Построение графиков функций

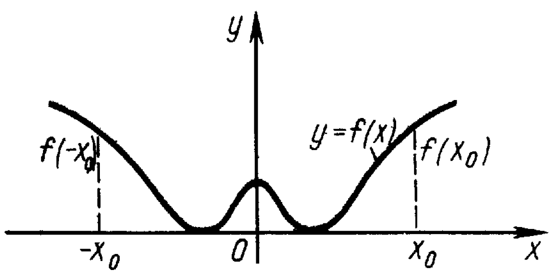
§1. Общие свойства функций

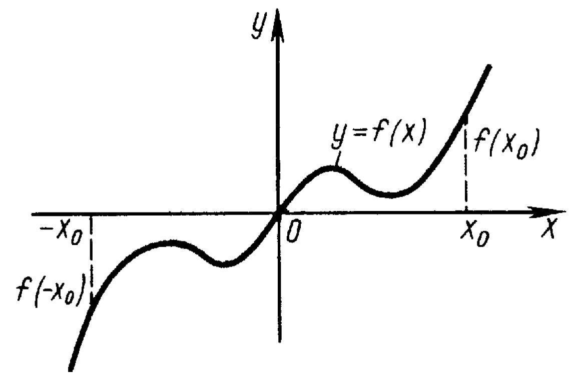
1.1. Чётность и нечётность

Функция $y = f(x)$ называется чётной, если для любого значения x, взятого из области определения функции, значение $-x$ также принадлежит области определения и выполняется равенство $f(x) = f(-x)$.

Чётная функция определена на множестве, симметричном относительно начала координат. График чётной функции симметричен относительно оси ординат (оси Oy, см. левый рисунок).

Примеры чётных функций: $y = x^2$, $y = \sqrt[3]{x^8}$, $y = \ln|x|$, $y = \cos x$.





Функция $y = f(x)$ называется нечётной, если для любого значения x, взятого из области определения функции, значение $-x$ также принадлежит области определения и выполняется равенство $f(x) = -f(-x)$.

График нечётной функции симметричен относительно начала координат (см. правый рисунок).

Примеры нечётных функций: $y = x^3$, $y = \sqrt[3]{x^7}$, $y = \sin x$, $y = x\sqrt{1+x^2}$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \arcsin x$, $y = \operatorname{arctg} x$.

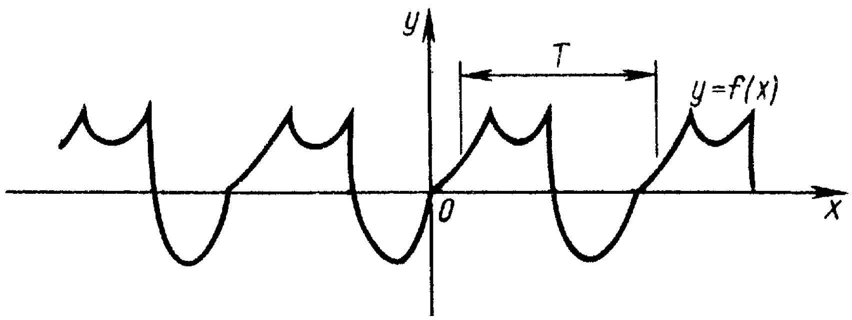
При построении графиков чётных и нечётных функций достаточно построить только правую ветвь графика — для положительных и нулевого значений аргумента. Левая ветвь достраивается симметрично относительно оси ординат для чётной функции и кососимметрично (то есть симметрично относительно начала координат) для нечётной функции.

Отметим, что произведение двух чётных или двух нечётных функций представляет собой чётную функцию, а произведение чётной и нечётной функций — нечётную функцию.

Большинство функций не являются ни чётными, ни нечётными. Таковы, например, функции $y = x^2 - x$, $y = \sqrt[3]{x-2}$, $y = \sin(2x-1)$.

1.2. Периодичность

Функция $y = f(x)$ называется периодической, если существует такое число $T \neq 0$, что для любого значения x, взятого из области определения, значения $x+T$ и $x-T$ также принадлежат области определения и выполняется равенство $f(x) = f(x+T)$.



Число T называется периодом функции. Заметим, что всякая периодическая функция имеет бесконечно много периодов. Действительно, числа вида nT при любом целом $n \neq 0$ также являются периодами функции $f(x)$, так как

$$f(x+nT) = f((x+n-1)T+T) = f(x+(n-1)T) = \ldots = f(x).$$

Иногда периодом называют наименьшее из всех чисел $T > 0$, удовлетворяющее данному выше определению.

Примеры периодических функций: $y = \sin x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = -\sin^3 x$, $y = \ln\cos x$. Периодической является и всякая постоянная функция, причём её периодом служит любое ненулевое число.

Отметим, что периодическую функцию достаточно исследовать в пределах одного периода.

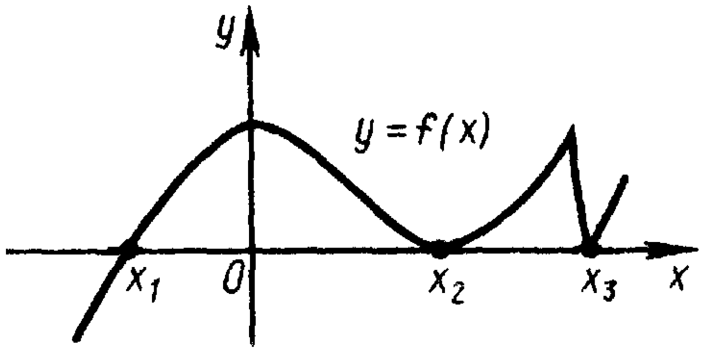
Примеры непериодических функций: $y = x^3$, $y = \operatorname{arcctg} x$, $y = \sin(x^2+1)$.

Функция, не являющаяся ни чётной, ни нечётной, ни периодической называется функцией общего вида.

1.3. Нули функции

Нулём функции $y = f(x)$ называется такое действительное число x, при котором значение функции равно нулю: $f(x) = 0$.

Для того чтобы найти нули функции $y = f(x)$, следует решить уравнение $f(x) = 0$. Нули функции представляют собой абсциссы точек, в которых график этой функции либо пересекает ось абсцисс, либо касается её, либо имеет общую точку с этой осью.

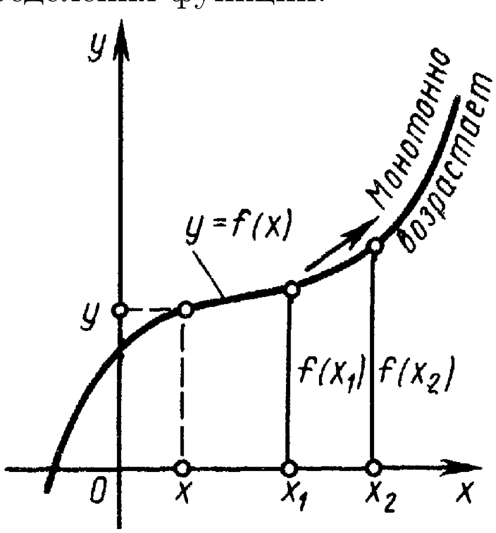


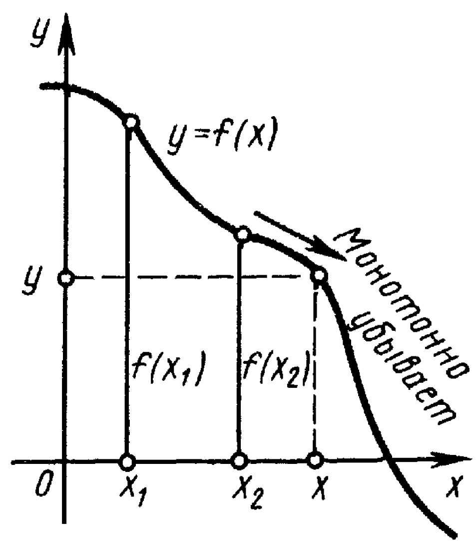
Например, функция $y = x^3 - 3x$ имеет нули в точках $x_1 = 0$, $x_2 = -\sqrt{3}$, $x_3 = \sqrt{3}$, а функция $y = \ln(x - 1)$ имеет нуль в точке $x = 2$.

Функция может и не иметь нулей. Таковы, например, функции $y = 7^x$, $y = \cos x - 2$.

1.4. Монотонность

Функция $y = f(x)$ называется монотонно возрастающей на интервале $(a; b)$, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих этому интервалу, из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) > f(x_1)$. Функция $y = f(x)$ называется монотонно убывающей на интервале $(a; b)$, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих этому интервалу, из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) < f(x_1)$. Интервал $(a; b)$ предполагается взятым из области определения функции.



