  на множители. Как известно, каждый целый многочлен с вещественными коэффициентами разлагается на вещественные множители типа  $(x - a)$  и  $(x^2 + px + q)$ . В схематическом виде разложение многочлена  $Q(x)$  можно записать в виде:  $Q(x) = (x - a)^k \cdot \dots \cdot (x^2 + px + q)^m$ . Покажем, как, с учетом разложения  $Q(x)$ , правильная дробь раскладывается на простые:

1. Если множитель  $(x - a)$  входит в разложение  $Q(x)$  только в первой степени, мы поставим ему в соответствие единственную простую дробь:

$$(x - a) \rightarrow \frac{A}{x - a}.$$

2. Если в разложение  $Q(x)$  входит множитель  $(x - a)^k$ , то есть показатель

степени  $k > 1$ , то ему соответствует сумма из  $k$  простых дробей

$$(x - a)^k \rightarrow \frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x - a)^k}.$$

3. Если в разложение  $Q(x)$  входит множитель  $x^2 + px + q$  только в первой степени, то в соответствие ему ставится единственная простая дробь:

$$x^2 + px + q \rightarrow \frac{Mx + N}{x^2 + px + q}.$$

4. Если в разложение  $Q(x)$  входит множитель  $(x^2 + px + q)^k$ , показатель которого  $k > 1$ , то ему соответствует сумма из  $k$  простых дробей

$$(x^2 + px + q)^k \rightarrow \frac{M_1x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \dots + \frac{M_kx + N_k}{(x^2 + px + q)^k}.$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов  $A, M, N$  используют *метод неопределенных коэффициентов*. Зная форму разложения  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  на простые дроби, пишут его с буквенными коэффициентами справа. Приводят дроби к одному знаменателю  $Q(x)$  и приравнивают многочлены, стоящие в числителях справа и слева. Затем, приравняв коэффициенты, стоящие при одинаковых степенях, находят неизвестные буквенные коэффициенты.

**Пример 24.** Разложить дробь  $\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}$  на простые.

Представим дробь в виде:

$$\frac{2x^2 + 2x + 13}{(x - 2)(x^2 + 1)^2} = \frac{A}{x - 2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 1)^2}.$$

Коэффициенты  $A, B, C, D, E$  определим, исходя из тождества:

$$2x^2 + 2x + 13 = A \cdot (x^2 + 1)^2 + (Bx + C)(x^2 + 1)(x - 2) + (Dx + E)(x - 2),$$

отсюда получим:

$$2x^2 + 2x + 13 = (A + B) \cdot x^4 + (C - 2B) \cdot x^3 + (2A + B - 2C + D) \cdot x^2 + (C - 2B + E - 2D) \cdot x + A - 2C - 2E.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях  $x$  слева и справа, придем к системе из пяти уравнений

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ -2B + C = 0, \\ 2A + B - 2C + D = 2, \\ -2B + C - 2D + E = 2, \\ A - 2C - 2E = 13, \end{cases}$$

откуда

$$A = 1, \quad B = -1, \quad C = -2, \quad D = -3, \quad E = -4.$$

Окончательно:

$$\frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{1}{x-2} - \frac{x+2}{x^2+1} - \frac{3x+4}{(x^2+1)^2}.$$

Для того чтобы проинтегрировать правильную дробь, ее раскладывают на сумму простых дробей, а затем интегрируют каждую простую дробь отдельно и их результаты складывают.

**Пример 25.**

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} dx &= \int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{x+2}{x^2+1} dx - \int \frac{3x+4}{(x^2+1)^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \frac{3-4x}{x^2+1} + \frac{1}{2} \ln \frac{(x-2)^2}{x^2+1} - 4 \operatorname{arctg} x + C. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались разложением из примера 24.

## 1.5. Интегрирование иррациональных выражений

Выше мы научились интегрировать рациональные функции. Здесь рассматривается метод рационализации для интегрирования иррациональных выражений. А именно, ищется подстановка  $t = t(x)$ , которая привела бы иррациональное выражение к рациональному виду. Здесь и дальше будем полагать, что  $R(x, y, z, \dots)$  — рациональная функция от своих аргументов.

**I. Интегрирование выражений вида:**

$$\int R \left( x; \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+p}} \right) dx,$$

где  $m$  — натуральное число,  $a, b, c, p$  — постоянные. Положим:

$$t = t(x) = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+p}}, \quad t^m = \frac{ax+b}{cx+p}, \quad x = \varphi(t) = \frac{p \cdot t^m - b}{a - ct^m}, \quad dx = \varphi'(t) dt.$$

Интеграл перепишется в виде:

$$\int R(\varphi(t), t) \varphi'(t) dt.$$

Вычислив полученный интеграл, вернемся к старой переменной  $t = t(x)$ .

**Пример 26.**

$$\int \frac{1}{x+1} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} dx.$$



Полагаем  $t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$ ,  $x = \frac{t^3+1}{t^3-1}$ ,  $dx = -\frac{6t^2}{(t^3-1)^2} dt$ , тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x+1} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} dx &= \int \frac{-3 dt}{t^3-1} = \int \left( -\frac{1}{t-1} + \frac{t+2}{t^2+t+1} \right) dt = \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{t^2+t+1}{(t-1)^2} + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2t-1}{\sqrt{3}} + C, \end{aligned}$$

где  $t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$ .

**II.** Интегрирование выражений вида:

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx. \quad (3)$$

1) Пусть  $a > 0$ , тогда интеграл (3) переписется в виде

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{a} \sqrt{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}}} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{Ax+B}{\sqrt{x^2+px+q}} dx.$$

Так же, как и в случае интегрирования рациональной функции, выделим полный квадрат в квадратном трехчлене, стоящем в знаменателе (см. пункт 1.4):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{Ax+B}{\sqrt{(x+\frac{p}{2})^2+k}} dx &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{A(x+\frac{p}{2})}{\sqrt{(x+\frac{p}{2})^2+k}} dx + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{B-A \cdot \frac{p}{2}}{\sqrt{(x+\frac{p}{2})^2+k}} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{At}{\sqrt{t^2+k}} dt + \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{B-A \cdot \frac{p}{2}}{\sqrt{t^2+k}} dt, \end{aligned}$$

где  $t = x + \frac{p}{2}$ .

Первый интеграл вычисляется подстановкой  $u = t^2 + k$

$$\begin{aligned} \int \frac{t dt}{\sqrt{t^2+k}} &= \frac{1}{2} \int \frac{dt^2}{\sqrt{t^2+k}} = \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2+k)}{\sqrt{t^2+k}} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \\ &= \frac{1}{2} \int u^{-1/2} du = u^{1/2} + C = (t^2+k)^{1/2} + C. \end{aligned}$$

Второй интеграл  $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+k}}$  является табличным.

2) Пусть  $a < 0$ , тогда интеграл (3) переписется в виде

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax + B}{\sqrt{-a} \sqrt{-x^2 - \frac{b}{a}x - \frac{c}{a}}} dx &= \frac{1}{\sqrt{-a}} \int \frac{Ax + B dx}{\sqrt{-x^2 - px - q}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{-a}} \int \frac{Ax + B}{\sqrt{-(x^2 + px + q)}} dx. \end{aligned}$$

Дальше, выделяя полный квадрат в квадратном трехчлене и применяя замену  $t = x + \frac{p}{2}$ , так же как и в предыдущем случае вычисляем полученный интеграл.

**Пример 27.**

$$\begin{aligned} \int \frac{5x - 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx &= \int \frac{5x - 1}{\sqrt{(x + 1)^2 + 1}} dx = \int \frac{5(x + 1 - 1) - 1}{\sqrt{(x + 1)^2 + 1}} dx = \\ &= \int \frac{5t - 6}{\sqrt{t^2 + 1}} dt = 5 \int \frac{t dt}{\sqrt{t^2 + 1}} - 6 \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 1}} = \\ &= \frac{5}{2} \int \frac{d(t^2 + 1)}{\sqrt{t^2 + 1}} - 6 \cdot \ln |t + \sqrt{t^2 + 1}| + C = \\ &= \frac{5}{2} \cdot 2(t^2 + 1)^{1/2} - 6 \ln |t + \sqrt{t^2 + 1}| + C = 5 \cdot (x^2 + 2x + 2)^{1/2} - \\ &\quad - 6 \ln |x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 3}| + C. \end{aligned}$$

**Пример 28.**

$$\begin{aligned} \int \frac{5x + 11}{\sqrt{6x - x^2 - 5}} dx &= \int \frac{5x + 11}{\sqrt{-(x^2 - 6x + 5)}} dx = \\ &= \int \frac{5x + 11}{\sqrt{-((x - 3)^2 - 4)}} dx = \int \frac{5(x - 3 + 3) + 11}{\sqrt{4 - (x - 3)^2}} dx = \\ &= \int \frac{5t + 26}{\sqrt{4 - t^2}} dt = 5 \int \frac{t}{\sqrt{4 - t^2}} dt + 26 \int \frac{dt}{\sqrt{4 - t^2}} = \\ &= \frac{5}{2} \int \frac{dt^2}{\sqrt{4 - t^2}} + 26 \arcsin \frac{t}{2} + C = -\frac{5}{2} \int \frac{d(4 - t^2)}{\sqrt{4 - t^2}} + \\ &\quad + 26 \arcsin \frac{t}{2} + C = -5\sqrt{4 - t^2} + 26 \arcsin \frac{t}{2} + C = \\ &\quad = -5\sqrt{6x - x^2 - 5} + 26 \arcsin \frac{x - 3}{2} + C. \end{aligned}$$

**III.** Интегрирование выражений вида:

$$\int (Ax + B) \cdot \sqrt{ax^2 + bx + c} dx.$$

При интегрировании этих функций используются интегралы

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{2} (x \cdot \sqrt{a^2 + x^2} + a^2 \ln |x + \sqrt{a^2 + x^2}|) + C,$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \left( x \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right) + C,$$

которые вычисляются методом интегрирования по частям (см. пункт 1.3).

Для вычисления интегралов  $\int (Ax + B)\sqrt{ax^2 + bx + c} dx$  в квадратном трехчлене выделяется полный квадрат, а затем, аналогично случаю II, все сводится к вычислению интегралов вида  $\int t\sqrt{k \pm t^2} dt$  и  $\int \sqrt{k \pm t^2} dt$ . Первый из полученных интегралов вычисляем:

$$\begin{aligned} \int t\sqrt{k \pm t^2} dt &= \frac{1}{2} \int \sqrt{k \pm t^2} dt^2 = \pm \frac{1}{2} \int \sqrt{k \pm t^2} d(k \pm t^2) = \\ &= \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (k \pm t^2)^{3/2} = \pm \frac{1}{3} (k \pm t^2)^{3/2} + C. \end{aligned}$$

Значение второго интеграла см. выше.

**Пример 29.**

$$\begin{aligned} \int (2x - 1)\sqrt{3x - x^2} dx &= \int (2x - 1)\sqrt{-(x^2 - 3x)} dx = \\ &= \int (2x - 1)\sqrt{-\left(\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right)} dx = \\ &= \int \left(2\left(x - \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right) - 1\right) \sqrt{\frac{9}{4} - \left(x - \frac{3}{2}\right)^2} dx = \int (2t + 2)\sqrt{\frac{9}{4} - t^2} dt = \\ &= 2 \int t\sqrt{\frac{9}{4} - t^2} dt + 2 \int \sqrt{\frac{9}{4} - t^2} dt = \int \sqrt{\frac{9}{4} - t^2} dt^2 + \\ &+ 2 \cdot \frac{1}{2} \left( t\sqrt{\frac{9}{4} - t^2} + \frac{9}{4} \arcsin \frac{2t}{3} \right) = -\frac{2}{3} (3x - x^2)^{3/2} + \\ &+ \left(x - \frac{3}{2}\right) \cdot \sqrt{3x - x^2} + \frac{9}{4} \arcsin \frac{2x - 3}{3} + C. \end{aligned}$$

**IV.** Интегрирование дифференциальных биномов вида:

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx,$$

где  $p = \frac{\alpha}{\beta}$ ;  $\alpha, \beta$  — целые числа;  $m, n$  — произвольные числа.

Данный интеграл интегрируется лишь в следующих трех случаях:

1) если  $p$  целое число, то используется подстановка

$$x = t^N, \text{ где } N \text{ — общий знаменатель дробей } m \text{ и } n;$$

2) если  $\frac{m+1}{n}$  целое число, то используется подстановка

$$a + bx^n = t^\beta;$$

3) если  $\frac{m+1}{n} + p$  целое число, то используется подстановка

$$a + bx^n = x^n t^\beta.$$

**Пример 30.**

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 1}} dx,$$

где  $m = 3, n = 2$ . Число  $\frac{m+1}{n} = \frac{3+1}{2} = 2$  — целое, поэтому используем подстановку (1):  $x^2 - 1 = t^2, x = \sqrt{t^2 + 1}, dx = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} dt$ , отсюда

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 1}} dx &= \int \frac{(1+t^2)^{3/2}}{t} \cdot \frac{t}{(t^2+1)^{1/2}} dt = \int (1+t^2) dt = \\ &= t + \frac{t^3}{3} + C = (x^2 - 1)^{1/2} + \frac{(x^2 - 1)^{3/2}}{3} + C. \end{aligned}$$

**Пример 31.**

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \int x^0 (1+x^4)^{-1/4} dx,$$

здесь  $m = 0, n = 4, p = -\frac{1}{4}$ . Проверим условие:  $\frac{m+1}{n} + p$  — целое число или ноль.  $\frac{m+1}{n} + p = \frac{0+1}{4} - \frac{1}{4} = 0$ , поэтому используем подстановку (2); здесь  $\beta = 4$ :  $1 + x^4 = x^4 \cdot t^4, t = \sqrt[4]{\frac{1}{x^4} + 1} = \frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}, x = (t^4 - 1)^{-1/4}, dx = -t^3(t^4 - 1)^{-5/4} dt$ , так что  $\sqrt[4]{1+x^4} = tx = t \cdot (t^4 - 1)^{-1/4}$ ,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} &= - \int \frac{t^2 dt}{t^4 - 1} = \frac{1}{4} \int \left( \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1} \right) dt - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + C, \end{aligned}$$

где  $t = \frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}$ .