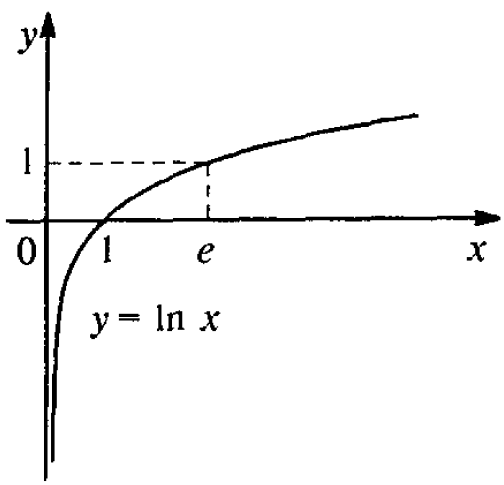


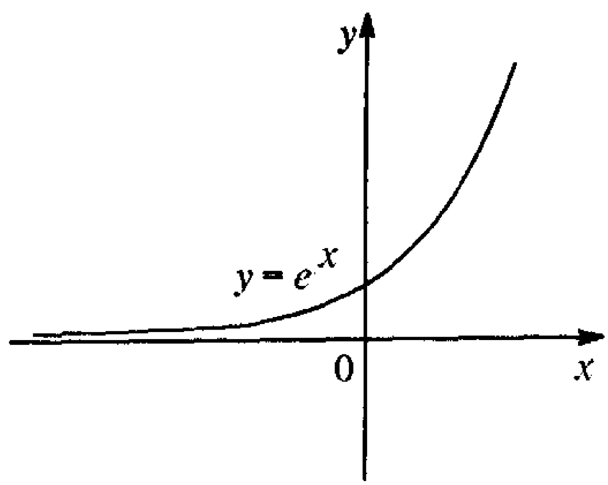
Итак, функцию называют монотонно возрастающей, если с увеличением аргумента значение функции увеличивается (левый рисунок), и монотонно убывающей, если с увеличением аргумента значение функции уменьшается (правый рисунок).

1.5. Понятие обратной функции

Пусть функция $y = f(x)$ задана на отрезке $[a;b]$ и пусть отрезок $[\alpha;\beta]$ является множеством значений этой функции. Пусть, кроме того, каждому y из отрезка $[\alpha;\beta]$ соответствует только одно значение x из отрезка $[a;b]$, для которого $f(x) = y$. Тогда на отрезке $[\alpha;\beta]$ определена функция, которая каждому y из $[\alpha;\beta]$ ставит в соответствие то значение x из $[a;b]$, для которого $f(x) = y$. Эта функция называется обратной для функции $y = f(x)$ и обозначается $x = f^{-1}(y)$.

Например, для функции $y = 8^x$ обратной служит функция $y = \log_8 x$, а для функции $y = \ln x$ — функция $y = e^x$. Отметим, что графики пря-





мой и обратной функций симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

Задачи для самостоятельного решения

Исследовать функцию на чётность м нечётность:

1. $y = \cos x + x \sin x$;

2. $y = x \cdot 2^{-x}$;

3. $y = (x-2)^{\frac{2}{3}} + (x+2)^{\frac{2}{3}}$;

4. $y = 2x \sin^2 x - 3x^3$;

5. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 3^x$;

6. $y = \frac{x}{\sin x}$;

7. $y = 5 \log_2(x+1)$;

8. $y = x \cdot 4^{-x^2}$;

9. $y = \log_2 \frac{2-x}{2+x}$;
10. $y = \frac{3^x+3^{-x}}{3^x-3^{-x}}$;
11. $y = 5^{-x^2}$;
12. $y = x^2 - x$;
13. $y = x^3 + x^2$.

Найти наименьший период функции:

14. $y = \sin 4x$;
15. $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$;
16. $y = \sin x + \cos 2x$;
17. $y = \cos^2 3x$;
18. $y = \sin 3x + \sin 2x$;
19. $y = |\sin x|$;
20. $y = \sin(3x+1)$;
21. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$;
22. $y = \sin^2 \frac{x}{3}$;
23. $y = \left|\cos \frac{x}{2}\right|$.

§2. Непрерывность и точки разрыва функции

2.1. Непрерывность

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если функция определена в некоторой окрестности этой точки (включая саму точку) и предел функции в точке x_0 существует и равен значению функции в самой этой точке, то есть

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = f\left(\lim_{x\to x_0} x\right).$$

Замечание. Приращение непрерывной функции $\triangle f(x) = f(x) - f(x_0)$ стремится к нулю при приращении аргумента $\triangle x$, стремящемся к нулю, то есть

$$\lim_{\triangle x\to 0}(f(x) - f(x_0)) = \lim_{\triangle x\to 0} \triangle y = 0.$$

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной на интервале, если она определена на этом интервале и непрерывна в каждой точке интервала.

Итак, если при постепенном изменении аргумента функции её значение также меняется постепенно, то функция непрерывна. При этом малому изменению аргумента отвечает малое изменение функции.

Геометрически непрерывность функции на интервале означает, что график этой функции на данном интервале есть сплошная линия без скачков и разрывов.

2.2. Классификация точек разрыва

Точка x_0 называется точкой разрыва функции $y = f(x)$, если функция определена в некоторой окрестности точки x_0 (в самой точке x_0 функция может существовать, а может и не существовать), но не является непрерывной в точке x_0.

Точка разрыва x_0 функции $f(x)$ называется точкой разрыва первого рода, если функция $f(x)$ имеет в этой точке конечные левый и правый пределы:

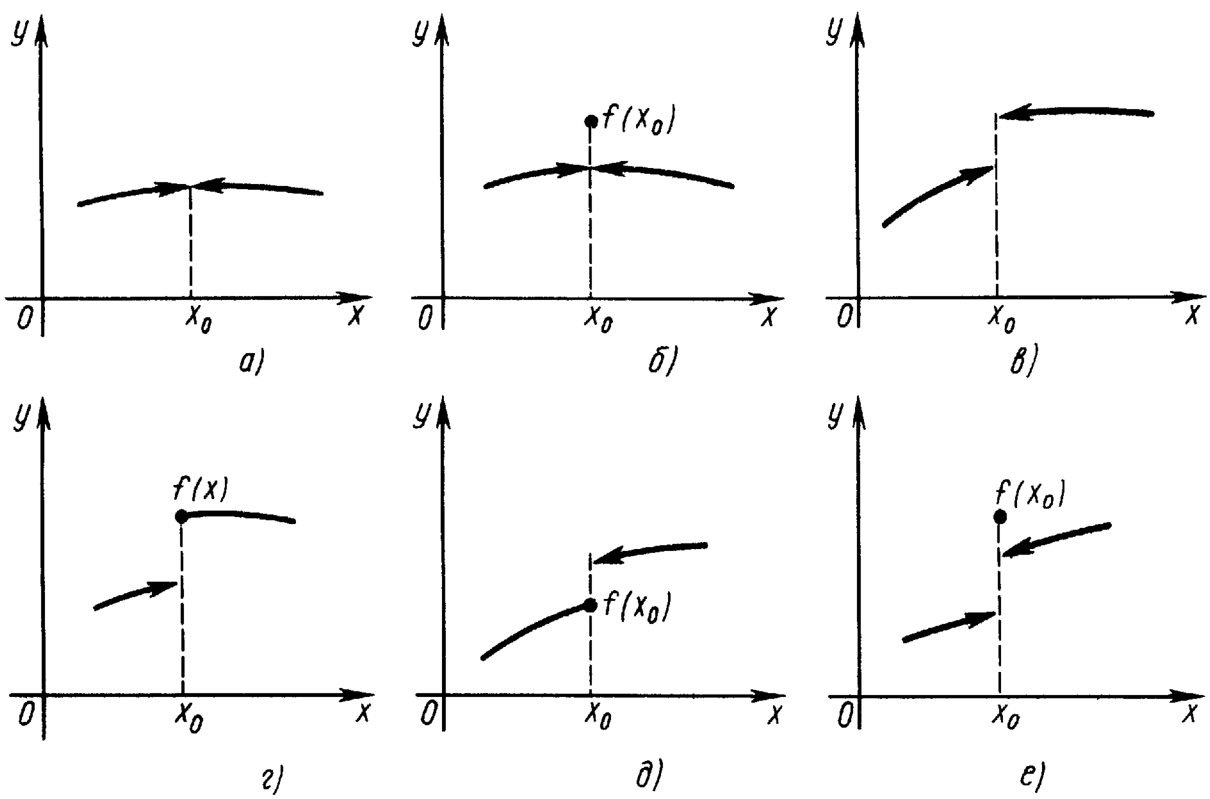
$$\lim_{x\to x_0-} f(x), \qquad \lim_{x\to x_0+} f(x).$$

Точка разрыва первого рода называется точкой устранимого разрыва, если

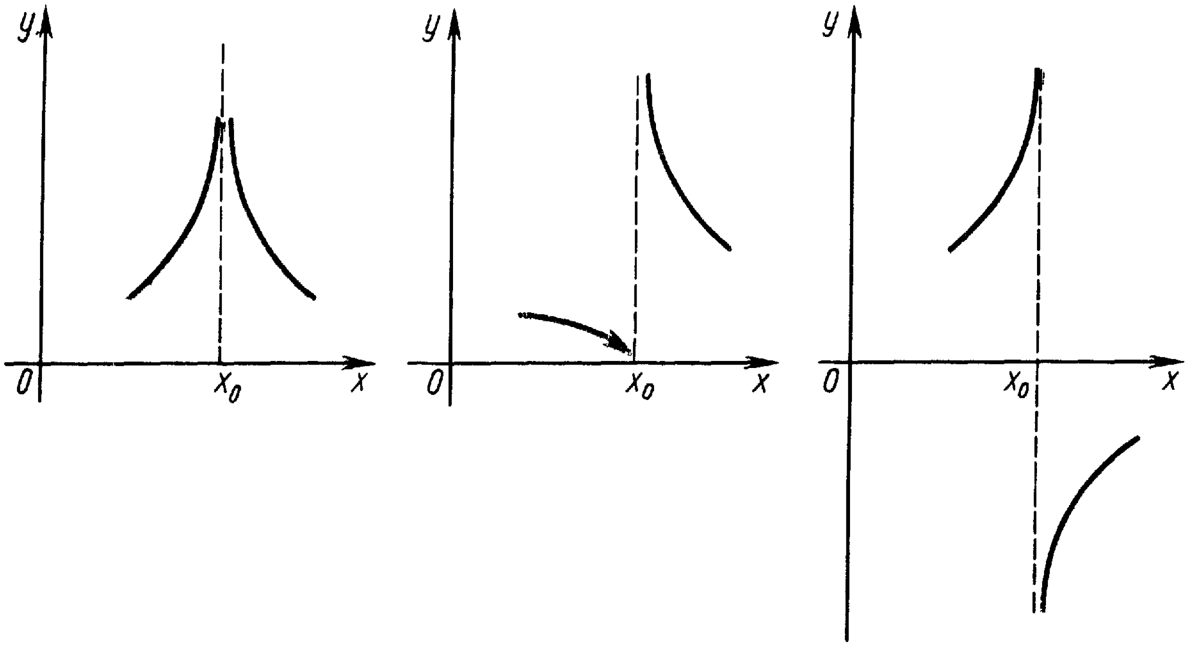
$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = \lim_{x\to x_0+} f(x), \qquad (\,\text{рисунки а) и б)}\,)$$

и точкой скачка, если

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0+} f(x) \qquad (\,\text{рисунки в) — е)}\,).$$



Точка разрыва x_0 функции $f(x)$ называется точкой разрыва второго рода, если в этой точке функция $f(x)$ не имеет, по крайней мере, одного из односторонних пределов, или хотя бы один из односторонних пределов равен бесконечности. На следующих рисунках показаны некоторые (но не все) примеры точек разрыва второго рода.

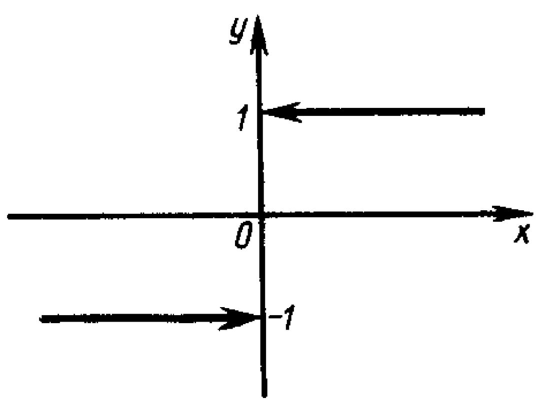


Замечание. Пусть функция $f(x)$ имеет устранимый разрыв в точке x_0. В этом случае, если переопределить (или доопределить) функцию $f(x)$ в точке x_0, полагая $f(x) = \lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$, то функция $f(x)$ станет непрерывной в точке x_0. Если же точка разрыва x_0 функции $f(x)$ не является точкой устранимого разрыва, то подобным образом сделать функцию $f(x)$ непрерывной в точке x_0 нельзя.

Пример 1. Найти и классифицировать точки разрыва функции $\operatorname{sgn} x$.

Решение. Функция $\operatorname{sgn} x$ определяется следующим образом:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ -1 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$



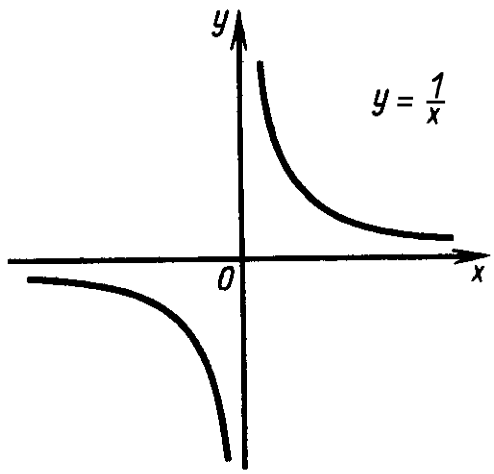
На множествах $x < 0$ и $x > 0$ функция $\operatorname{sgn} x$ непрерывна. В точке $x = 0$ функция не является непрерывной. Точка $x = 0$ является точкой разрыва первого рода (точка скачка), так как существуют конечные (не равные между собой) левый и правый пределы функции $\operatorname{sgn} x$ в этой точке

$$\lim_{x\to 0+} \operatorname{sgn} x = 1, \quad \lim_{x\to 0-} \operatorname{sgn} x = -1, \quad 1 \neq -1.$$

Пример 2. Найти и классифицировать точки разрыва функции $\frac{1}{x}$.

Решение. Функция $\frac{1}{x}$ непрерывна на множествах $x < 0$ и $x > 0$. Точка $x = 0$ является точкой разрыва второго рода, так как

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

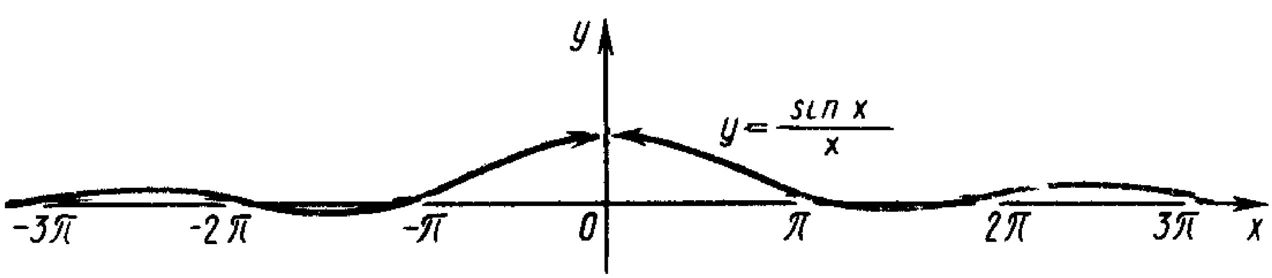


Пример 3. Определить точки разрыва функции $y = \frac{\sin x}{x}$.

Решение. Функция $y = \frac{\sin x}{x}$ непрерывна на всей числовой оси, кроме точки $x = 0$, в которой функция не определена. Поскольку

$$\lim_{x\to 0-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (\text{первый замечательный предел}),$$

то точка $x = 0$ является точкой разрыва первого рода (устранимый разрыв).



Доопределим функцию по непрерывности:

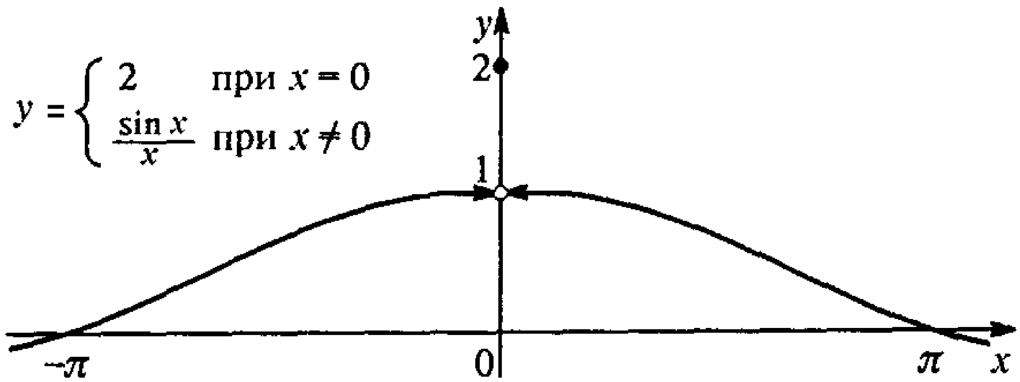
$$y = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 1 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Определённая таким образом функция непрерывна на всей числовой оси.