## 1.6. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции

### I. Интегрирование выражений вида

$$\int R(\sin x, \cos x) dx,$$

где  $R$  — рациональная функция.

В этом случае существует универсальный прием рационализации выражений, стоящих под знаком интеграла. А именно, используя подстановку  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$  ( $-\pi < x < \pi$ ) и тригонометрические формулы:

$$\begin{aligned}\sin x &= \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}, \\ \cos x &= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \\ x &= 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2 dt}{1 + t^2},\end{aligned}$$

получим под интегралом рациональную функцию.

#### Пример 32.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\cos 3x + 2 \sin 3x} &= \frac{1}{3} \int \frac{d3x}{\cos 3x + 2 \sin 3x} = \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{dz}{\cos z + 2 \sin z} = \frac{1}{3} \int \frac{2 dt}{(1 + t^2) \left( \frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{4t}{1+t^2} \right)} = \\ &= \frac{2}{3} \int \frac{dt}{1 - t^2 + 4t} = \frac{2}{3} \int \frac{dt}{5 - (t - 2)^2} = \frac{2}{3} \int \frac{du}{5 - u^2} = \\ &= \frac{2}{3} \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\sqrt{5} + u}{\sqrt{5} - u} \right| + C = \frac{1}{3\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{3x}{2} - 2 + \sqrt{5}}{\operatorname{tg} \frac{3x}{2} - 2 - \sqrt{5}} \right| + C.\end{aligned}$$

Подстановка, упомянутая выше, приводит часто к сложным преобразованиям, поэтому в нижеприведенных частных случаях предпочтительны следующие, более удобные приемы:

а) пусть  $R(u, v) = -R(-u, v)$ , тогда рационализация достигается подстановкой  $t = \cos x$ ;

б) пусть  $R(u, v) = -R(u, -v)$ , тогда рационализация достигается подстановкой  $t = \sin x$ ;

в) пусть  $R(u, v) = R(-u, -v)$ , тогда рационализация достигается подстановкой  $t = \operatorname{tg} x$ .

**Пример 33.**

$$\int \frac{\sin x}{4 + \cos^2 x} dx,$$

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{\sin x}{4 + \cos^2 x},$$

$$R(-\sin x, \cos x) = -\frac{\sin x}{4 + \cos^2 x},$$

$$R(\sin x, \cos x) = -R(-\sin x, \cos x),$$

поэтому используем подстановку  $t = \cos x$ :

$$\int \frac{\sin x}{4 + \cos^2 x} dx = - \int \frac{d \cos x}{4 + \cos^2 x} = - \int \frac{dt}{4 + t^2} = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{\cos x}{2} \right) + C.$$

**Пример 34.**

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x - 5 \sin x \cos x},$$

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{1}{\sin^2 x - 5 \sin x \cos x},$$

$$R(-\sin x, -\cos x) = \frac{1}{\sin^2 x - 5 \sin x \cos x},$$

$$R(\sin x, \cos x) = R(-\sin x, -\cos x),$$

используем подстановку  $t = \operatorname{tg} x$ :

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin^2 x - 5 \sin x \cos x} &= \int \frac{dx}{\cos^2 x \left( \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{5 \sin x \cos x}{\cos^2 x} \right)} = \\ &= \int \frac{d \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x - 5 \operatorname{tg} x} = \int \frac{dt}{t^2 - 5t} = \int \frac{dt}{\left(t - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \\ &= -\frac{1}{5} \ln \left| \frac{\frac{5}{2} + t - \frac{5}{2}}{\frac{5}{2} - t + \frac{5}{2}} \right| = -\frac{1}{5} \ln \left| \frac{t}{t - 5} \right| + C = \\ &= \frac{1}{5} \ln \left| 1 - \frac{5}{t} \right| + C = \frac{1}{5} \ln |1 - 5 \operatorname{ctg} x| + C. \end{aligned}$$

**II. Интегралы вида  $\int \sin^m x \cos^n x dx$ .**

При интегрировании этих выражений оказываются полезными следующие тригонометрические формулы

$$\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

1. Рассмотрим интегралы вида:  $\int \sin^m x dx$ ,  $\int \cos^m x dx$ , полагаем, что

а)  $m > 0$ , четное,  $m = 2k$ .

$$\int \sin^m x \, dx = \int (\sin^2 x)^k \, dx = \int \frac{(1 - \cos 2x)^k}{2^k} \, dx = \frac{1}{2^{k+1}} \int (1 - \cos 2x)^k \, d2x.$$

б)  $m > 0$ , нечетное,  $m = 2k + 1$ .

$$\begin{aligned} \int \sin^m x \, dx &= \int \sin^{2k} x \cdot \sin x \, dx = \\ &= - \int (\sin^2 x)^k \, d \cos x = - \int (1 - \cos^2 x)^k \, d \cos x = - \int (1 - t^2)^k \, dt, \end{aligned}$$

где  $t = \cos x$ .

Возведя выражения, стоящие под интегралами по биному Ньютона в соответствующую степень, получаем ряд интегралов типа (а) и (б), но с низшими степенями, их дальше упрощаем тем же образом.

Случай  $\int \cos^m x \, dx$  делается аналогично.

**Пример 35.**

$$\begin{aligned} \int \cos^4 x \, dx &= \int (\cos^2 x)^2 \, dx = \int \frac{(1 + \cos 2x)^2}{8} \, d2x = \\ &= \frac{1}{8} \int (1 + 2 \cos z + \cos^2 z) \, dz = \frac{z}{8} + \frac{\sin z}{4} + \\ &\quad + \frac{1}{8} \int \frac{1 + \cos 2z}{2} \, dz = \frac{3}{8} x + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C. \end{aligned}$$

**Пример 36.**

$$\begin{aligned} \int \cos^3 x \, dx &= \int \cos^2 x \, d \sin x = \int (1 - \sin^2 x) \, d \sin x = \\ &= \int (1 - t^2) \, dt = t - \frac{t^3}{3} + C = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C. \end{aligned}$$

в)  $m = -1$

$$\begin{aligned} &\int \frac{dx}{\sin x}, \quad \int \frac{dx}{\cos x}. \\ \int \frac{dx}{\sin x} &= \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \int \frac{d \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} \left( \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \right)} = \int \frac{d \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C, \\ \int \frac{dx}{\cos x} &= \int \frac{d \left( x + \frac{\pi}{2} \right)}{\sin \left( x + \frac{\pi}{2} \right)} = \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C. \end{aligned}$$

г)  $m < 0$ ,  $|m| = 2k$ .

$$\begin{aligned} \int \cos^m x \, dx &= \int \frac{dx}{\cos^{2k} x} = \int \left( \frac{1}{\cos^2 x} \right)^{k-1} \frac{dx}{\cos^2 x} = \\ &= \int \left( \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} \right)^{k-1} d \operatorname{tg} x = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x)^{k-1} d \operatorname{tg} x = \\ &= \int (1 + t^2)^{k-1} dt, \quad t = \operatorname{tg} x, \end{aligned}$$

аналогично

$$\int \sin^m x \, dx = \int \frac{dx}{\sin^{2k} x} = - \int (1 + \operatorname{ctg}^2 x)^{k-1} d \operatorname{ctg} x.$$

**Пример 37.**

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\cos^4 x} &= \int \frac{1}{\cos^2 x} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} d \operatorname{tg} x = \int (\operatorname{tg}^2 x + 1) d \operatorname{tg} x = \\ &= \int (t^2 + 1) dt = \frac{t^3}{3} + t + C = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \operatorname{tg} x + C. \end{aligned}$$

д)  $m < 0$ ,  $|m| = 2k + 1$ .

$$\begin{aligned} \int \cos^m x \, dx &= \int \frac{dx}{\cos^{2k+1} x} = \int \frac{\cos x}{\cos^{2k+2} x} dx = \\ &= \int \frac{d \sin x}{(1 - \sin^2 x)^{k+1}} = \int \frac{dt}{(1 - t^2)^{k+1}} \end{aligned}$$

далее см. пункт 1.4. Случай  $\int \frac{dx}{\sin^{2k+1} x}$  делается аналогично.

**Пример 38.**

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int \frac{\cos x \, dx}{\cos^4 x} = \int \frac{d \sin x}{(\cos^2 x)^2} = \int \frac{d \sin x}{(1 - \sin^2 x)^2} = \int \frac{dt}{(1 - t^2)^2};$$

(далее см. пункт 1.4).

В случае д) для понижения степени удобно применять формулу  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\cos^3 x} &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^3 x} dx = \\ &= \int \left( \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} + \frac{1}{\cos x} \right) dx = \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| - \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} d \cos x. \end{aligned}$$



Интегрируя последний интеграл по частям, получим:

$$\begin{aligned} - \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} d \cos x &= \frac{1}{2} \int \sin x d \cos^{-2} x = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \int \frac{d \sin x}{\cos^2 x} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \int \frac{dx}{\cos x} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|. \end{aligned}$$

Окончательно получим:

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + \frac{1}{2} \frac{\sin x}{\cos^2 x}.$$

2) Рассмотрим интегралы вида

$$\int \sin^m x \cos^n x dx, \quad m > 0, n > 0.$$

е) один из показателей  $m$  или  $n$  нечетный, без изменения общности полагаем  $n = 2k + 1$ .

$$\begin{aligned} \int \sin^m \cos^n x dx &= \int \sin^m x \cos^{2k+1} x dx = \int \sin^m x (\cos^2 x)^k d \sin x = \\ &= \int \sin^m x (1 - \sin^2 x)^k d \sin x = \int t^m (1 - t^2)^k dt, \end{aligned}$$

где  $t = \sin x$  и далее по биному Ньютона.

**Пример 39.**

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^3 x dx &= \int \sin^2 x \cos^2 x d \sin x = \\ &= \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) d \sin x = \int t^2 (1 - t^2) dt = \\ &= \int (t^2 - t^4) dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C. \end{aligned}$$

ж)  $m$  и  $n$  четные, то есть  $m = 2k$ ,  $n = 2l$ ,

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int \sin^{2k} x \cos^{2l} x dx = \int \sin^{2k} x (1 - \sin^2 x)^l dx,$$

далее, используя бином Ньютона, сводим к случаю а).

**Пример 40.**

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \int \sin^2 (1 - \sin^2 x) dx = \int \sin^2 x dx - \int \sin^4 x dx.$$

3. Интегралы вида  $\int \frac{\sin^m x}{\cos^n x} dx$  и  $\int \frac{\cos^m x}{\sin^n x} dx$ .

3)  $m = n$ , используя формулу  $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^m x}{\cos^m x} dx &= \int \operatorname{tg}^{m-2} \left( \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \\ &= \int \operatorname{tg}^{m-2} d \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg}^{m-2} x dx = \frac{\operatorname{tg}^{m-1} x}{m-1} - \int \operatorname{tg}^{m-2} x dx, \end{aligned}$$

получим формулу понижения. Аналогично

$$\int \frac{\cos^m x}{\sin^m x} dx = \int \operatorname{ctg}^m x dx = -\frac{1}{m-1} \operatorname{ctg}^{m-1} x - \int \operatorname{ctg}^{m-2} x dx.$$

**Пример 41.**

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} dx &= \int \operatorname{tg}^3 x dx = \int \operatorname{tg} x \left( \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \\ &= \int \operatorname{tg} x d \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x dx = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \\ &= \frac{\operatorname{tg}^2 x}{x} + \int \frac{d \cos x}{\cos x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln |\cos x| + C. \end{aligned}$$

и) показатель числителя  $m$  — четный,  $m = 2k$ .

$$\int \frac{\cos^m x}{\sin^n x} dx = \int \frac{\cos^{2k} x}{\sin^n x} dx = \int \frac{(1 - \sin^2 x)^k}{\sin^n x} dx.$$

Интеграл распадается на сумму интегралов вида (1).

**Пример 42.**

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx &= \int \frac{(1 - \sin^2 x)^2}{\sin^3 x} dx = \\ &= \int \frac{1 - 2 \sin^2 x + \sin^4 x}{\sin^3 x} dx = \int \frac{dx}{\sin^3 x} - 2 \int \frac{dx}{\sin x} + \int \sin x dx. \end{aligned}$$

к) показатель числителя  $m$  нечетный,  $m = 2k + 1$ .

$$\int \frac{\cos^m x}{\sin^n x} dx = \int \frac{\cos^{2k+1} x}{\sin^n x} dx = \int \frac{(1 - \sin^2 x)^k}{\sin^n x} d \sin x.$$

Интеграл распадается на отдельные слагаемые вида  $\int t^m dt$ .

**Пример 43.**

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx &= \int \frac{(1 - \sin^2 x)}{\sin^2 x} d \sin x = \int \frac{dt}{t^2} - \int dt = \\ &= -\frac{1}{t} - t + C = -\frac{1}{\sin x} - \sin x + C, \end{aligned}$$

где  $t = \sin x$ .

4. Интегралы вида  $\int \frac{dx}{\cos^m x \sin^n x}$ ,  $m > 0$ ,  $n > 0$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\cos^m x \sin^n x} &= \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^m x \cdot \sin^n x} dx = \\ &= \int \frac{dx}{\cos^{m-2} x \sin^n x} + \int \frac{dx}{\cos^m x \sin^{n-2} x}, \end{aligned}$$

повторив этот прием требуемое количество раз, сводим интеграл к предыдущим типам.

**Пример 44.**

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\cos^3 x \sin^2 x} &= \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^3 x \cdot \sin^2 x} dx = \\ &= \int \frac{dx}{\cos x \sin^2 x} + \int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos x \sin^2 x} dx + \\ &\quad + \int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx + \int \frac{dx}{\cos^3 x} + \int \frac{dx}{\cos^3 x}. \end{aligned}$$

Если  $m + n = 2k$ , то проще делить члены дроби на  $\cos^{m+n} x$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\cos^m x \sin^n x} &= \int \frac{dx}{\cos^{m+n} x \left( \frac{\cos^m x \sin^n x}{\cos^{m+n} x} \right)} = \\ &= \int \frac{dx}{\cos^{2k} x \operatorname{tg}^n x} = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x)^{k-1} \cdot \operatorname{tg}^{-n} x d \operatorname{tg} x = \\ &= \int t^{-n} (1 + t^2)^{k-1} dt, \end{aligned}$$

где  $t = \operatorname{tg} x$ .

**Пример 45.**

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x} &= \int \frac{dx}{\cos^4 x \operatorname{tg}^3 x} = \\
&= \int (1 + \operatorname{tg}^2 x) \operatorname{tg}^{-3} x d \operatorname{tg} x = \int t^{-3}(1 + t) dt = \\
&= \int (t^{-3} + t^{-2}) dt = -\frac{1}{2 \operatorname{tg}^2 x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} + C.
\end{aligned}$$

**III. Интегралы вида**

$$\begin{aligned}
&\int \sin(ax + b) \cos(cx + p) dx, \\
&\int \sin(ax + b) \sin(cx + p) dx, \\
&\int \cos(ax + b) \cos(cx + p) dx
\end{aligned}$$

упрощаются на основании тригонометрических тождеств

$$\begin{aligned}
\sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)), \\
\sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)), \\
\cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)).
\end{aligned}$$

**Пример 46.**

$$\begin{aligned}
\int \sin(3x + 1) \cos(2x + 3) dx &= \frac{1}{2} \int (\sin(5x + 4) + \\
&+ \sin(x - 2)) dx = \frac{1}{2} \left( \int \frac{\sin(5x + 4)}{5} d(5x + 4) + \right. \\
&\left. + \int \sin(x - 2) d(x - 2) \right) = -\frac{\cos(5x + 4)}{10} - \frac{\cos(x - 2)}{2} + C.
\end{aligned}$$

Кроме того, при интегрировании тригонометрических функций можно пользоваться формулами Эйлера

$$\sin x = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}), \quad \cos x = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}).$$

## IV. Интегралы вида

$$\int P(x) \sin ax \, dx, \quad \int P(x) \cos ax \, dx,$$

$$\int e^{bx} \sin ax \, dx, \quad \int e^{bx} \cos ax \, dx,$$

$$\int e^{bx} \sin ax \, dx, \quad \int e^{bx} \cos ax \, dx,$$

где  $P(x)$  — целый многочлен, интегрируются по частям, см. пункт 1.3.

## Задачи для самостоятельного решения

Найти интегралы:

1.  $\int (x^2 + 3x^3 + x + 1) \, dx$ ;
2.  $\int (x^4 + \sqrt[5]{x} + 3\sqrt{x} + \frac{1}{x^2}) \, dx - \int (\frac{1}{x} - 5) \, dx$ ;
3.  $\int \left( \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} \right) \, dx$ ;
4.  $\int \frac{5x^8+1}{x^4} \, dx$ ;
5.  $\int \frac{x-1}{\sqrt[5]{x^4}} \, dx$ ;
6.  $\int \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) \, dx$ ;
7.  $\int \frac{(\sqrt{x}-1)^3}{x} \, dx$ ;
8.  $\int (2^x + 3^x) \, dx$ ;
9.  $\int 4^x \left( 3 + \frac{4^{-x}}{\sqrt{x^3}} \right) \, dx$ ;
10.  $\int e^x \left( 2 - \frac{e^{-x}}{x^3} \right) \, dx$ ;
11.  $\int \left( \frac{2}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} \right) \, dx$ ;
12.  $\int \frac{x^4}{1+x^2} \, dx$ ;
13.  $\int e^x \left( 1 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right) \, dx$ ;
14.  $\int (\sin x + 5 \cos x) \, dx$ ;
15.  $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} \, dx$ ;
16.  $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$ ;
17.  $\int \frac{3 \operatorname{tg}^2 x + 4}{\sin^2 x} \, dx$ ;
18.  $\int \frac{3 - 2 \operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x} \, dx$ ;
19.  $\int \frac{1 - \sin^3 x}{\sin^2 x} \, dx$ ;
20.  $\int \operatorname{tg}^2 x \, dx$ ;
21.  $\int \operatorname{ctg}^2 x \, dx$ ;
22.  $\int \sin^2 \frac{x}{2} \, dx$ ;

23.  $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx;$
24.  $\int \left( \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx;$
25.  $\int 2^x e^x dx;$
26.  $\int \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx;$
27.  $\int \cos 5x dx;$
28.  $\int \sin 7x dx;$
29.  $\int \cos \frac{x}{4} dx;$
30.  $\int e^{-x} dx;$
31.  $\int \left( e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} \right) dx;$
32.  $\int \frac{dx}{\cos^2 3x};$
33.  $\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{3}};$
34.  $\int (2 + 5x)^9 dx;$
35.  $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x}};$
36.  $\int \sqrt{2x-5} dx;$
37.  $\int \sqrt[3]{3-7x} dx;$
38.  $\int \frac{dx}{5x+2};$
39.  $\int \frac{dx}{2-3x};$
40.  $\int \frac{x dx}{x^2+3};$
41.  $\int \operatorname{ctg} x dx;$
42.  $\int \operatorname{tg} x dx;$
43.  $\int \frac{\sin x dx}{1+3 \cos x};$
44.  $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)^5};$
45.  $\int \frac{\cos 3x dx}{3+\sin 3x};$
46.  $\int \frac{\cos 2x}{\sin x \cos x} dx;$
47.  $\int \sin^2 x \cos x dx;$
48.  $\int \cos^3 x \sin x dx;$
49.  $\int e^{\cos x} \sin x dx;$
50.  $\int e^{-x^3} x^2 dx;$
51.  $\int \frac{e^{\sqrt{x}} dx}{\sqrt{x}};$
52.  $\int \frac{\cos x dx}{\sin^3 x};$
53.  $\int \frac{\sin x dx}{\cos^5 x};$
54.  $\int \frac{\sqrt[3]{2+\ln x}}{x} dx;$
55.  $\int \sqrt{3 + \cos 5x} \sin 5x dx;$
56.  $\int \frac{\cos 3x dx}{\sqrt[3]{3+5 \sin 3x}};$
57.  $\int \frac{e^{4x}}{5+2e^{4x}} dx;$

58.  $\int \frac{\operatorname{arctg}^2 x \, dx}{1+x^2};$
59.  $\int \frac{\sqrt[3]{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} \, dx;$
60.  $\int \frac{1-2 \sin x}{\cos^2 x} \, dx;$
61.  $\int \frac{1+\sin 2x}{\sin^2 x} \, dx;$
62.  $\int e^{\sin x} \cos x \, dx;$
63.  $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} \, dx;$
64.  $\int \sqrt[5]{x^3 - 8} x^2 \, dx;$
65.  $\int \sqrt[4]{1 - 6x^5} x^4 \, dx;$
66.  $\int \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx;$
67.  $\int \frac{3^{\frac{1}{x}} \, dx}{x^2};$
68.  $\int \frac{3x+5}{\sqrt{4x+1}} \, dx;$
69.  $\int \frac{5x-6}{\sqrt{1-3x}} \, dx;$
70.  $\int \frac{2-4x}{\sqrt{7x-1}} \, dx;$
71.  $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} \, dx;$
72.  $\int \frac{\sin \frac{1}{x^2}}{x^3} \, dx;$
73.  $\int 4^{1-3x} \, dx;$
74.  $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx;$
75.  $\int e^{-\operatorname{tg} x} \sec^2 x \, dx;$
76.  $\int \frac{\arcsin x+x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx;$
77.  $\int \frac{dx}{x^2-16};$
78.  $\int \frac{dx}{x^2+4};$
79.  $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}};$
80.  $\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}};$
81.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3}};$
82.  $\int \frac{dx}{x^2-5};$
83.  $\int \frac{dx}{x^2+3};$
84.  $\int \frac{dx}{2-x^2};$
85.  $\int \frac{dx}{4x^2+5};$
86.  $\int \frac{dx}{\sqrt{25-4x^2}};$
87.  $\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x^2}};$
88.  $\int \frac{dx}{9x^2-1};$
89.  $\int \frac{dx}{\sqrt{5-3x^2}};$
90.  $\int \frac{dx}{3-5x^2};$

91.  $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-5}}$ ;
92.  $\int \frac{x dx}{\sqrt{2-x^4}}$ ;
93.  $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^8-3}}$ ;
94.  $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{5-e^{2x}}}$ ;
95.  $\int \frac{\sin 2x dx}{5-\cos^2 2x}$ ;
96.  $\int \frac{2x-3}{x^2-4} dx$ ;
97.  $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} dx$ ;
98.  $\int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ ;
99.  $\int \frac{5e^x dx}{\sqrt{e^{2x}-4}}$ ;
100.  $\int \frac{\cos 5x dx}{\sqrt{3 \cos^2 5x-2}}$ ;
101.  $\int \frac{\sin \frac{x}{3} dx}{4 \cos^2 \frac{x}{3}+9}$ ;
102.  $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{4-x^{10}}}$ ;
103.  $\int \frac{x^6 dx}{x^{14}+5}$ ;
104.  $\int \frac{e^{-x} dx}{e^{-2x}+2}$ ;
105.  $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$ ;
106.  $\int \frac{dx}{x^2-6x+13}$ ;
107.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$ ;
108.  $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$ ;
109.  $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$ ;
110.  $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$ ;
111.  $\int \frac{dx}{3x^2-2x-1}$ ;
112.  $\int \frac{2x+1}{x^2-2x+5} dx$ ;
113.  $\int \frac{5x-1}{x^2+3x+3} dx$ ;
114.  $\int \frac{(1+x) dx}{x^2+x-1}$ ;
115.  $\int \frac{2-x}{x^2+4x+29} dx$ ;
116.  $\int \frac{3x-2}{\sqrt{5-4x-x^2}} dx$ ;
117.  $\int \frac{1-2x}{\sqrt{4x^2+4x+3}} dx$ ;
118.  $\int \frac{5x+11}{\sqrt{6x-x^2-5}} dx$ ;
119.  $\int \frac{1-3x}{\sqrt{6x-x^2}} dx$ ;
120.  $\int \frac{3+x}{\sqrt{3x+2x^2}} dx$ ;
121.  $\int \frac{4x+11}{\sqrt{x^2+8x+7}} dx$ ;
122.  $\int \frac{7x-1}{x^2-6x+1} dx$ ;



123.  $\int \frac{x^3}{x-2} dx$ ;  
124.  $\int \frac{3x^2+5}{x+1} dx$ ;  
125.  $\int \frac{x^4}{x^2+a^2} dx$  ( $a \neq 0$ );  
126.  $\int \frac{x-4}{(x-2)(x-3)} dx$ ;  
127.  $\int \frac{(x+1)^3}{x^2-x} dx$ ;  
128.  $\int \frac{3x-1}{2x+1} dx$ ;  
129.  $\int \frac{2x^2-1}{x^2-x+1} dx$ ;  
130.  $\int \frac{x^4-2x^3}{x-3} dx$ ;  
131.  $\int \frac{3x^3-2x^2}{x^2-6x+10} dx$ ;  
132.  $\int \frac{(x^3-2x) dx}{x^2-8x+7}$ ;  
133.  $\int \frac{3x^2+1}{x^2-x+1} dx$ ;  
134.  $\int \frac{3+x}{x^2+7x+13} dx$ ;  
135.  $\int \frac{x^4-3x^2}{x-3} dx$ ;  
136.  $\int \frac{x^2+3x}{x^2+8x-7} dx$ ;  
137.  $\int \ln x dx$ ;  
138.  $\int x \ln x dx$ ;  
139.  $\int x \ln(3x+2) dx$ ;  
140.  $\int (x^2+3x+2) \ln x dx$ ;  
141.  $\int x e^{-x} dx$ ;  
142.  $\int x e^{5x} dx$ ;  
143.  $\int x^3 e^{-x} dx$ ;  
144.  $\int x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx$ ;  
145.  $\int (2x+3) e^{2x} dx$ ;  
146.  $\int x \cos x dx$ ;  
147.  $\int x \sin x dx$ ;  
148.  $\int (x+1) \cos 3x dx$ ;  
149.  $\int x^2 \cos x dx$ ;  
150.  $\int x \cos^2 x dx$ ;  
151.  $\int \frac{x dx}{\sin^2 x}$ ;  
152.  $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$ ;  
153.  $\int \operatorname{arctg} x dx$ ;  
154.  $\int \arcsin x dx$ ;  
155.  $\int x \operatorname{arctg} x dx$ ;  
156.  $\int x \operatorname{arctg}(1-x) dx$ ;  
157.  $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} dx$ ;  
158.  $\int \operatorname{arctg} \sqrt{7x-1} dx$ ;

159.  $\int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx;$
160.  $\int e^x \sin x dx;$
161.  $\int e^x \cos x dx;$
162.  $\int e^{2x} \cos 3x dx;$
163.  $\int e^x \sin \frac{x}{2} dx;$
164.  $\int \ln^2 x dx;$
165.  $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} dx;$
166.  $\int \ln(x^2 + 2) dx;$
167.  $\int \cos(\ln x) dx;$
168.  $\int \frac{x \cos x dx}{\sin^3 x};$
169.  $\int x \operatorname{tg}^2 x dx;$
170.  $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx;$
171.  $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx;$
172.  $\int \frac{\ln(x+2)}{x^2} dx;$
173.  $\int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx;$
174.  $\int \frac{\ln x}{x \sqrt[3]{x}} dx;$
175.  $\int \sqrt{7 - x^2} dx;$
176.  $\int \sqrt{x^2 - 5} dx;$
177.  $\int \sqrt{3 - x^2} dx;$
178.  $\int \sqrt{x^2 + 2} dx;$
179.  $\int \sqrt{2 - 3x^2} dx;$
180.  $\int \sqrt{2x^2 - 1} dx;$
181.  $\int \sqrt{6x - x^2} dx;$
182.  $\int \sqrt{x^2 - 4x} dx;$
183.  $\int \sqrt{x^2 + 5x + 4} dx;$
184.  $\int \sqrt{3 - 2x - x^2} dx;$
185.  $\int \sqrt{5 + 4x - x^2} dx;$
186.  $\int \sqrt{2x - x^2} dx;$
187.  $\int \sin x \sqrt{2 - 3 \cos^2 x} dx;$
188.  $\int e^x \sqrt{e^{2x} + 3} dx;$
189.  $\int \cos x \sqrt{\sin^2 x + 3} dx;$
190.  $\int e^{\frac{x}{2}} \sqrt{4 - e^x} dx;$
191.  $\int \sqrt{\ln^2 x + 1} \frac{dx}{x};$
192.  $\int (2x - 1) \sqrt{3x - x^2} dx;$
193.  $\int (x + 3) \sqrt{5x + 2x^2} dx;$