Если же переопределить функцию следующим образом:

$$y = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 2 & \text{при } x = 0, \end{cases}$$

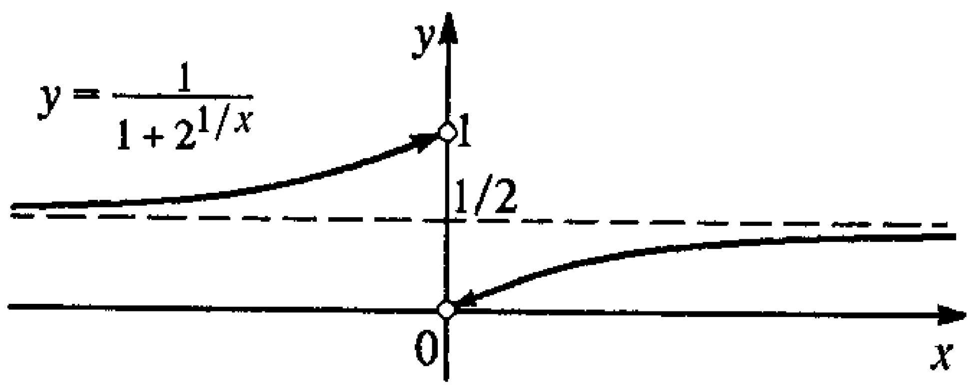
то точка $x = 0$ останется точкой разрыва первого рода (устранимым разрывом), в то же время функция будет всюду определена.



Пример 4. Найти точки разрыва функции $y = \frac{1}{1+2^{1/x}}$.

Решение. Единственной точкой разрыва данной функции является точка $x = 0$. Эта точка является точкой разрыва первого рода (точкой скачка), так как пределы функции слева и справа от точки 0 существуют, но не равны между собой. Действительно,

$$\lim_{x\to 0-} \frac{1}{1+2^{1/x}} = 1, \quad \lim_{x\to 0+} \frac{1}{1+2^{1/x}} = 0.$$



Пример 5. Определить точки разрыва функции $y = \frac{2^{1/x}}{2^{1/x}+1}$.

Решение. Единственной точкой разрыва функции $y = \frac{2^{1/x}}{2^{1/x}+1}$ является точка $x = 0$. В этой точке функция терпит разрыв первого рода (скачок), так как пределы функции слева и справа от точки 0 существуют, но не равны между собой. Действительно,

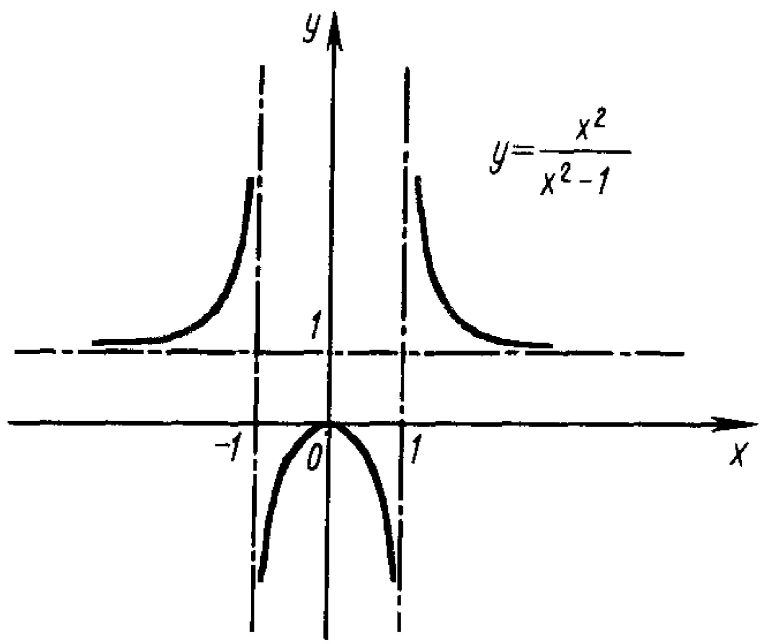
$$\lim_{x\to 0-} \frac{2^{1/x}}{2^{1/x}+1} = 0, \quad \lim_{x\to 0+} \frac{2^{1/x}}{2^{1/x}+1} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{1+\frac{1}{2^{1/x}}} = 1.$$

Пример 6. Определить точки разрыва функции $y = \frac{x^2}{x^2-1}$.

Решение. Точками разрыва функции $y = \frac{x^2}{x^2-1}$ служат точки $x = 1$ и $x = -1$, в которых данная функция не определена. Так как

$$\lim_{x\to 1-} \frac{x^2}{x^2-1} = -\infty, \quad \lim_{x\to 1+} \frac{x^2}{x^2-1} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to -1-} \frac{x^2}{x^2-1} = +\infty, \quad \lim_{x\to -1+} \frac{x^2}{x^2-1} = -\infty,$$

то точки $x = 1$ и $x = -1$ являются точками разрыва второго рода.



Пример 7. Функция

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ \sin\frac{1}{x} & \text{при } x > 0 \end{cases}$$

имеет в точке $x = 0$ разрыв второго рода, поскольку для неё не существует правый предел:

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \sin\frac{1}{x}.$$

Заметим, что левый предел существует и равен нулю:

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} 0 = 0.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти и классифицировать точки разрыва функции:

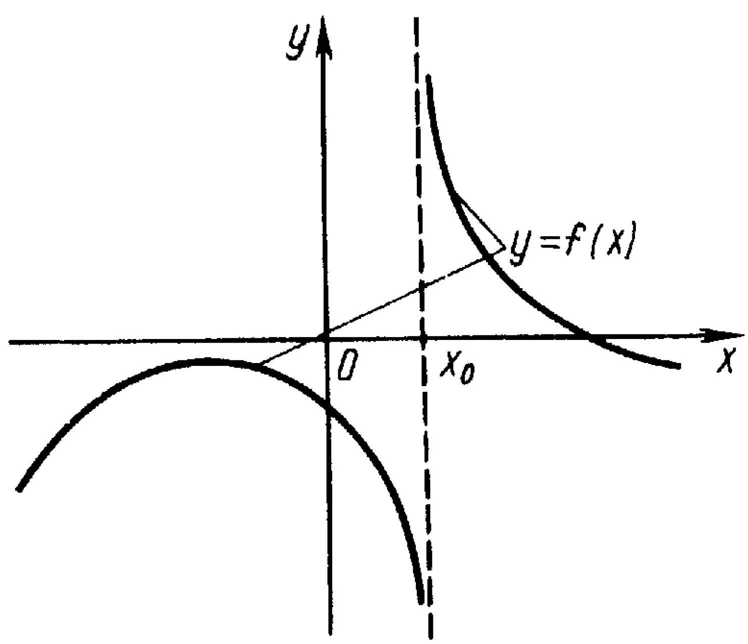
24. $y = -\frac{6}{x}$;

25. $y = 2 - \frac{|x|}{x}$;
26. $y = \frac{1}{1+2^{1/x}}$;
27. $y = \frac{x^3-x^2}{2|x-1|}$;
28. $y = \operatorname{tg} x$;
29. $y = \frac{4}{4-x^2}$;
30. $y = \operatorname{arctg} \frac{2}{x+2}$;
31. $y = 2^{\frac{1}{x-2}}$;
32. $y = 1 - 2^{\frac{1}{x}}$;
33. $y = \frac{x^3+x}{2|x|}$;
34. $y = \frac{4-x^2}{|4x-x^3|}$.

§3. Асимптоты

3.1. Понятие асимптоты

Прямая $x = x_0$ называется вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$ равен $+\infty$ или $-\infty$.



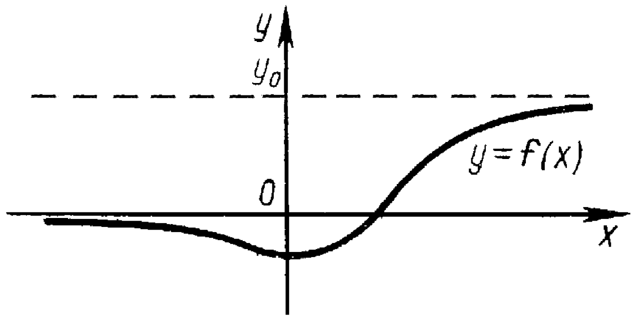
Прямая $y = kx + b$ называется наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$, если $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - (kx + b)) = 0$.

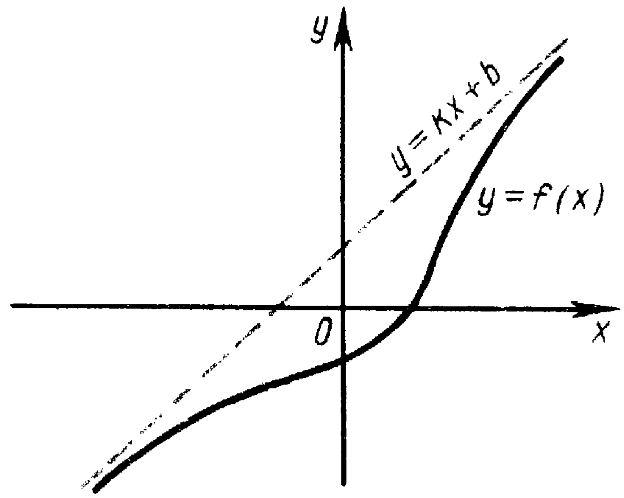
При $k = 0$ наклонная асимптота называется горизонтальной.