194.  $\int (x - 1)\sqrt{-6x - x^2} dx;$
195.  $\int \sin^2 x dx;$
196.  $\int \cos^2 x dx;$
197.  $\int \sin^2 mx dx \quad (m \neq 0);$
198.  $\int \cos^2 mx dx \quad (m \neq 0);$
199.  $\int \sin^3 x dx;$
200.  $\int \cos^3 x dx;$
201.  $\int \cos^4 x dx;$
202.  $\int \sin^5 x dx;$
203.  $\int \cos^2 x \sin^2 x dx;$
204.  $\int \sin^3 \frac{x}{4} \cos^3 \frac{x}{4} dx;$
205.  $\int \sin^2 x \cdot \cos^4 x dx;$
206.  $\int \cos^2 x \sin^4 x dx;$
207.  $\int \sin^3 x \cos^2 x dx;$
208.  $\int \cos^7 x dx;$
209.  $\int \sin^4 x \cos^4 x dx;$
210.  $\int \cos^3 x \sin^5 x dx;$
211.  $\int \sin^4 \frac{x}{2} dx;$
212.  $\int (1 + 2 \cos x)^2 dx;$
213.  $\int \cos^5 x dx;$
214.  $\int \frac{dx}{\sin 2x};$
215.  $\int \frac{dx}{\cos \frac{x}{3}};$
216.  $\int \frac{dx}{\sin 9x};$
217.  $\int \frac{dx}{\cos 5x};$
218.  $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sin 2x} dx;$
219.  $\int \sin 3x \cos x dx;$
220.  $\int \sin 3x \sin 5x dx;$
221.  $\int \sin nx \sin mx dx \quad (m + n \neq 0, m - n \neq 0);$
222.  $\int \sin 3x \sin x dx;$
223.  $\int \sin \left(5x - \frac{\pi}{4}\right) \cos x dx;$
224.  $\int \sin \frac{x}{3} \cos \frac{2x}{3} dx;$
225.  $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^2 x};$
226.  $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx;$
227.  $\int \operatorname{ctg}^3 x dx;$
228.  $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x} dx;$
229.  $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^3 x} dx;$
230.  $\int \operatorname{tg}^4 x dx;$

231.  $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$ ;  
 232.  $\int \frac{dx}{1+3 \cos^2 x}$ ;  
 233.  $\int \frac{dx}{5+3 \cos x}$ ;  
 234.  $\int \frac{dx}{3 \sin x+4 \cos x}$ ;  
 235.  $\int \frac{dx}{3+\cos x}$ ;  
 236.  $\int \operatorname{tg}^5 x dx$ ;  
 237.  $\int \frac{dx}{2 \sin x+\sin 2x}$ ;  
 238.  $\int \frac{1+\cos x}{\sin^4 x} dx$ ;  
 239.  $\int \frac{dx}{\sin x-\cos x}$ ;  
 240.  $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$ ;  
 241.  $\int \frac{dx}{3 \sin^2 x+5 \cos^2 x}$ ;  
 242.  $\int \frac{dx}{\sin^2 x+3 \sin x \cos x-\cos^2 x}$ ;  
 243.  $\int \frac{dx}{\sin^2 x-5 \sin x \cdot \cos x}$ ;  
 244.  $\int \frac{dx}{8-4 \sin x+7 \cos x}$ ;  
 245.  $\int \frac{dx}{(\sin x+\cos x)^2}$ ;  
 246.  $\int \frac{\sin x dx}{b^2+\cos^2 x} (b \neq 0)$ ;  
 247.  $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x} dx$ ;  
 248.  $\int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x} dx$ ;  
 249.  $\int \frac{e^{2x}-2e^x}{e^{2x}+1} dx$ ;  
 250.  $\int \frac{e^{3x} dx}{e^x+2}$ ;  
 251.  $\int \frac{e^{4x} dx}{e^x-1}$ ;  
 252.  $\int \frac{e^{3x} dx}{e^{2x}-1}$ ;  
 253.  $\int \frac{e^x+1}{e^x-1} dx$ ;  
 254.  $\int \frac{e^{3x}+2e^x}{e^{2x}+e^x+1} dx$ ;  
 255.  $\int \frac{3e^{2x}-4e^x}{e^{2x}+4} dx$ ;  
 256.  $\int \frac{e^{5x} dx}{e^x+1}$ ;  
 257.  $\int \frac{\cos 2x dx}{\cos^4 x}$ ;  
 258.  $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$ ;  
 259.  $\int \frac{dx}{\cos x+2 \sin x+3}$ ;  
 260.  $\int \frac{1+\operatorname{tg} x}{\sin 2x} dx$ ;  
 261.  $\int \operatorname{ctg}^5 x dx$ ;  
 262.  $\int \frac{dx}{1+3 \sin^2 x}$ ;  
 263.  $\int (3x-1) \sqrt{-x^2-8x} dx$ ;  
 264.  $\int \frac{3x^3+x^2}{x^2+6x+10} dx$ ;

265.  $\int \frac{5e^{2x} - 3e^x}{e^x + 4 - e^{2x}} dx;$   
 266.  $\int (5x + 3)\sqrt{x^2 + 3x + 5} dx;$   
 267.  $\int \frac{a^x dx}{a^{2x} + 1} \quad (a > 0, a \neq 1);$   
 268.  $\int (1 - 2x)\sqrt{3x^2 + 8x} dx;$   
 269.  $\int \frac{6x - 10}{\sqrt{x^2 + 5x + 17}} dx;$   
 270.  $\int \sqrt{2x^2 + 4x + 1} dx;$   
 271.  $\int \frac{\arcsin \frac{x}{2}}{\sqrt{2-x}} dx;$   
 272.  $\int \frac{3x+1}{x^2+10x+1} dx;$   
 273.  $\int \frac{x \arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}};$   
 274.  $\int \sin(\ln x) dx;$   
 275.  $\int \sqrt{3 + 2x - x^2} dx;$   
 276.  $\int \operatorname{tg}^3 x dx;$   
 277.  $\int x^2 \operatorname{arctg}(2x + 1) dx;$   
 278.  $\int \cos mx \cos nx dx \quad (m + n \neq 0, m - n \neq 0);$   
 279.  $\int \frac{\ln(\cos x) dx}{\sin^2 x};$   
 280.  $\int \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 - 9})}{\sqrt{x-3}} dx;$   
 281.  $\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{3x}{2} + 1};$   
 282.  $\int \frac{dx}{3 + \sin 5x};$   
 283.  $\int \frac{dx}{\cos 3x + 2 \sin 3x};$   
 284.  $\int \frac{dx}{\cos 2x - \sin 2x + 2};$   
 285.  $\int \frac{dx}{2 + 3 \cos \frac{x}{2}};$   
 286.  $\int \frac{dx}{2 \sin^2 3x - 3 \cos^2 3x + 1}.$

## §2. Определенный интеграл, основные свойства определенного интеграла и его приложения

### 2.1. Общие понятия

Пусть числовая функция  $f(x)$  определена на  $[a, b]$ . Определим разбиение  $T$  отрезка  $[a, b]$  заданием конечной системы точек  $\{x_i\}$ :  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n$ . Диаметром разбиения  $d(T)$  разбиения  $T$  отрезка  $[a, b]$  назовем число  $d(T) = \max_{i=1,2,\dots,n} (x_i - x_{i-1}) > 0$ ,  $0 < d(T) \leq b - a$ . При заданном разбиении  $T$  отрезка  $[a, b]$  рассмотрим любую систему точек  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )

$$(a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 < \dots < x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i < \dots < x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b).$$

Разбиение  $T$  отрезка  $[a, b]$  вместе с выбранной системой точек  $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$  назовем размеченным разбиением  $[a, b]$  и будем обозначать  $T\xi$ . По заданной функции  $f : [z, b] \rightarrow \mathbb{R}$  и размеченному разбиению  $T\xi$  с диаметром  $d(T) > 0$  построим сумму

$$S_f(T\xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

**Определение 1.** Интегралом Римана функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  называется такое число  $I$  (если оно существует), что  $\lim_{d(T) \rightarrow 0} S_f(T\xi) = I$ .

Обозначается интеграл Римана следующим образом:  $I = \int_a^b f(x) dx$ . Здесь

и дальше полагаем:  $\int_a^a f(x) dx = 0$  и  $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$ .

**Замечание.** Интеграл Римана  $I = \int_a^b f(x) dx$  зависит от  $a, b$  и  $f$ , но не зависит от  $x$ , являющейся “немой” переменной (переменной интегрирования), в то время как неопределенный интеграл  $\int f(x) dx = F(x) + C$  зависит от  $x$ .

Некоторые свойства интеграла Римана.

1) Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  интегрируемы на  $[a, b]$ , тогда для любых  $\alpha$  и  $\beta$  справедлива формула:

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

2) Пусть  $a < c < b$ , тогда

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

3) Пусть  $f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ . Пусть  $F(x) = \int f(x) dx$  — неопределенный интеграл от функции  $f(x)$  на  $[a, b]$ , тогда:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

4) Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ . Пусть функции  $\varphi(t)$  и  $\varphi'(t)$  непрерывны на  $[\alpha, \beta]$ , причем  $\varphi(\alpha) = a$ ,  $\varphi(\beta) = b$  и  $f(\varphi(t))$  определена и

непрерывна на  $[\alpha, \beta]$ , тогда

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt.$$

5) Пусть функции  $u(x)$  и  $v(x)$  дифференцируемы на  $[a, b]$ , а их производные  $u'(x)$  и  $v'(x)$  интегрируемы на  $[a, b]$ , тогда

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x) \cdot u'(x) dx.$$

**Пример 1.** (см. свойство 3).

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \Big|_0^1 = \ln(1 + \sqrt{2}) - \ln 1 = \ln(1 + \sqrt{2}).$$

**Пример 2.** (см. свойство 3).

$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{2\pi} = -(\cos 2\pi - \cos 0) = 0.$$

**Пример 3.** (см. свойство 4).

$$\int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx,$$

рассмотрим подстановку  $x = 3 \sin t$ ,  $t \in [0, \pi/2]$ . Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{9-9\sin^2 t} 3 \cos t dt = \\ &= 9 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{9}{2} \left( t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{9\pi}{4}. \end{aligned}$$

**Пример 4.** (см. свойство 4).

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4} dx,$$

рассмотрим подстановку  $x = \frac{1}{\cos t}$ , так как  $x \in [1, 2]$ , то  $t \in [0; \frac{\pi}{3}]$ .

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^4} dx = \int_0^{\pi/3} \frac{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1}}{1/\cos^4 t} \cdot \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt = \int_0^{\pi/3} \sin^2 t \cdot \cos t dt = \frac{\sin^3 t}{3} \Big|_0^{\pi/3} = \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

**Пример 5.** (см. свойство 5).

$$\begin{aligned} \int_0^1 \operatorname{arctg} x dx &= x \cdot \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x dx}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 - \\ &- \frac{1}{2} \ln |1+x^2| \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} (\ln 2 - \ln 1) = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}. \end{aligned}$$

## 2.2. Геометрические приложения определенного интеграла

### I. Длина кривой.

I.1. Кривая задана явным уравнением  $y = f(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , тогда длина кривой вычисляется по формуле:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

**Пример 6.** Найти длину кривой  $y = \frac{x^2}{6}$  на участке  $x \in [0, 4]$ .

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{x^2}{6}\right)' = \frac{x}{3} \\ l &= \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{x}{3}\right)^2} dx = \frac{1}{3} \int_0^4 \sqrt{3^2 + x^2} dx = \\ &= \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{2} x \sqrt{3^2 + x^2} + \frac{9}{2} \ln(x + \sqrt{3^2 + x^2}) \right] \Big|_0^4 = \\ &= \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{2} 4 \cdot \sqrt{3^2 + 4^2} + \frac{9}{2} \ln(4 + \sqrt{3^2 + 4^2}) - \right. \\ &\left. - \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot \sqrt{3^2 + 0} - \frac{9}{2} \ln(0 + \sqrt{3^2 + 0}) \right] = \frac{1}{3} \cdot \left[ 10 + \frac{9}{2} \ln 9 - \right. \\ &\left. - \frac{9}{2} \ln 3 \right] = \frac{1}{3} \left[ 10 + \frac{9}{2} \ln 3 \right] = \frac{10}{3} + \frac{3}{2} \ln 3. \end{aligned}$$



I.2. Кривая задана параметрически:  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$ , тогда длина кривой вычисляется по формуле:

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

**Пример 7.** Вычислить длину астроида  $x = 2 \cos^3 t$ ,  $y = 2 \sin^3 t$ .

Так как кривая симметрична относительно обеих координатных осей, то вычислим сначала длину ее четвертой части  $l_1$ , расположенной в первом квадранте, в этом случае  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ .  $x'_t = -6 \cos^2 t \cdot \sin t$ ,  $y'_t = 6 \sin^2 t \cdot \cos t$ , отсюда

$$\begin{aligned} l_1 &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{36 \cos^4 t \sin^2 t + 36 \sin^4 t \cos^2 t} dt = \\ &= 6 \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 t \sin^2 t} dt = 6 \int_0^{\pi/2} \sin t \cos t dt = 6 \frac{\sin^2 t}{2} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{6}{2} = 3. \end{aligned}$$

Длина всей кривой  $l = 4l_1 = 4 \cdot 3 = 12$ .

**Пример 8.** Вычислить длину циклоиды:  $x = (t - \sin t)$ ,  $y = (1 - \cos t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

Найдем производные  $x'_t = 1 - \cos t$ ,  $y'_t = \sin t$ , тогда

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos t} dt = \int_0^{2\pi} 2 \sin \frac{t}{2} dt = -4 \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = \\ &= -4(\cos \pi - \cos 0) = -4(-1 - 1) = 8. \end{aligned}$$

I.3. Кривая задана в полярных координатах:  $r = r(\varphi)$ ,  $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ , тогда длина кривой вычисляется по формуле:

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2} d\varphi.$$

**Пример 9.** Вычислить длину кривой  $r = (1 + \cos \varphi)$ ,  $0 \leq \varphi \leq \pi$ .

Найдем производную  $r'_\varphi = (1 + \cos \varphi)' = -\sin \varphi$ , отсюда

$$\begin{aligned} l &= \int_0^\pi \sqrt{(1 + \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi} d\varphi = \int_0^\pi \sqrt{2 + 2 \cos \varphi} d\varphi = \\ &= 2 \int_0^\pi \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = 4 \sin \frac{\varphi}{2} \Big|_0^\pi = 4 \cdot \left( \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right) = 4. \end{aligned}$$

## II. Площади

II.1. Пусть криволинейная трапеция ограничена сверху и снизу кривыми, уравнения которых  $y = y_1(x)$ ,  $y = y_2(x)$ ,  $x \in [a, b]$ ,  $y_1(x) \geq y_2(x)$ . Тогда площадь криволинейной трапеции вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b [y_1(x) - y_2(x)] dx.$$

**Пример 10.** Даны эллипс  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$  и прямые  $x = 1$ ,  $x = -1$ ,  $y = 0$ , найти площадь фигуры, ограниченной прямыми и эллипсом.

Из уравнения эллипса имеем:  $y = \frac{3}{2} \sqrt{4 - x^2}$ , отсюда

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^1 \frac{3}{2} \sqrt{4 - x^2} dx = 3 \arcsin \frac{x}{2} + \frac{3}{4} x \sqrt{4 - x^2} \Big|_{-1}^1 = \\ &= 3 \arcsin \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \sqrt{4 - 1} - 3 \arcsin \left( -\frac{1}{2} \right) + \frac{3}{4} \sqrt{4 - 1} = \\ &= 6 \arcsin \frac{1}{2} + \frac{6}{4} \sqrt{3} = \pi + \frac{3\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

**Пример 11.** Определить площадь фигуры, заключенной между двумя параболой  $y^2 = 6x$  и  $x^2 = 6y$ .

Из уравнений кривых имеем:  $y = \sqrt{6x}$ ,  $y = \frac{x^2}{6}$ ,  $x \in [0, 6]$ .

$$S = \int_0^6 \left( \sqrt{6x} - \frac{x^2}{6} \right) dx = \left( \frac{2}{3} \sqrt{6} x^{3/2} - \frac{x^3}{18} \right) \Big|_0^6 = 12.$$

II.2. Площадь криволинейной трапеции в случае, когда кривая задана в параметрической форме:  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $\alpha \leq t \leq \beta$ ,  $\varphi(\alpha) = a$ ,  $\varphi(\beta) = b$ ,

вычисляется по формуле:

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \cdot x'(t) dt.$$

**Пример 12.** Вычислить площадь области, ограниченной эллипсом  $x = 3 \cos t$ ,  $y = 2 \sin t$ .

Вычислим площадь верхней половины и удвоим. Здесь  $x \in [-3, 3]$ , поэтому  $t$  изменяется от  $\pi$  до  $0$ ,

$$\begin{aligned} S &= 2 \cdot \int_{\pi}^0 2 \sin t (-3 \sin t) dt = 12 \int_0^{\pi} \sin^2 t dt = \\ &= 12 \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = 12 \left( \frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \right) \Big|_0^{\pi} = 6\pi. \end{aligned}$$

**Пример 13.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной циклоидой  $x = t - \sin t$ ,  $y = 1 - \cos t$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

$$S = \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = \left( \frac{3}{2}t - 2 \sin t + \frac{1}{4} \sin 2t \right) \Big|_0^{2\pi} = 3\pi.$$

П.3. Площадь криволинейного сектора в полярных координатах  $r = r(\varphi)$ ,  $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ , вычисляется по формуле:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (r(\varphi))^2 d\varphi.$$

**Пример 14.** Найти площадь кардиоиды  $r = \cos \varphi + 1$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$ .

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\cos \varphi + 1)^2 d\varphi = \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2}\varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi + 2 \sin \varphi \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{2}.$$

**Пример 15.** Найти площадь лемнискаты  $r^2 = 2 \cos 2\varphi$ .

Для вычисления общей площади достаточно удвоить площадь правого овала, которому отвечает изменение угла  $-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ .

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2\varphi d\varphi = \sin 2\varphi \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = 1 - (-1) = 2.$$

**III. Объем тела вращения**

Объем тела, образованного вращением вокруг оси  $Ox$  криволинейной трапеции, ограниченной кривой  $y = f(x)$ , осью  $Ox$  и прямыми  $x = a$ ,  $x = b$ , вычисляется по формуле:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

**Пример 16.** Найти объем тела, образованного вращением эллипса вокруг оси  $Ox$   $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ .

Так как  $y^2 = \frac{9}{25}(25 - x^2)$ , получим

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-5}^5 \frac{9}{25} (25 - x^2) dx = 2\pi \int_0^5 \frac{9}{25} (25 - x^2) dx = \\ &= 2\pi \cdot \frac{9}{25} \left( 25x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^5 = 60\pi. \end{aligned}$$

**Задачи для самостоятельного решения**

Вычислить:

287.  $\int_1^2 (x^2 + 1) dx;$

288.  $\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx;$

289.  $\int_0^{\pi} \sin x dx;$

290.  $\int_0^{\pi} \sin 2x dx;$

291.  $\int_{2\pi}^{3\pi} x \sin x dx;$

292.  $\int_1^e \ln x dx;$

293.  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 + 2x + 2};$

294.  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^5 x dx;$

$$295. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi d\varphi;$$

$$296. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi d\varphi;$$

$$297. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi \sin^3 \varphi d\varphi;$$

$$298. \int_0^3 e^{-\frac{x}{3}} dx;$$

$$299. \int_{-1}^1 xe^{-x^2} dx;$$

$$300. \int_{-1}^1 x^2 e^{-x} dx;$$

$$301. \int_0^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x dx;$$

$$302. \int_0^R x^3 \sqrt{R^2 - x^2} dx \quad (R > 0);$$

$$303. \int_0^e \ln^2 x dx;$$

$$304. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 + \cos x}.$$

Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

$$305. y = \frac{1}{x}, x = 1, x = e, y = 0;$$

$$306. y = x^2, y = 1;$$

$$307. y = x^2, y = 2 - x^2;$$

$$308. y = x^2 - 1, x = 2, y = 0, \text{ где } x \geq 1;$$

$$309. y = \sin 3x, y = 0, \text{ где } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3};$$

$$310. y = \sin x, y = \sin^3 x, \text{ где } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2};$$

$$311. y = x^2, y = x;$$

$$312. y = \arcsin 2x, x = 0, y = -\frac{\pi}{2};$$

$$313. y = \sin 2x, y = 1, x = \frac{\pi}{2}, \text{ где } \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2};$$

$$314. x^2 - y^2 = 1, x = 2;$$

$$315. y = x^3, y = -1, x = 0;$$

$$316. y = \frac{1}{2}(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}), x = 1, x = -1, y = 0;$$

$$317. y = x(3 - x), y = x - 3;$$

$$318. y = 3x - x^2, y = x^2 - x;$$

$$319. xy = 5, x + y = 6;$$

320.  $xy = -2, y = x - 3$ ;

321.  $xy = 4, x = 4, y = 4, x = 0, y = 0$ ;

322. кардиоидой  $\rho = a(1 + \cos \varphi)$ ;

323.  $\rho = a \cos 2\varphi$ ;

324.  $\rho = a \sin 2\varphi$ ;

325.  $\rho = 2 + \sin 2\varphi$ ;

326.  $\rho = ae^\varphi$ , где  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ;

327.  $\rho = a \sin 3\varphi$ ;

328.  $\rho = a \cos 3\varphi$ ;

329. одной аркой циклоиды  $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$  и осью  $OX$ ;

330.  $\rho = a \cos 4\varphi$ ;

331.  $\rho = a \sin 4\varphi$ .

332. Вычислить площади фигур, изображенных на рисунках 1 — 6.

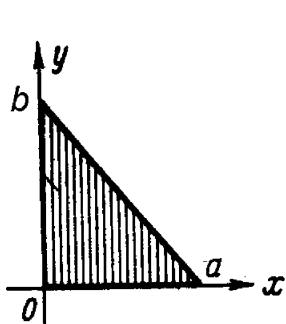


Рис. 1

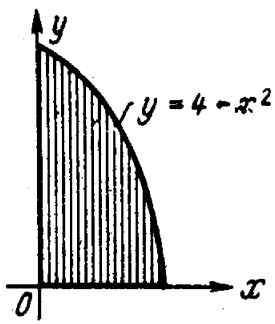


Рис. 2

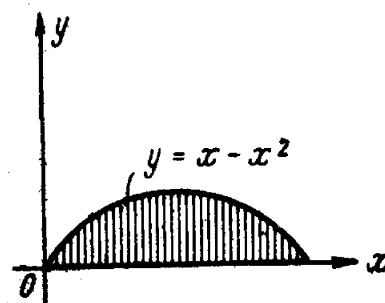


Рис. 3

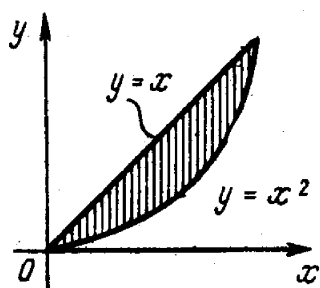


Рис. 4

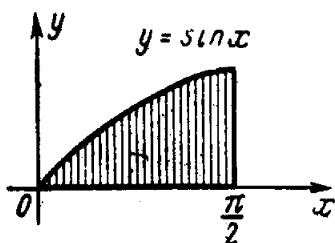


Рис. 5

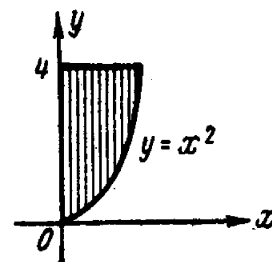


Рис. 6

Вычислить объемы тел, образованных вращением фигуры, ограниченной линиями:

333.  $y = 4 - x^2, y = 0, x = 0$ , где  $x \geq 0$  вокруг: 1) оси  $x$ , 2) оси  $y$ ;

334.  $y = x - x^2, y = 0$  вокруг каждой из следующих прямых: 1)  $y = 0$ , 2)  $x = 0$ , 3)  $x = 2$ , 4)  $x = -2$ , 5)  $y = -1$ , 6)  $y = 2$ ;

335.  $y = e^x, x = 0, x = 1, y = 0$  вокруг: 1) оси  $x$ , 2) оси  $y$ ;

336.  $y = x^2, y = 4, x = 0$ , где  $x \geq 0$  вокруг: 1) оси  $x$ , 2) оси  $y$ ;

**337.**  $y = x^2 + 1$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$  вокруг: 1) оси  $x$ , 2) оси  $y$ ;

**338.**  $y = x^3$ ,  $y = 1$ ,  $x = 0$  вокруг: 1) оси  $x$ , 2) оси  $y$ ;

**339.**  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,  $y = 0$ , где  $y \geq 0$  вокруг оси  $x$ ;

**340.**  $y = \ln x$ ,  $y = 0$ ,  $x = e$  вокруг каждой из следующих прямых: 1)  $y = 0$ , 2)  $x = 0$ , 3)  $y = -1$ , 4)  $x = 1$ , 5)  $x = -1$ , 6)  $y = 1$ ;

**341.**  $y = \sin x$ ,  $y = 0$ , где  $0 \leq x \leq \pi$  вокруг каждой из следующих прямых: 1)  $y = 0$ , 2)  $x = 0$ , 3)  $x = 2\pi$ , 4)  $x = -1$ , 5)  $x = -2$ , 6)  $y = 1$ , 7)  $y = -2$ ;

**342.**  $x^2 - y^2 = 4$ ,  $y = 2$ ,  $y = 0$  вокруг оси  $x$ ;

**343.**  $y = x$ ,  $y = x^2$  вокруг: 1) оси  $x$ , 2) оси  $y$ ;

**344.**  $y = \cos 2x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ , где  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$  вокруг: 1) оси  $x$ , 2) оси  $y$ ;

**345.**  $y = \sin x$ ,  $y = 0$ , где  $2\pi \leq x \leq 3\pi$  вокруг каждой из следующих прямых: 1)  $y = 0$ , 2)  $x = 0$ , 3)  $x = \pi$ , 4)  $y = -2$ ;

**346.**  $y = 2x - x^2$ ,  $y = 0$  вокруг каждой из следующих прямых: 1)  $x = 0$ , 2)  $y = 0$ , 3)  $x = -1$ , 4)  $y = 1$ ;

**347.**  $y = \frac{4}{x}$ ,  $x = 1$ ,  $x = 4$ ,  $y = 0$  вокруг: 1) оси  $x$ , 2) оси  $y$ ;

**348.**  $y = \frac{1}{1+x^2}$ ,  $x = 1$ ,  $x = -1$ ,  $y = 0$  вокруг: 1) оси  $x$ , 2) оси  $y$ .

Вычислить длину дуги кривой:

**349.**  $y^2 = x^3$ , отсеченной прямой  $x = 1$ ;

**350.**  $y = \ln \cos x$ , отсеченной прямыми  $x = 0$ ,  $x = \frac{\pi}{6}$ ;

**351.**  $y^2 = (x + 1)^3$ , отсеченной прямой  $x = 4$ ;

**352.**  $y^2 = \frac{4}{9}(2 - x)^3$ , отсеченной прямой  $x = -1$ ;

**353.**  $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$  между осью  $y$  и прямой  $x = a$ ;

**354.**  $y = x^2 - 1$ , отсеченной осью  $x$ ;

**355.**  $y = \ln \sin x$  от  $x = \frac{\pi}{3}$  до  $x = \frac{2\pi}{3}$ ;

**356.** астроида  $x = a \cos^3 t$ ,  $y = a \sin^3 t$ ;

**357.** одной арки циклоиды  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ ;

**358.** кардиоиды  $r = 4(1 - \cos \varphi)$ ;

**359.** первого завитка спирали  $r = a\varphi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ;

**360.**  $y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \ln x$  от  $x = 1$  до  $x = e$ .

## §3. Несобственные интегралы

### 3.1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами

Пусть функция  $f(x)$  определена на промежутке  $[a, +\infty)$  и интегрируема в любой конечной его части  $[a, A]$ , так что интеграл  $\int_a^A f(x) dx$  имеет смысл при любом  $A > a$ .