Аналогично определяются асимптоты при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$.

Прямая $y = kx + b$ называется асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to -\infty$, если $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0$.

Прямая $y = kx + b$ называется асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, если $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0$.





Пример 1. Найти асимптоты графика функции $y = 4 + \frac{1}{x}$.

Решение. Находим:

$$\lim_{x \to \infty} \left(4 + \frac{1}{x}\right) = 4,$$

поэтому $y = 4$ — горизонтальная асимптота графика данной функции. Далее, так как

$$\lim_{x \to 0+} \left(4 + \frac{1}{x}\right) = +\infty, \quad \lim_{x \to 0-} \left(4 + \frac{1}{x}\right) = -\infty,$$

то $x = 0$ — вертикальная асимптота.

Пример 2. Найти асимптоты графика функции $y = 2^{-x}$.

Решение. Так как

$$\lim_{x \to +\infty} 2^{-x} = 0. \quad \lim_{x \to -\infty} 2^{-x} = +\infty,$$

то ось абсцисс (прямая $y = 0$) является горизонтальной асимптотой графика данной функции при $x \to +\infty$. Вертикальных асимптот нет.

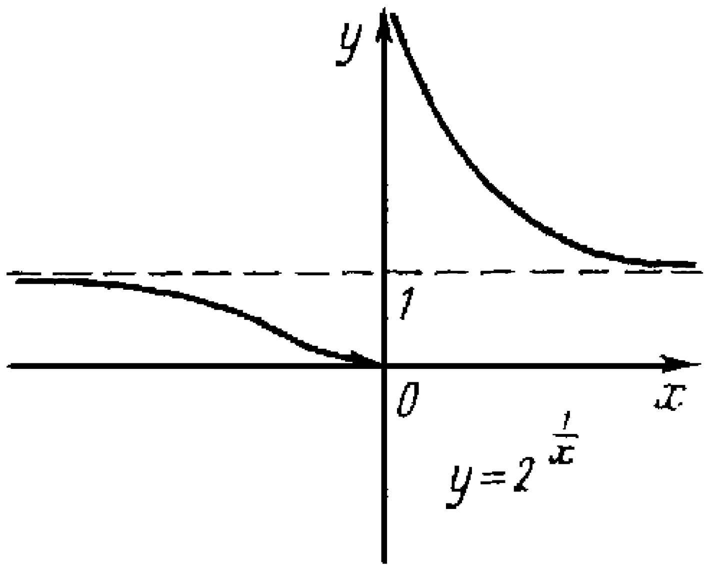
Пример 3. Найти асимптоты графика функции $y = 2^{\frac{1}{x}}$.

Решение.

$$\lim_{x \to \infty} 2^{\frac{1}{x}} = 1,$$

значит, $y = 1$ — горизонтальная асимптота графика функции $y = 2^{\frac{1}{x}}$. Ось ординат (прямая $x = 0$) является вертикальной асимптотой, так как

$$\lim_{x \to 0+} 2^{\frac{1}{x}} = +\infty, \quad \left(\lim_{x \to 0-} 2^{\frac{1}{x}} = 0\right).$$



Пример 4. Найти асимптоты графика функции $y = \frac{\sin x}{x}$.

Решение. Точка $x = 0$ является точкой разрыва первого рода (см. пример 3 §2), поэтому вертикальных асимптот нет. Горизонтальной асимптотой является прямая $y = 0$, так как $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$. Наклонных асимптот нет.

Замечание. Асимптота графика функции может пересекать сам график функции. Более того, асимптота графика функции может бесконечное число раз пересекать сам график функции (см. пример 4).

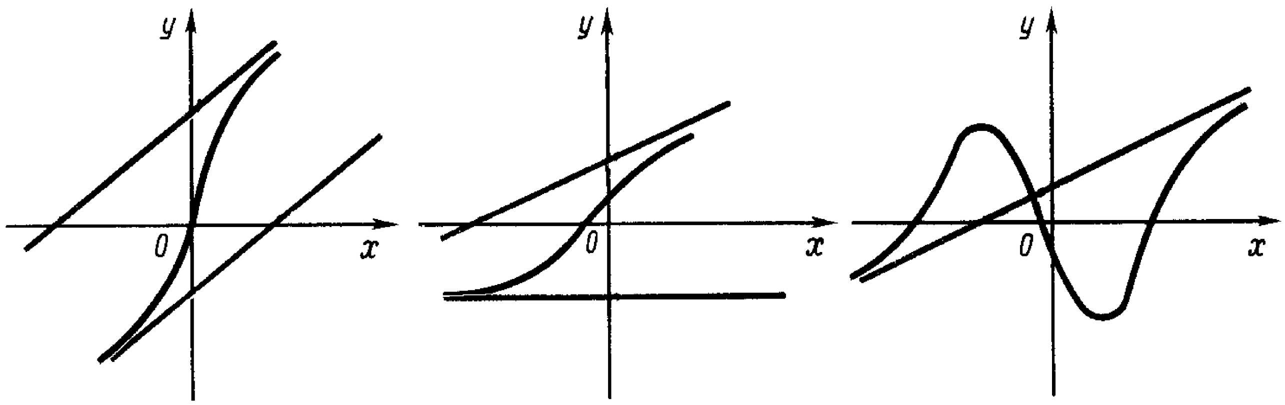
3.2. Нахождение горизонтальных и наклонных асимптот

Горизонтальные и наклонные асимптоты графика функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$ можно находить по следующему алгоритму.

1. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. Если этот предел существует и равен некоторому числу b, то $y = b$ — горизонтальная асимптота. Если предел не существует или равен бесконечности, то перейти ко второму пункту.
2. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$. Если этот предел не существует или равен бесконечности, то асимптоты нет. Если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k$, то перейти к третьему шагу.
3. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - kx)$. Если этот предел не существует или равен бесконечности, то асимптоты нет. Если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - kx) = b$, то перейти к четвёртому шагу.
4. Записать уравнение наклонной асимптоты: $y = kx + b$.

Замечание. Представленный алгоритм позволяет найти прямую, являющуюся асимптотой при $x \to \infty$, то есть и при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$.

На практике функция может иметь разные асимптоты при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$ или иметь асимптоту только при $x \to -\infty$ ($x \to +\infty$). Алгоритм нахождения подобных асимптот остаётся прежним, только пределы надо искать не при $x \to \infty$, а при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$ (по отдельности).

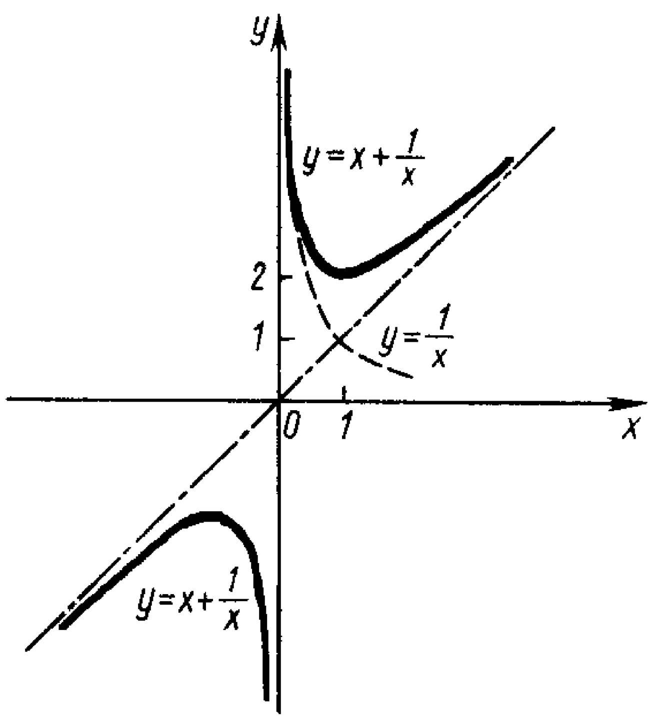


Пример 5. Найти асимптоты графика функции $y = x + \frac{1}{x}$.

Решение. Положим $f(x) = x + \frac{1}{x}$. Так как

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-}\left(x + \frac{1}{x}\right) = -\infty, \quad \lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+}\left(x + \frac{1}{x}\right) = +\infty,$$

то прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой.



Найдём наклонные асимптоты.

1. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(x + \frac{1}{x}\right) = \infty$.

Следовательно, горизонтальных асимптот нет.

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+\frac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1 = k.$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(x + \frac{1}{x} - x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 = b.$

4. Прямая $y = kx + b = 1 \cdot x + 0 = x$ служит наклонной асимптотой графика данной функции.

Пример 6. Найти асимптоты графика функции $y = \frac{x^3-6x^2+3}{2x^2+5}$.

Решение. Положим $f(x) = \frac{x^3-6x^2+3}{2x^2+5}$. Вертикальных асимптот нет. Найдём наклонные асимптоты.

1. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3-6x^2+3}{2x^2+5} = \infty.$

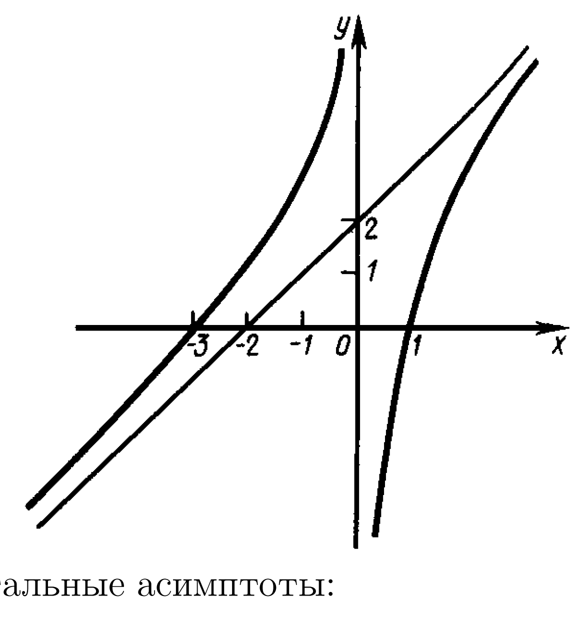
2. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3-6x^2+3}{x(2x^2+5)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3-6x^2+3}{2x^3+5x} = \frac{1}{2} = k.$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^3-6x^2+3}{2x^2+5} - \frac{1}{2}x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{-12x^2-5x+6}{4x^2+10} = \frac{-12}{4} = -3 = b.$

4. Уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y = \frac{1}{2}x - 3$.

Пример 7. Найти асимптоты графика функции $y = \frac{x^2+2x-3}{x}$.

Решение. Положим $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x}$. Находим вертикальные асимптоты. Точка $x = 0$ является точкой разрыва второго рода данной функции, причём $y \to +\infty$ при $x \to 0-$ и $y \to -\infty$ при $x \to 0+$. Следовательно, прямая $x = 0$ — вертикальная асимптота.



Находим горизонтальные асимптоты:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 2x - 3}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(x + 2 - \frac{3}{x}\right) = \infty,$$

следовательно, горизонтальных асимптот нет.

Находим наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x-3}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right) = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+2x-3}{x} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x-3}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(2 - \frac{3}{x}\right) = 2.$$

Следовательно, прямая $y = x + 2$ является наклонной асимптотой графика данной функции при $x \to \infty$, то есть как при $x \to +\infty$, так и при $x \to -\infty$.

Пример 8. Найти асимптоты графика функции $y = \frac{|x|(x-1)}{x+1}$.

Решение. Прямая $x = -1$ — вертикальная асимптота. Далее рассмотрим два случая: $x > 0$ и $x < 0$.

При $x > 0$ получаем $y = \frac{x(x-1)}{x+1}$, поэтому

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(x-1)}{x(x+1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1.$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (y - kx) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x(x-1)}{x+1} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x(x-1) - x(x+1)}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x}{x+1} = -2.$$

Значит, прямая $y = x - 2$ является наклонной асимптотой правой ветви данной функции (то есть при $x \to +\infty$).

При $x < 0$ получаем $y = \frac{-x(x-1)}{x+1}$, поэтому

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x(x-1)}{x(x+1)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-(x-1)}{x+1} = -1.$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} (y - kx) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{-x(x-1)}{x+1} + x\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x(x-1) + x(x+1)}{x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x+1} = 2.$$

Значит, прямая $y = -x + 2$ является наклонной асимптотой левой ветви данной функции (то есть при $x \to -\infty$).

Задачи для самостоятельного решения

Найти асимптоты графика функции:

35. $y = 1 - \frac{4}{x^2}$;

36. $y = \frac{x^2}{x^2+1}$;
37. $y = \frac{2}{|x|} - 1$;
38. $y = \frac{1-4x}{1+2x}$;
39. $y = \frac{x^2+x}{x}$;
40. $y = \frac{x^2}{x+1}$;
41. $y = \frac{x^2-x-1}{x}$;
42. $y = \frac{3-5x}{7x+4}$;
43. $y = \frac{x^3}{x^2+1}$;
44. $y = \frac{4x-x^3}{x^2+4}$;
45. $y = \frac{x^3+x^2-2}{e^{\sin x}}$;
46. $y = x - 2\operatorname{arctg} x$;
47. $y = \operatorname{arctg}\frac{x}{5-x}$;
48. $y = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$;
49. $y = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}$;
50. $y = x - \frac{1}{\sqrt{x}}$;
51. $y = \left(1 - \frac{2}{x}\right)^2$;
52. $y = \frac{1}{x^2} - x$;
53. $y = \frac{x^4+1}{3x^2+1}$;
54. $y = \frac{x-4}{2x+4}$;
55. $y = \frac{x^2}{2-2x}$;
56. $y = \frac{x^2}{x^2-4}$;
57. $y = \frac{x^3}{1-x^2}$.

§4. Интервалы монотонности и точки экстремума функции

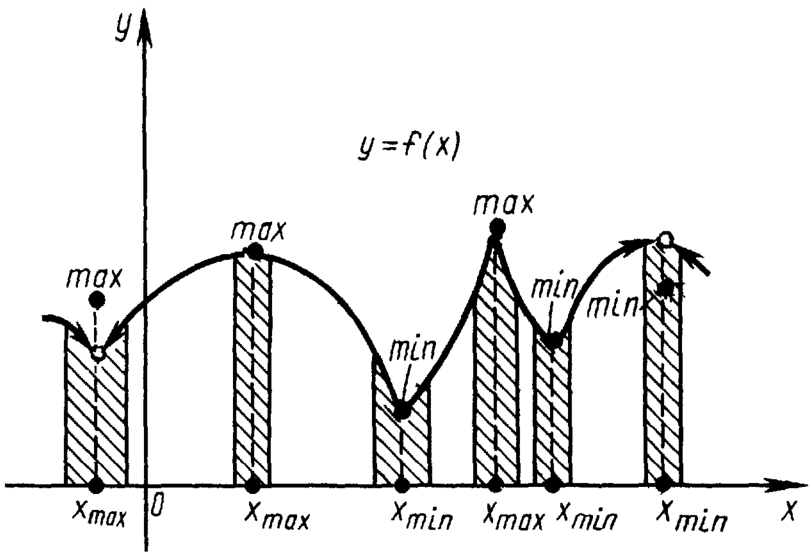
4.1. Экстремумы

Окрестностью точки x_0 называется любой интервал, содержащий эту точку. Проколотой окрестностью точки x_0 называется множество точек некоторой окрестности точки x_0, за исключением самой точки x_0.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$.

Функция $y = f(x)$ имеет локальный максимум в точке $x_0 \in [a; b]$, если существует окрестность точки x_0, целиком содержащаяся в $[a; b]$ и такая, что для любого x, принадлежащего этой окрестности, выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

Функция $y = f(x)$ имеет локальный минимум в точке $x_0 \in [a; b]$, если существует окрестность точки x_0, целиком содержащаяся в $[a; b]$ и такая, что для любого x, принадлежащего этой окрестности, выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.



Итак, точку x_0 называют точкой локального максимума функции $f(x)$, если значение в этой точке больше, чем значения функции в ближайших соседних точках, и точкой локального минимума, если значение в этой точке меньше, чем значения функции в ближайших соседних точках.

Для обозначения максимума или минимума существует общий термин экстремум.

Замечание. Приращение $\triangle f(x) = f(x) - f(x_0)$ в некоторой проколотой окрестности точки экстремума не меняет знак. Оно положительно, если в точке x_0 достигается минимум, и отрицательно, если в точке x_0 — максимум.

4.2. Достаточное условие монотонности функции на интервале

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную на некотором интервале $(a; b)$. Тогда:

1) если $f'(x) > 0$ для всех x из интервала $(a; b)$, то функция $y = f(x)$ монотонно возрастает на нём;

2) если $f'(x) < 0$ для всех x из интервала $(a; b)$, то функция $y = f(x)$ монотонно убывает на нём;

3) если $f'(x) = 0$ для всех x из интервала $(a; b)$, то функция $y = f(x)$ постоянна на нём (принимает одно и то же значение для всех x из интервала $(a; b)$.

Таким образом, для исследования функции на монотонность, необходимо найти производную и определить интервалы, на которых производная положительна (здесь функция монотонно возрастает) и отрицательна (здесь функция монотонно убывает).

Пример 1. Определить интервалы возрастания и убывания функции $y = x^2 e^{-x}$.