**Определение 1.** Несобственным интегралом от функции  $f(x)$  по промежутку  $[a; +\infty)$  называется предел (если он существует)  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx$ , его величина обозначается

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx. \quad (1)$$

В случае, если этот предел конечен, то говорят, что интеграл (1) сходится, если предел (1) бесконечен или вовсе не существует, то говорят, что интеграл расходится.

**Пример 1.** Рассмотрим интеграл  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ . Функция  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  на любом промежутке  $[0, A]$  интегрируема

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} A = \frac{\pi}{2}.$$

По определению интеграл сходится и его величина равна  $\frac{\pi}{2}$ .

**Пример 2.** Рассмотрим интеграл  $\int_0^{+\infty} \sin x dx$ . Функция  $f(x) = \sin x$  интегрируема на любом промежутке  $[0, A]$ . Так как

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \sin x dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} (-\cos A)$$

не существует, то по определению интеграл  $\int_0^{+\infty} \sin x dx$  расходится.

**Пример 3.** Рассмотрим интеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ . Функция  $f(x) = \frac{1}{x^p}$  интегрируема на любом промежутке  $[0, A]$ . Так как

$$\int_1^A \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{1}{1-p} (A^{1-p} - 1), & p \neq 1, \\ \ln A, & p = 1, \end{cases}$$

то интеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$  сходится при  $p > 1$  и расходится при  $p \leq 1$ .

Свойства несобственного интеграла.



1. Если существуют несобственные интегралы от функций  $f(x)$  и  $g(x)$  на промежутке  $[a; +\infty)$ , то для любых постоянных  $\alpha$  и  $\beta$  справедливо равенство:

$$\int_a^{+\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^{+\infty} f(x) dx + \beta \int_a^{+\infty} g(x) dx.$$

2. Пусть  $a < c < +\infty$ , и существует несобственный интеграл от функции  $f(x)$  на  $[a; +\infty)$ , тогда

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx.$$

3. Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на промежутке  $[a; +\infty)$ , то для любой строго монотонной и непрерывно дифференцируемой на  $[\alpha; \beta)$  функции  $\varphi : [\alpha; \beta) \rightarrow [a; +\infty)$  справедливо равенство

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt.$$

4. Если функции  $f(x)$  и  $g(x)$  непрерывно дифференцируемы на  $[a; +\infty)$  и существует  $\lim_{A \rightarrow +\infty} f(x)g(x)$ , то интегралы  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  и  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  одновременно сходятся или расходятся, и в случае их сходимости имеет место равенство

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx = f(x)g(x) \Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} f'(x)g(x) dx.$$

**Замечание.** Аналогично (1) определяется интеграл от функции  $f(x)$  на  $(-\infty; a]$

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^a f(x) dx,$$

равно как и интеграл функции  $f(x)$  на промежутке  $(-\infty; +\infty)$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{B \rightarrow -\infty \\ A \rightarrow +\infty}} \int_B^A f(x) dx.$$

**Пример 4.**

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A \rightarrow -\infty} (-\operatorname{arctg} A) = \frac{\pi}{2}.$$

**Пример 5.**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

### 3.2. Несобственные интегралы от неограниченных функций

Пусть функция  $f(x)$  задана на конечном промежутке  $[a; b]$ , но неограничена в этом промежутке. Положим, что в любом промежутке  $[a; b - \varepsilon]$  ( $0 < \varepsilon < b - a$ )  $f(x)$  ограничена и интегрируема, но оказывается неограниченной в каждом промежутке  $[b - \varepsilon, b]$ . Точка  $b$  в этом случае называется особой точкой.

**Определение 2.** Несобственным интегралом от функции  $f(x)$  на промежутке  $[a, b]$  называется предел  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^b f(x) dx$ , его величина обозначается

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx. \quad (2)$$

В случае, если этот предел конечен, говорят, что интеграл (2) сходится. Если же предел (2) бесконечен или вовсе не существует, то говорят, что интеграл (2) расходится.

**Замечание.** В случае, если  $f(x)$  ограничена и интегрируема в любом промежутке  $[a + \varepsilon; b]$  и неограничена в каждом промежутке  $[a; a + \varepsilon]$  справа от точки  $a$  (особая точка), тогда несобственный интеграл функции  $f(x)$  на промежутке  $[a, b]$  определяется равенством

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx. \quad (3)$$

**Замечание.** Пусть  $c \in [a, b]$  и функция  $f(x)$  неограничена в точке  $c$ , причем на промежутках  $[a; c - \varepsilon_1]$  ( $0 < \varepsilon_1 < c - a$ ) и  $[c + \varepsilon_2, b]$  ( $0 < \varepsilon_2 < b - c$ )

функция  $f(x)$  интегрируема, тогда

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x) dx + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x) dx. \quad (4)$$

**Пример 6.**  $\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ,  $x = -1$  — особая точка.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1+\varepsilon}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \arcsin x \Big|_{-1+\varepsilon}^0 = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\arcsin 0 - \arcsin(-1 + \varepsilon)) = -\arcsin(-1) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Интеграл сходится и его величина равна  $\frac{\pi}{2}$ .

**Пример 7.**  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ,  $x = 1$  — особая точка.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \arcsin x \Big|_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\arcsin(1 - \varepsilon) - \arcsin 0) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Интеграл сходится и его величина равна  $\frac{\pi}{2}$ .

**Пример 8.**  $\int_{-1}^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ ,  $x = 0$  — особая точка.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} &= \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \int_0^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_{-1}^{0-\varepsilon_1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \\ &+ \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \int_{0+\varepsilon_2}^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \frac{3}{2} \cdot x^{2/3} \Big|_{-1}^{-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \frac{3}{2} x^{2/3} \Big|_{\varepsilon_2}^8 = \\ &= \frac{3}{2} (8^{2/3} - (-1)^{2/3}) = \frac{3}{2} \cdot (4 - 1) = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

**Пример 9.**  $\int_{-2}^2 \frac{2x dx}{x^2-1}$ ,  $x = -1$ ,  $x = 1$  — особые точки.

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 \frac{2x dx}{x^2-1} &= \int_{-2}^{-1} \frac{2x dx}{x^2-1} + \int_{-1}^1 \frac{2x}{x^2-1} dx + \int_1^2 \frac{2x}{x^2-1} dx = \\ &= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_{-2}^{-1-\varepsilon_1} \frac{dx^2}{x^2-1} + \lim_{\substack{\varepsilon_2 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_3 \rightarrow 0}} \int_{-1+\varepsilon_2}^{1-\varepsilon_3} \frac{dx^2}{x^2-1} + \lim_{\varepsilon_4 \rightarrow 0} \int_{1+\varepsilon_4}^2 \frac{dx^2}{x^2-1} = \\ &= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \ln |x^2-1| \Big|_{-2}^{-1-\varepsilon_1} + \lim_{\substack{\varepsilon_2 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_3 \rightarrow 0}} \ln |x^2-1| \Big|_{-1+\varepsilon_2}^{1-\varepsilon_3} + \lim_{\varepsilon_4 \rightarrow 0} \ln |x^2-1| \Big|_{1+\varepsilon_4}^2 = \infty. \end{aligned}$$

Интеграл расходится.

**Пример 10.**  $\int_0^a \frac{dx}{(a-x)^p}$ ,  $x = a$  — особая точка.

$$\int_0^a \frac{dx}{(a-x)^p} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{a-\varepsilon} \frac{dx}{(a-x)^p} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^a \frac{dt}{t^p} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{cases} \frac{1}{1-p} (a^{1-p} - \varepsilon^{1-p}), & p \neq 1 \\ (\ln a - \ln \varepsilon), & p = 1, \end{cases}$$

отсюда интеграл  $\int_0^a \frac{dx}{(a-x)^p}$  сходится, если  $p < 1$ , и расходится, если  $p \geq 1$ .

**Замечание.** Несобственные интегралы от неограниченных функций обладают теми же свойствами, что и несобственные интегралы на бесконечном промежутке. При их формулировке промежутки  $[a; +\infty)$  заменяются на промежутки  $[a, b]$ .

## Задачи для самостоятельного решения

Вычислить:

361.  $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx;$

362.  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha};$

363.  $\int_6^{+\infty} \frac{dx}{x^2-4x};$

364.  $\int_0^{+\infty} \operatorname{arccotg} x dx;$

$$365. \int_1^{+\infty} \frac{1+\ln x}{x} dx;$$

$$366. \int_0^{+\infty} \sin x dx;$$

$$367. \int_0^0 x e^x dx;$$

$$368. \int_0^{-\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx;$$

$$369. \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}};$$

$$370. \int_0^1 \ln x dx;$$

$$371. \int_0^1 \ln^2 x dx;$$

$$372. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{ctg} x dx;$$

$$373. \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}};$$

$$374. \int_0^3 \frac{dx}{(x-3)^2};$$

$$375. \int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}};$$

$$376. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x};$$

$$377. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha};$$

$$378. \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx.$$

# ОТВЕТЫ

1.  $\frac{x^3}{3} + \frac{3x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + x$ .      2.  $\frac{x^5}{5} + \frac{5}{6}x\sqrt{x} + 2x\sqrt{x} - \frac{1}{x} - \ln|x| + 5x$ .  
 3.  $2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x}$ .      4.  $x^5 - \frac{1}{3x^3}$ .      5.  $\frac{5}{6}\sqrt[5]{x}(x-6)$ .      6.  $\ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}$ .  
 7.  $\frac{2}{3}x\sqrt{x} - 3x + 6\sqrt{x} - \ln|x|$ .      8.  $\frac{2x}{\ln 2} + \frac{3x}{\ln 3}$ .      9.  $\frac{3 \cdot 4^x}{\ln 4} - \frac{2}{\sqrt{x}}$ .      10.  $2e^x + \frac{1}{2x^2}$ .  
 11.  $2 \operatorname{arctg} x - 3 \arcsin x$ .      12.  $\frac{x^7}{3} - x + \operatorname{arctg} x$ .      13.  $e^x + \operatorname{tg} x$ .  
 14.  $5 \sin x - \cos x$ .      15.  $-(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)$ .      16.  $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$ .      17.  $3 \operatorname{tg} x - 4 \operatorname{ctg} x$ .  
 18.  $3 \operatorname{tg} x + 2 \operatorname{ctg} x$ .      19.  $\cos x - \operatorname{ctg} x$ .      20.  $\operatorname{tg} x - x$ .      21.  $-(x + \operatorname{ctg} x)$ .  
 22.  $\frac{1}{2}(x - \sin x)$ .      23.  $\frac{1}{2}(x + \sin x)$ .      24.  $x + \cos x$ .      25.  $\frac{(2e)^x}{\ln 2 + 1}$ .  
 26.  $\arcsin x - \ln|x + \sqrt{1+x^2}|$ .      27.  $\frac{\sin 5x}{5}$ .      28.  $-\frac{\cos 7x}{7}$ .      29.  $4 \sin \frac{x}{4}$ .  
 30.  $-e^{-x}$ .      31.  $2(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}})$ .      32.  $\frac{\operatorname{tg} 3x}{3}$ .      33.  $-3 \operatorname{ctg} \frac{x}{3}$ .      34.  $\frac{(2+5x)^{10}}{50}$ .  
 35.  $-\frac{2}{3}\sqrt{2-3x}$ .      36.  $\frac{1}{3}(2x-5)^{\frac{3}{2}}$ .      37.  $-\frac{3}{28}(3-7x)^{\frac{4}{3}}$ .      38.  $\frac{1}{5} \ln|5x+2|$ .  
 39.  $-\frac{1}{3} \ln|2-3x|$ .      40.  $\frac{1}{2} \ln(x^2+3)$ .      41.  $\ln|\sin x|$ .      42.  $-\ln|\cos x|$ .  
 43.  $-\frac{1}{3} \ln|1+3\cos x|$ .      44.  $-\frac{1}{4(\ln x+1)^4}$ .      45.  $\frac{1}{3} \ln|3+\sin 3x|$ .      46.  $\ln|\sin 2x|$ .  
 47.  $\frac{\sin^3 x}{3}$ .      48.  $-\frac{\cos^4 x}{4}$ .      49.  $-e^{\cos x}$ .      50.  $-\frac{1}{3}e^{-x^3}$ .      51.  $2e^{\sqrt{x}}$ .  
 52.  $-\frac{1}{2} \operatorname{cosec}^2 x$ .      53.  $\frac{1}{4 \cos^4 x}$ .      54.  $\frac{3}{4}(2+\ln x)^{\frac{4}{3}}$ .      55.  $-\frac{2}{15}(3+\cos 5x)^{\frac{3}{2}}$ .  
 56.  $\frac{7}{90}(3+5\sin 3x)^{\frac{6}{7}}$ .      57.  $\frac{1}{8} \ln(5+2e^{4x})$ .      58.  $\frac{\operatorname{arctg}^3 x}{3}$ .      59.  $\frac{3}{4}(\arcsin x)^{\frac{4}{3}}$ .  
 60.  $\frac{\sin x - 2}{\cos x}$ .      61.  $2 \ln|\sin x| - \operatorname{ctg} x$ .      62.  $e^{\sin x}$ .      63.  $e^{\operatorname{tg} x}$ .      64.  $\frac{5}{18}(x^3-8)^{\frac{6}{5}}$ .  
 65.  $-\frac{2}{75}(1-6x^5)^{\frac{5}{4}}$ .      66.  $\frac{2\sqrt{x+1}}{\ln 2}$ .      67.  $-\frac{3^{\frac{1}{x}}}{\ln 3}$ .      68.  $\frac{2x+9}{4} \cdot \sqrt{4x+1}$ .  
 69.  $\frac{2(44-15x)}{27} \cdot \sqrt{1-3x}$ .      70.  $\frac{4(17-14x)}{147} \sqrt{7x-1}$ .      71.  $e^{\operatorname{arctg} x}$ .      72.  $\frac{1}{2} \cos \frac{1}{x^2}$ .  
 73.  $-\frac{4^{1-3x}}{3 \ln 4}$ .      74.  $-\frac{\arccos^2 x}{2}$ .      75.  $-e^{-\operatorname{tg} x}$ .      76.  $\frac{\arcsin^2 x}{2} - \sqrt{1-x^2}$ .  
 77.  $\frac{1}{8} \ln \left| \frac{x-4}{x+4} \right|$ .      78.  $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$ .      79.  $\arcsin \frac{x}{2}$ .      80.  $\ln|x + \sqrt{4+x^2}|$ .  
 81.  $\ln|x + \sqrt{x^2-3}|$ .      82.  $\frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}} \right|$ .      83.  $\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}}$ .      84.  $\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}-x} \right|$ .  
 85.  $\frac{1}{2\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{2x}{\sqrt{5}}$ .      86.  $\frac{1}{2} \arcsin \frac{2x}{5}$ .      87.  $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln|\sqrt{2}x + \sqrt{3+2x^2}|$ .  
 88.  $\frac{1}{6} \ln \left| \frac{3x-1}{3x+1} \right|$ .      89.  $\frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{\sqrt{15}x}{5}$ .      90.  $\frac{1}{2\sqrt{15}} \ln \left| \frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}x}{\sqrt{3}-\sqrt{5}x} \right|$ .  
 91.  $\frac{1}{3} \ln|3x + \sqrt{9x^2-5}|$ .      92.  $\frac{1}{2} \arcsin \frac{x^2}{\sqrt{2}}$ .      93.  $\frac{1}{4} \ln|x^4 + \sqrt{x^8-3}|$ .  
 94.  $\arcsin \frac{e^x}{\sqrt{5}}$ .      95.  $\frac{1}{4\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\sqrt{5}-\cos 2x}{\sqrt{5}+\cos 2x} \right|$ .      96.  $\frac{1}{4} \ln|(x-2)(x+2)^7|$ .  
 97.  $\ln|x + \sqrt{x^2+1}| + \sqrt{x^2+1}$ .      98.  $\arcsin x - \sqrt{1-x^2}$ .      99.  $5 \ln|e^x + \sqrt{e^{2x}-4}|$ .  
 100.  $\frac{1}{5\sqrt{3}} \arcsin(\sqrt{3} \sin 5x)$ .      101.  $-\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2 \cos \frac{x}{3}}{3}$ .      102.  $\frac{1}{5} \arcsin \frac{x^5}{2}$ .  
 103.  $\frac{1}{7\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x^7}{\sqrt{5}}$ .      104.  $-\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{e^{-x}}{\sqrt{2}}$ .      105.  $\operatorname{arctg}(x+2)$ .      106.  $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-3}{2}$ .  
 107.  $\ln|x+1 + \sqrt{x^2+2x+3}|$ .      108.  $\arcsin \frac{x-2}{2}$ .      109.  $\arcsin \frac{x+1}{2}$ .  
 110.  $\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{4x-3}{5}$ .      111.  $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+\frac{1}{3}} \right|$ .      112.  $\frac{3}{2} \ln(x^2-2x+5) + 2 \operatorname{arctg} \frac{x-1}{2}$ .