Решение. Найдём производную данной функции:

$$y'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = e^{-x}(2x - x^2) = e^{-x}x(2 - x).$$

Рассмотрим интервалы знакопостоянства функции $y'(x)$ и знаки производной на этих интервалах:

$$-\infty < x < 0, \quad y'(x) < 0, \quad \text{функция убывает;}$$
$$0 < x < 2, \quad y'(x) > 0, \quad \text{функция возрастает;}$$
$$0 < x < +\infty, \quad y'(x) < 0, \quad \text{функция убывает.}$$

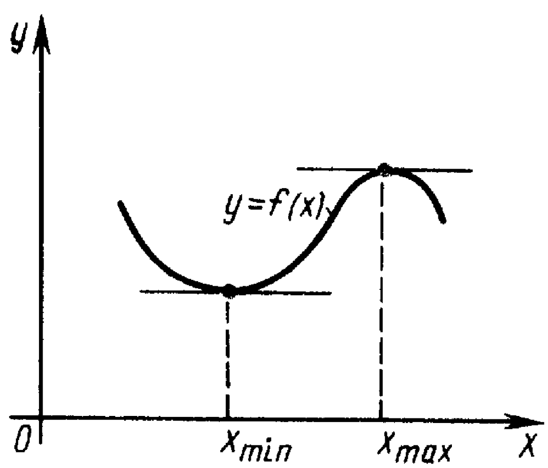
Таким образом, на интервалах $(-\infty; 0)$ и $(2; +\infty)$ функция убывает, а на интервале $(0; 2)$ — возрастает.

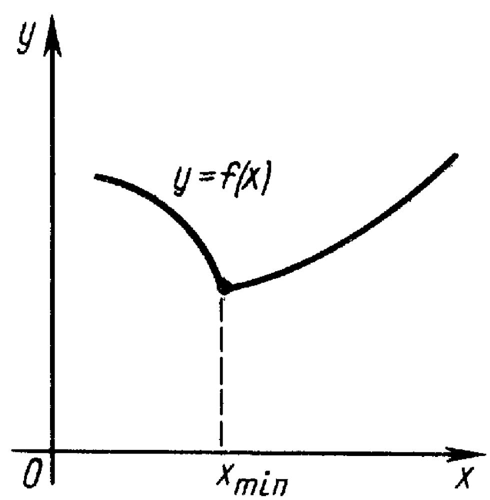
4.3. Необходимое условие существования экстремума (теорема Ферма)

Необходимое условие существования экстремума называется теоремой Ферма.

Если функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет экстремум, то производная $f'(x_0)$ либо равна нулю, либо не существует.

Геометрически это означает, что в точке экстремума касательная к графику функции либо горизонтальна (левый рисунок), либо не существует (правый рисунок).





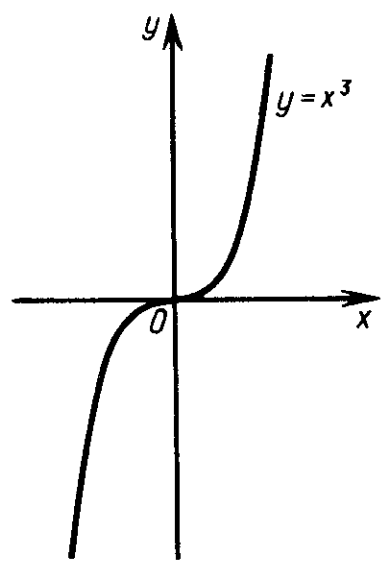
Точки, в которых производная равна нулю или не существует, называются критическими точками (иногда их называют критическими точками первого рода). Точки, в которых производная равна нулю, называются стационарными точками.

Пример 2. Найти стационарные точки функции $y = x^3$.

Решение. Найдём точки, в которых производная функции $y = x^3$ равна нулю:

$$y' = (x^3)' = 3x^2 = 0, \text{ откуда } x = 0.$$

Таким образом, точка $x = 0$ является стационарной точкой функции $y = x^3$, но, тем не менее, в точке $x = 0$ нет экстремума (см. рисунок).

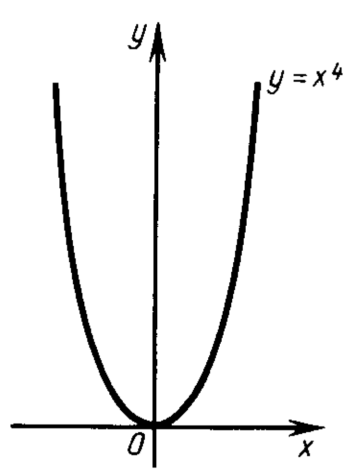


Пример 3. Найти стационарные точки функции $y = x^4$.

Решение. Найдём точки, в которых производная функции $y = x^4$ равна нулю:

$$y' = (x^4)' = 4x^3 = 0, \text{ откуда } x = 0.$$

Таким образом, точка $x = 0$ является стационарной точкой функции $y = x^4$, более того, точка $x = 0$ — точка экстремума (точка минимума, см. рисунок).



Из предыдущих примеров видно, что в критических точках экстремум может существовать, но может и не существовать. Этот вопрос решается с помощью достаточных признаков существования экстремума.

4.4. Первый достаточный признак существования экстремума

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна в некоторой окрестности точки x_0, включая саму точку, и производная $f'(x)$ существует в окрестности этой точки, за исключением, быть может, самой точки x_0. Тогда:

1) если $f'(x) > 0$ (знак "$+$") при $x < x_0$ и $f'(x) < 0$ (знак "$-$") при $x > x_0$, то функция $y = f(x)$ в точке x_0 достигает максимума;

2) если $f'(x) < 0$ (знак "$-$") при $x < x_0$ и $f'(x) > 0$ (знак "$+$") при $x > x_0$, то функция $y = f(x)$ в точке x_0 достигает минимума;

3) если $f'(x)$ не меняет знак, то экстремума нет.

Другими словами, если производная меняет знак в окрестности точки x_0, то в этой точке имеется экстремум.

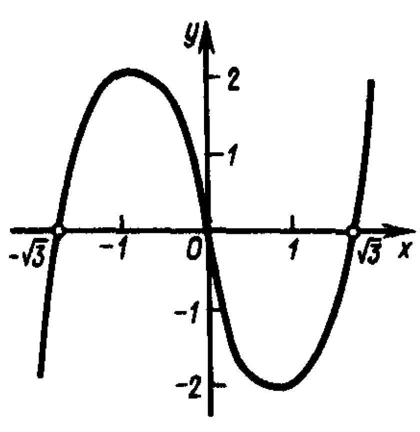
Таким образом, точка максимума отделяет участок монотонного возрастания функции от участка монотонного убывания, а точка минимума — участок монотонного убывания от участка монотонного возрастания (если движение происходит в положительном направлении оси абсцисс).

Пример 4. Найти точки экстремума функции $y = x^3 - 3x$.

Решение. Находим производную:

$$y'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1).$$

Решая уравнение $3(x - 1)(x + 1) = 0$, получаем две точки возможного экстремума: $x = 1$, $x = -1$. При переходе через точку $x = 1$ (слева направо) производная $y'(x)$ меняет знак с "$-$" на "$+$", следовательно, в точке $x = 1$ минимум. При переходе через точку $x = -1$ производная $y'(x)$ меняет знак с "$+$" на "$-$", следовательно, в точке $x = -1$ максимум. Далее находим: $y_{min} = y(1) = -2$, $y_{max} = y(-1) = 2$.



Пример 5. Найти точки экстремума функции $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$.

Решение. Функция дифференцируема на всей числовой прямой, следовательно, искомые точки экстремума содержатся среди корней уравнения $y'(x) = 0$. Вычисляем производную: $y'(x) = x^2 - x^3 = x^2(1-x)$. Находим корни уравнения: $x = 0$, $x = 1$. Рассмотрим знаки производной на интервалах:

$$-\infty < x < 0, \quad y'(x) > 0 \text{ — функция возрастает,}$$
$$0 < x < 1, \quad y'(x) > 0 \text{ — функция возрастает,}$$
$$1 < x < +\infty, \quad y'(x) < 0 \text{ — функция убывает.}$$

При переходе через критическую точку $x = 0$ (слева направо) производная знак не меняет, поэтому точка $x = 0$ не является ни точкой максимума, ни точкой минимума. При переходе через критическую точку $x = 1$ производная меняет знак с "+" на "−". Это означает, что точка $x = 1$ является точкой максимума.

Пример 6. Найти точки экстремума функции $y = x - \sqrt[3]{x^2}$.

Решение. Находим производную:

$$y' = \left(x - x^{\frac{2}{3}}\right)' = 1 - \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = 1 - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{3\sqrt[3]{x} - 2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Находим критические точки функции:

$$y'(x) = 0, \quad 3\sqrt[3]{x} - 2 = 0, \quad \sqrt[3]{x} = \frac{2}{3}, \quad x = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27},$$
$$y'(x) \text{ не существует, когда } 3\sqrt[3]{x} = 0, \quad x = 0.$$

Рассмотрим знаки производной на интервалах:

$$-\infty < x < 0, \quad y'(x) > 0 \text{ — функция возрастает,}$$
$$0 < x < \frac{8}{27}, \quad y'(x) < 0 \text{ — функция убывает,}$$
$$\frac{8}{27} < x < +\infty, \quad y'(x) > 0 \text{ — функция возрастает.}$$

Отсюда получаем, что точка $x = 0$ является точкой максимума, а точка $x = \frac{8}{27}$ — точкой минимума.