- 113.**  $\frac{5}{2} \ln(x^2 + 3x + 3) - \frac{17}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+3}{\sqrt{3}}$ .    **114.**  $\frac{1}{2} \ln|x^2 + x - 1| + \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{2x+1-\sqrt{5}}{2x+1+\sqrt{5}} \right|$ .  
**115.**  $\frac{4}{5} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{5} - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4x + 29)$ .    **116.**  $-3\sqrt{5-4x-x^2} - 8 \arcsin \frac{x+2}{3}$ .  
**117.**  $\ln \left| x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + \frac{3}{4}} \right| - \frac{1}{2} \sqrt{4x^2 + 4x + 3}$ .  
**118.**  $26 \arcsin \frac{x-3}{2} - 5\sqrt{6x-x^2-5}$ .    **119.**  $3\sqrt{6x-x^2} - 8 \arcsin \frac{x-3}{3}$ .  
**120.**  $\frac{1}{2} \sqrt{3x+2x^2} + \frac{9}{4\sqrt{2}} \ln \left| x + \frac{3}{4} + \sqrt{x^2 + \frac{3}{2}x} \right|$ .    **121.**  $4\sqrt{x^2+8x+7} - 5 \ln|x+4+\sqrt{x^2+8x+7}|$ .  
**122.**  $\frac{7}{2} \ln|x^2-6x+1| + \frac{5}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x-3-2\sqrt{2}}{x-3+2\sqrt{2}} \right|$ .  
**123.**  $\frac{x^3}{3} + x^2 + 4x + 8 \ln|x-2|$ .    **124.**  $\frac{3}{2} x^2 - 3x + 8 \ln|x+1|$ .    **125.**  $\frac{x^3}{3} - a^2x + a^3 \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$ .  
**126.**  $\ln \frac{(x-2)^2}{|x-3|}$ .    **127.**  $\frac{(x+4)^2}{2} + \ln \frac{(x-1)^8}{|x|}$ .    **128.**  $\frac{3}{2} x - \frac{5}{4} \ln|2x+1|$ .  
**129.**  $2x + \ln(x^2 - x + 1) - \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$ .    **130.**  $\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 9x + 27 \ln|x-3|$ .  
**131.**  $\frac{3}{2} x^2 + 16x + 33 \ln(x^2 - 6x + 10) + 38 \operatorname{arctg}(x - 3)$ .    **132.**  $\frac{(x+8)^2}{2} + \frac{55}{2} \ln|x^2 - 8x + 7| + \frac{82}{3} \ln \left| \frac{x-7}{x-1} \right|$ .  
**133.**  $3x + \frac{3}{2} \ln(x^2 - x + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$ .  
**134.**  $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 7x + 13) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+7}{\sqrt{3}}$ .    **135.**  $\frac{x^4}{4} + x^3 + 3x^2 + 18x + 54 \ln|x-3|$ .  
**136.**  $x - \frac{5}{2} \ln|x^2 + 8x - 7| + \frac{27}{2\sqrt{23}} \ln \left| \frac{x+4-\sqrt{23}}{x+4+\sqrt{23}} \right|$ .    **137.**  $x(\ln x - 1)$ .    **138.**  $\frac{x^2}{4} (2 \ln x - 1)$ .  
**139.**  $\left( \frac{x^2}{2} - \frac{2}{9} \right) \ln(3x + 2) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{3}$ .    **140.**  $\left( \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2} x^2 + 2x \right) \ln x - \frac{x^3}{9} - \frac{3x^2}{4} - 2x$ .  
**141.**  $-e^{-x}(x + 1)$ .    **142.**  $\frac{e^{5x}}{25} (5x - 1)$ .    **143.**  $-e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 6x + 6)$ .  
**144.**  $-2e^{-\frac{x}{2}}(x^2 + 4x + 8)$ .    **145.**  $e^{2x}(x + 1)$ .    **146.**  $x \sin x + \cos x$ .  
**147.**  $\sin x - x \cos x$ .    **148.**  $\frac{x+1}{3} \sin 3x + \frac{\cos 3x}{9}$ .    **149.**  $(x^2 - 2) \sin x + 2x \cos x$ .  
**150.**  $\frac{x^2}{4} + \frac{x}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} \cos 2x$ .    **151.**  $\ln|\sin x| - x \operatorname{ctg} x$ .    **152.**  $x \operatorname{tg} x + \ln|\cos x|$ .  
**153.**  $x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$ .    **154.**  $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$ .    **155.**  $\frac{x^2+1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2}$ .  
**156.**  $\frac{x^2}{2} \operatorname{arctg}(1-x) - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \ln(x^2 - 2x + 2)$ .    **157.**  $2\sqrt{1+x} \arcsin x + 4\sqrt{1-x}$ .  
**158.**  $x \operatorname{arctg} \sqrt{7x-1} - \frac{1}{7} \sqrt{7x-1}$ .    **159.**  $\frac{x^2-1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + x$ .  
**160.**  $\frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x)$ .    **161.**  $\frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x)$ .    **162.**  $\frac{e^{2x}}{13} (3 \sin 3x + 2 \cos 3x)$ .  
**163.**  $\frac{2}{5} e^x (2 \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2})$ .    **164.**  $x[1 + (\ln x - 1)^2]$ .    **165.**  $\frac{5}{4} \sqrt[5]{x^4} (\ln x - \frac{5}{4})$ .  
**166.**  $x \ln x(x^2 + 2) - 2x + \frac{4}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}}$ .    **167.**  $\frac{x}{2} [\cos(\ln x) + \sin(\ln x)]$ .  
**168.**  $-\frac{x}{2 \sin^2 x} - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} x$ .    **169.**  $\ln|\cos x| - \frac{x^2}{2} + x \operatorname{tg} x$ .    **170.**  $-\frac{\operatorname{arctg} x}{x} - \frac{1}{2} \ln \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right)$ .  
**171.**  $2\sqrt{x} \arcsin \sqrt{x} + 2\sqrt{1-x}$ .    **172.**  $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x}{x+2} \right| - \frac{\ln(x+2)}{x}$ .  
**173.**  $2\sqrt{x} \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \ln|1+x|$ .    **174.**  $\frac{3}{\sqrt{x}} (3 + \ln x)$ .    **175.**  $\frac{x}{2} \sqrt{7-x^2} + \frac{7}{2} \arcsin \frac{x}{\sqrt{7}}$ .  
**176.**  $\frac{x}{2} \sqrt{x^2-5} - \frac{5}{2} \ln|x + \sqrt{x^2-5}|$ .    **177.**  $\frac{x}{2} \sqrt{3-x^2} + \frac{3}{2} \arcsin \frac{x}{\sqrt{3}}$ .  
**178.**  $\frac{x}{2} \sqrt{x^2+2} + \ln|x + \sqrt{x^2+2}|$ .    **179.**  $\frac{\sqrt{3}}{2} \left( x \sqrt{\frac{2}{3} - x^2} + \frac{2}{3} \arcsin \frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right)$ .  
**180.**  $\frac{\sqrt{2}}{2} \left( x \sqrt{x^2 - \frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 - \frac{1}{2}} \right| \right)$ .    **181.**  $\frac{x-3}{2} \sqrt{6x-x^2} + \frac{9}{2} \arcsin \frac{x-3}{3}$ .

- 182.**  $\frac{x-2}{2} \sqrt{x^2-4x} - 2 \ln |x-2 + \sqrt{x^2-4x}|$ . **183.**  $\frac{2x+5}{4} \sqrt{x^2+5x+4} -$   
 $-\frac{9}{8} \ln |x + \frac{5}{2} + \sqrt{x^2+5x+4}|$ . **184.**  $\frac{x+1}{2} \sqrt{3-2x-x^2} + 2 \arcsin \frac{x+1}{2}$ .  
**185.**  $\frac{x-2}{2} \sqrt{5+4x-x^2} + \frac{9}{2} \arcsin \frac{x-2}{3}$ . **186.**  $\frac{x-1}{2} \sqrt{2x-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin(x-1)$ .  
**187.**  $-\frac{1}{\sqrt{3}} \left[ \frac{\sqrt{3} \cos x}{2} \sqrt{2-3 \cos^2 x} + \arcsin \frac{\sqrt{3} \cos x}{\sqrt{2}} \right]$ . **188.**  $\frac{e^x}{2} \sqrt{e^{2x}+3} +$   
 $+\frac{3}{2} \ln(e^x + \sqrt{e^{2x}+3})$ . **189.**  $\frac{\sin x}{2} \sqrt{\sin^2 x+3} + \frac{3}{2} \ln |\sin x + \sqrt{\sin^2 x+3}|$ .  
**190.**  $e^{\frac{x}{2}} \sqrt{4-e^x} + 4 \arcsin \frac{e^{\frac{x}{2}}}{2}$ . **191.**  $\frac{\ln x}{2} \sqrt{\ln^2 x+1} + \frac{1}{2} \ln |\ln x +$   
 $+\sqrt{\ln^2 x+1}|$ . **192.**  $\frac{9}{4} \arcsin \frac{2x-3}{3} + (x-\frac{3}{2}) \sqrt{3x-x^2} - \frac{2}{3} (3x-x^2)^{\frac{3}{2}}$ .  
**193.**  $\frac{1}{6} (5x+2x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{4\sqrt{2}} \left[ (x+\frac{5}{4}) \sqrt{\frac{5}{2}x+x^2} - \frac{25}{16} \ln |x+\frac{5}{4} + \sqrt{\frac{5}{2}x+x^2}| \right]$ .  
**194.**  $-\frac{1}{3} (-6x-x^2)^{\frac{3}{2}} - 2 \left[ (x+3) \sqrt{-6x-x^2} + 9 \arcsin \frac{x+3}{3} \right]$ . **195.**  $\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x$ .  
**196.**  $\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x$ . **197.**  $\frac{x}{2} - \frac{1}{4m} \sin 2mx$ . **198.**  $\frac{x}{2} + \frac{1}{4m} \sin 2mx$ . **199.**  $-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3}$ .  
**200.**  $\sin x - \frac{\sin^3 x}{3}$ . **201.**  $\frac{3x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32}$ . **202.**  $\frac{2}{3} \cos^3 x - \frac{\cos^5 x}{5} - \cos x$ .  
**203.**  $\frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32}$ . **204.**  $\frac{\cos^3 \frac{x}{2}}{12} - \frac{\cos \frac{x}{2}}{4}$ . **205.**  $\frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48}$ .  
**206.**  $\frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} - \frac{\sin^3 2x}{48}$ . **207.**  $\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3}$ . **208.**  $\sin x - \sin^3 x + \frac{3 \sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7}$ .  
**209.**  $\frac{3x}{128} - \frac{\sin 4x}{128} + \frac{\sin 8x}{1024}$ . **210.**  $\frac{\sin^6 x}{6} - \frac{\sin^8 x}{8}$ . **211.**  $\frac{3}{8} x - \frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 2x}{16}$ .  
**212.**  $3x + 4 \sin x + \sin 2x$ . **213.**  $\sin x - \frac{2 \sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5}$ . **214.**  $\frac{1}{2} \ln |\operatorname{tg} x|$ .  
**215.**  $3 \ln |\operatorname{tg} (\frac{\pi}{4} + \frac{x}{6})|$ . **216.**  $\frac{1}{9} \ln |\operatorname{tg} \frac{9x}{2}|$ . **217.**  $\frac{1}{5} \ln |\operatorname{tg} (\frac{\pi}{4} + \frac{5x}{2})|$ .  
**218.**  $\frac{1}{2} \left[ \ln |\operatorname{tg} \frac{x}{2}| + \ln |\operatorname{tg} (\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2})| \right]$ . **219.**  $-\frac{1}{8} (\cos 4x + 2 \cos 2x)$ .  
**220.**  $\frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{16} \sin 8x$ . **221.**  $\frac{1}{2} \left[ \frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n} \right]$ . **222.**  $\frac{1}{8} (2 \sin 2x - \sin 4x)$ .  
**223.**  $-\frac{1}{12} \cos (6x - \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{8} \cos (4x - \frac{\pi}{4})$ . **224.**  $\frac{3}{2} \cos \frac{x}{3} - \frac{1}{2} \cos x$ .  
**225.**  $-\frac{1}{\sin x} - \sin x$ . **226.**  $\frac{1}{\cos x} + \cos x$ . **227.**  $-\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} - \ln |\sin x|$ .  
**228.**  $-\frac{\operatorname{ctg}^4 x}{4}$ . **229.**  $\frac{1}{2 \cos^2 x} + 2 \ln |\cos x| - \frac{\cos^2 x}{2}$ . **230.**  $\frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x$ .  
**231.**  $-\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} - \operatorname{ctg} x$ . **232.**  $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{2}$ . **233.**  $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} (\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2})$ .  
**234.**  $\frac{1}{5} \ln \left| \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2} \right|$ . **235.**  $-\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{2}} \right)$ . **236.**  $\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \ln |\cos x|$ .  
**237.**  $\frac{1}{4} \ln |\operatorname{tg} \frac{x}{2}| + \frac{1}{8} \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}$ . **238.**  $-\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} - \operatorname{ctg} x - \frac{1}{3 \sin^3 x}$ . **239.**  $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 - \sqrt{2}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 + \sqrt{2}} \right|$ .  
**240.**  $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 + \sqrt{2}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 - \sqrt{2}} \right|$ . **241.**  $\frac{1}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{3} \operatorname{tg} x}{\sqrt{5}} \right)$ . **242.**  $\frac{1}{\sqrt{13}} \ln \left| \frac{2 \operatorname{tg} x + 3 - \sqrt{13}}{2 \operatorname{tg} x + 3 + \sqrt{13}} \right|$ .  
**243.**  $\frac{1}{5} \ln |1 - 5 \operatorname{ctg} x|$ . **244.**  $\ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 5}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 3} \right|$ . **245.**  $-\frac{1}{\operatorname{tg} x + 1}$ . **246.**  $-\frac{1}{b} \operatorname{arctg} \left( \frac{\cos x}{b} \right)$ .  
**247.**  $\frac{\sin^2 x}{2} - \frac{1}{2 \sin^2 x} - 2 \ln |\sin x|$ . **248.**  $\operatorname{tg}^2 x$ . **249.**  $\frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1) - 2 \operatorname{arctg}(e^x)$ .  
**250.**  $\frac{e^{2x}}{2} - 2e^x + 4 \ln(e^x + 2)$ . **251.**  $\frac{e^{3x}}{3} + \frac{e^{2x}}{2} + e^x + \ln |e^x - 1|$ . **252.**  $e^x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right|$ .  
**253.**  $2 \ln |e^x - 1| - x$ . **254.**  $e^x - \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + e^x + 1) + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2e^x + 1}{\sqrt{3}}$ .  
**255.**  $\frac{3}{2} \ln(e^{2x} + 4) - 2 \operatorname{arctg} \frac{e^x}{2}$ . **256.**  $\frac{e^{4x}}{4} - \frac{e^{3x}}{3} + \frac{e^{2x}}{2} - e^x + \ln(e^x + 1)$ .  
**257.**  $\operatorname{tg} x - \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}$ . **258.**  $\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \operatorname{tg} x$ . **259.**  $\operatorname{arctg} (\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1)$ .



- 260.**  $\frac{1}{2}(\operatorname{tg} x + \ln |\operatorname{tg} x|)$ . **261.**  $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{4 \sin^4 x} + \ln |\sin x|$ . **262.**  $\frac{1}{2} \operatorname{arctg}(2 \operatorname{tg} x)$ .  
**263.**  $-(-x^2 - 8x)^{\frac{3}{2}} - \frac{13}{2} [(x+4)\sqrt{-x^2 - 8x} + 16 \arcsin \frac{x+4}{4}]$ . **264.**  $\frac{3}{2}x^2 - 17x + 36 \ln(x^2 + 6x + 10) - 46 \operatorname{arctg}(x+3)$ . **265.**  $\frac{1}{2\sqrt{17}} \ln \left| \frac{2e^x - 1 - \sqrt{17}}{2e^x - 1 + \sqrt{17}} \right| - \frac{5}{2} \ln |e^x + 4 - e^{2x}|$ . **266.**  $\frac{5}{3}(x^2 + 3x + 5)^{\frac{3}{2}} - \frac{9}{4} [(x + \frac{3}{2})\sqrt{x^2 + 3x + 5} + \frac{11}{4} \ln |x + \frac{3}{2} + \sqrt{x^2 + 3x + 5}|]$ . **267.**  $\frac{1}{\ln a} \operatorname{arctg}(a^x)$ .  
**268.**  $-\frac{2}{9}(3x^2 + 8x)^{\frac{3}{2}} + \frac{11}{2\sqrt{3}} [(x + \frac{4}{3})\sqrt{x^2 + \frac{8}{3}x} - \frac{16}{9} \ln |x + \frac{4}{3} + \sqrt{x^2 + \frac{8}{3}x}|]$ .  
**269.**  $\frac{6\sqrt{x^2 + 5x + 17}}{25 \ln |x + \frac{5}{2} + \sqrt{x^2 + 5x + 17}|}$ .  
**270.**  $\frac{1}{\sqrt{2}} [(x+1)\sqrt{x^2 + 2x + \frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \ln |x+1 + \sqrt{x^2 + 2x + \frac{1}{2}}|]$ . **271.**  $4\sqrt{2-x} - 2\sqrt{2-x} \arcsin \frac{x}{2}$ . **272.**  $\frac{3}{2} \ln |x^2 + 10x + 1| - \frac{7}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{x+5-2\sqrt{6}}{x+5+2\sqrt{6}} \right|$ .  
**273.**  $x - \sqrt{1-x^2} \arcsin x$ . **274.**  $\frac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x))$ .  
**275.**  $\frac{x-1}{2} \sqrt{3+2x-x^2} + 2 \arcsin \frac{x-1}{2}$ . **276.**  $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln |\cos x|$ . **277.**  $(\frac{x^3}{3} - \frac{1}{12}) \operatorname{arctg}(2x+1) - \frac{x^2}{12} + \frac{x}{6} - \frac{1}{24} \ln(x^2 + x + \frac{1}{2})$ .  
**278.**  $\frac{1}{2} [\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n}]$ . **279.**  $-\operatorname{ctg} x \ln(\cos x) - x$ .  
**280.**  $2\sqrt{x-3} \ln(x + \sqrt{x^2-9}) - 4\sqrt{x+3}$ . **281.**  $\frac{\sqrt{2}}{3} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} \frac{3x}{2})$ .  
**282.**  $\frac{1}{5\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{3 \operatorname{tg} \frac{5x}{2} + 1}{2\sqrt{2}}$ . **283.**  $\frac{1}{3\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{3x}{2} - 2 + \sqrt{5}}{\operatorname{tg} \frac{3x}{2} - 2 - \sqrt{5}} \right|$ . **284.**  $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\sqrt{2}}$ .  
**285.**  $\frac{2}{\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{4} + \sqrt{5}}{\operatorname{tg} \frac{x}{4} - \sqrt{5}} \right|$ . **286.**  $\frac{1}{6\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} 3x - \sqrt{\frac{2}{3}}}{\operatorname{tg} 3x + \sqrt{\frac{2}{3}}} \right|$ . **287.**  $\frac{10}{3}$ . **288.**  $\frac{1}{3}$ . **289.**  $2$ .  
**290.**  $0$ . **291.**  $5\pi$ . **292.**  $1$ . **293.**  $\operatorname{arctg} 2$ . **294.**  $\frac{1}{4} \ln \frac{4}{e}$ . **295.**  $\frac{5}{6\sqrt{2}}$ .  
**296.**  $\frac{2}{3}$ . **297.**  $\frac{2}{15}$ . **298.**  $\frac{3(e-1)}{e}$ . **299.**  $0$ . **300.**  $\frac{e^2-5}{e}$ . **301.**  $\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln 2$ .  
**302.**  $\frac{2}{15} R^5$ . **303.**  $e - 2$ . **304.**  $\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$ . **305.**  $1$ . **306.**  $\frac{4}{3}$ . **307.**  $\frac{8}{3}$ . **308.**  $\frac{4}{3}$ .  
**309.**  $\frac{2}{3}$ . **310.**  $\frac{1}{3}$ . **311.**  $\frac{1}{6}$ . **312.**  $\frac{1}{2}$ . **313.**  $\frac{\pi-2}{4}$ . **314.**  $2\sqrt{3} - \ln(2 + \sqrt{3})$ .  
**315.**  $\frac{3}{4}$ . **316.**  $\frac{2(e-1)}{\sqrt{e}}$ . **317.**  $\frac{32}{3}$ . **318.**  $\frac{8}{3}$ . **319.**  $12 - 5 \ln 5$ . **320.**  $\frac{3}{2} - 2 \ln 2$ .  
**321.**  $4 \ln(4e)$ . **322.**  $\frac{3\pi}{2} a^2$ . **323.**  $\frac{\pi a^2}{4}$ . **324.**  $\frac{\pi a^2}{4}$ . **325.**  $\frac{9\pi}{2}$ . **326.**  $\frac{a^2(e^{4\pi}-1)}{4}$ .  
**327.**  $\frac{\pi a^2}{4}$ . **328.**  $\frac{\pi a^2}{4}$ . **329.**  $3\pi a^2$ . **330.**  $\frac{\pi a^2}{4}$ . **331.**  $\frac{\pi a^2}{4}$ . **332.**  $\frac{19}{3}$ ,  $\frac{2e-1}{3}$ ,  $a^2$ ,  $2$ ,  $\frac{3\pi a^2}{8}$ ,  $\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$ . **333.**  $\frac{256}{15} \pi$ ,  $8\pi$ . **334.**  $\frac{\pi}{30}$ ,  $\frac{\pi}{6}$ ,  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{5\pi}{6}$ ,  $\frac{11}{30} \pi$ ,  $\frac{19}{30} \pi$ .  
**335.**  $\frac{\pi(e^2-1)}{2}$ ,  $2\pi$ . **336.**  $\frac{128}{5} \pi$ ,  $8\pi$ . **337.**  $\frac{178}{15} \pi$ ,  $\frac{21}{2} \pi$ . **338.**  $\frac{6\pi}{7}$ ,  $\frac{3\pi}{5}$ .  
**339.**  $\frac{4\pi ab^2}{3}$ . **340.**  $\pi(e-2)$ ,  $\frac{\pi(e^2+1)}{2}$ ,  $\pi e$ ,  $\frac{\pi(e^2-3)}{2}$ ,  $\frac{\pi(e^2+5)}{2}$ ,  $\pi(4-e)$ . **341.**  $\frac{\pi^2}{2}$ ,  $2\pi^2$ ,  $6\pi^2$ ,  $2\pi(\pi+2)$ ,  $2\pi(\pi+4)$ ,  $\frac{\pi(8-\pi)}{2}$ ,  $\frac{\pi(\pi+16)}{2}$ . **342.**  $\frac{32\pi}{3}(2\sqrt{2}-1)$ . **343.**  $\frac{2\pi}{15}$ ,  $\frac{\pi}{6}$ . **344.**  $\frac{\pi^2}{8}$ ,  $\frac{\pi}{4}(\pi-2)$ . **345.**  $\frac{\pi^2}{2}$ ,  $10\pi^2$ ,  $6\pi^2$ ,  $\frac{\pi(\pi+16)}{2}$ . **346.**  $\frac{8\pi}{3}$ ,  $\frac{16\pi}{15}$ ,  $\frac{16\pi}{3}$ ,  $\frac{8\pi}{5}$ .  
**347.**  $12\pi$ ,  $24\pi$ . **348.**  $\frac{\pi(\pi+2)}{4}$ ,  $\pi \ln 2$ . **349.**  $\frac{2}{27}(13\sqrt{13}-8)$ . **350.**  $\frac{1}{2} \ln 3$ .  
**351.**  $\frac{670}{27}$ . **352.**  $\frac{28}{3}$ . **353.**  $\frac{a(e^2-1)}{2e}$ . **354.**  $\sqrt{5} + \frac{1}{2} \ln(2 + \sqrt{5})$ . **355.**  $\ln 3$ .

356.  $6a$ .    357.  $8a$ .    358.  $32$ .    359.  $\pi a \sqrt{1 + 4\pi^2} + \frac{a}{2} \ln(2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2})$ .  
360.  $\frac{e^2+1}{4}$ .    361.  $1$ .    362.  $\frac{1}{\alpha-1}$  при  $\alpha > 1$ ; расходится при  $\alpha \leq 1$ .  
363.  $\frac{1}{4} \ln 3$ .    364. Расходится.    365. Расходится.    366. Расходится.  
367.  $-1$ .    368.  $\frac{1}{1-\alpha}$  при  $\alpha < 1$ ; расходится при  $\alpha \geq 1$ .    369.  $\frac{\pi}{2}$ .    370.  $-1$ .  
371.  $2$ .    372. Расходится.    373.  $0$ .    374. Расходится.    375.  $6\sqrt[3]{2}$ .  
376. Расходится.    377. Расходится.    378.  $\frac{1}{2}$ .