4.5. Нахождение интервалов монотонности и точек экстремума

Интервалы монотонности и точки экстремума функции $y = f(x)$ можно находить по следующему алгоритму.

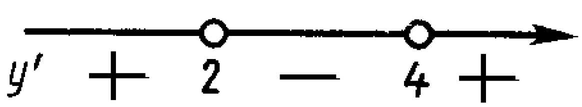
1. Вычислить производную $f'(x)$.
2. Найти критические точки первого рода, то есть точки, в которых $f'(x)$ либо равна нулю, либо не существует (найденные точки разбивают числовую ось на непересекающиеся интервалы).
3. В каждом из получившихся интервалов определить знак производной (можно нарисовать схему). Определить наличие и характер экстремумов.
4. Вычислить значения функции в точках экстремума.

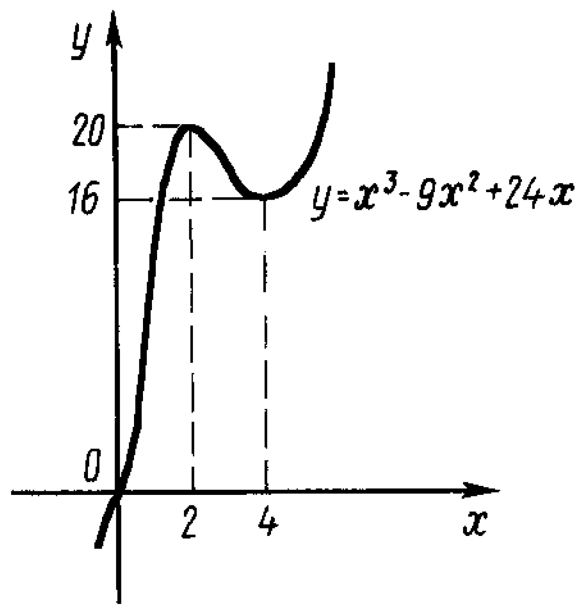
Пример 7. Найти интервалы монотонности и исследовать на экстремум функцию $y = x^3 - 9x^2 + 24x$.

Решение. 1. Имеем $y'(x) = 3x^2 - 18x + 24 = 3(x-2)(x-4)$.

2. Производная равна нулю при $x = 2$ и при $x = 4$. Производная определена всюду, значит, кроме двух найденных точек, других критических точек нет.

3. Знак производной изменяется в зависимости от промежутка так, как показано на левом рисунке. При переходе через точку $x = 2$ производная





меняет знак с "+" на "−", значит $x = 2$ — точка максимума. При переходе через точку $x = 4$ производная меняет знак с "−" на "+", значит $x = 4$ — точка минимума.

4. Находим значения функции в точках экстремума. $y_{max} = y(2) = 20$, $y_{min} = y(4) = 16$. Эскиз графика функции изображён на правом рисунке.

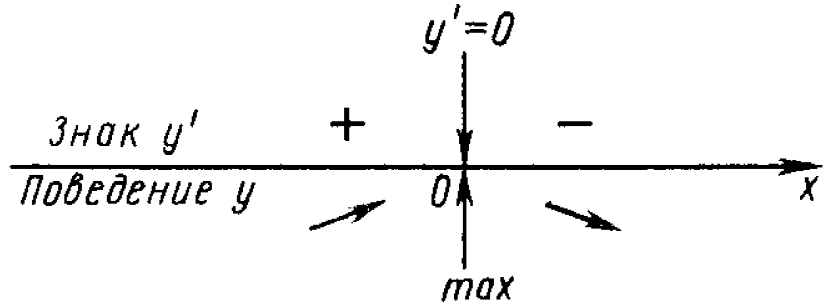
Пример 8. Найти интервалы монотонности и исследовать на экстремум функцию $y = \frac{1}{x^2+1}$.

Решение. 1. Находим производную: $y' = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$.

2. Приравнивая производную нулю, находим критическую точку первого рода: $y' = -\frac{2x}{(x^2+1)^2} = 0$, откуда $x = 0$. Других критических точек нет, так

как производная определена для любого x.

3. Производная $y' = -\frac{2x}{(x^2+1)^2} > 0$ при $x < 0$; $y' < 0$ при $x > 0$. Поэтому на интервале $(-\infty; 0)$ функция монотонно возрастает, а на интервале $(0; +\infty)$ — монотонно убывает. На схеме изображены знаки производной и поведение функции в зависимости от промежутка. Точка $x = 0$ является точкой максимума.



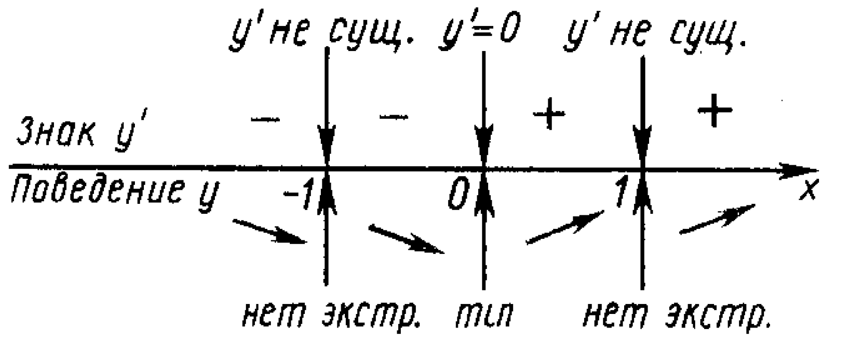
4. Находим значение функции в точке максимума: $y_{max} = y(0) = 1$.

Пример 9. Найти интервалы монотонности и исследовать на экстремум функцию $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$.

Решение. 1. Находим производную: $y' = -\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$.

2. Приравнивая производную нулю, находим критическую точку первого рода: $y' = -\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}} = 0$, откуда $x = 0$. Производная не существует, когда знаменатель обращается в нуль, то есть при $x = -1$ и при $x = 1$. Исходная функция определена при любом x, поэтому имеется три критические точки первого рода: $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$.

3. Рисуем схему и находим интервалы монотонности и точки экстремума. Имеем: $y' > 0$ при $x > 0$, $x \neq 1$; $y' < 0$ при $x < 0$, $x \neq -1$. Поэтому на интервалах $(-\infty; -1)$ и $(-1; 0)$ функция монотонно убывает, а на интервалах $(0; 1)$ и $(1; +\infty)$ — монотонно возрастает. В точке $x = 0$ функция имеет минимум, а в точках $x = -1$ и $x = 1$ экстремума нет.



4. Находим значение функции в экстремальной точке: $y_{min} = y(0) = -1$.

4.6. Второй достаточный признак существования экстремума

Пусть функция $y = f(x)$ имеет в данной критической точке x_0 конечную вторую производную. Тогда, если $f''(x_0) < 0$, то функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 локальный максимум, а если $f''(x_0) < 0$, то функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 локальный минимум.

Пример 10. Исследовать на экстремум функцию $y = x^3 - 9x^2 + 24x$.

Решение. Имеем: $y' = 3x^2 - 18x + 24$. Производная обращается в нуль в точках $x = 2$ и $x = 4$. Далее находим: $y'' = 6x - 18$; $y''(2) = -6 < 0$, $y''(4) = 6 > 0$. Значит, $x = 2$ — точка максимума, а $x = 4$ — точка минимума функции (ср. с решением примера 7).

Пример 11. Выяснить, является ли точка $x = 0$ точкой экстремума функции $y = x^2 \cos x - x^3$.

Решение. Находим производную функции:

$$y' = 2x \cos x - x^2 \sin x - 3x^2, \quad y'(0) = 0.$$

Находим вторую производную функции:

$$y'' = 2 \cos x - 4x \sin x - x^2 \cos x - 6x, \quad y''(0) = 2 > 0.$$

Так как в точке $x = 0$ первая производная равна нулю, а вторая — не равна нулю, то точка $x = 0$ является точкой экстремума. Учитывая ещё, что вторая производная положительна, находим, что $x = 0$ — точка минимума.

4.7. Третий достаточный признак существования экстремума (с помощью производных высшего порядка)

Пусть n — некоторое натуральное число и пусть функция $y = f(x)$ имеет в некоторой окрестности точки x_0 производную порядка $n - 1$, а в самой точке x_0 — производную n-го порядка. Пусть в точке x_0 выполняются следующие соотношения:

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Тогда:

1) если n — чётное число, то функция $y = f(x)$ имеет локальный экстремум в точке x_0, а именно: максимум при $f^{(n)}(x_0) < 0$ и минимум при $f^{(n)}(x_0) > 0$;

2) если n — нечётное число, то функция $y = f(x)$ не имеет экстремума в точке x_0.

Пример 12. Исследовать на экстремум функцию $y = x^3$.

Решение. Находим: $y'(x) = 3x^2$, отсюда, возможная точка экстремума — $x = 0$ (см. пример 2). Далее,

$$y''(x) = 6x, \quad y''(0) = 0; \quad y'''(x) = y'''(0) = 6 > 0.$$

Итак, первая и вторая производные функции в точке $x = 0$ равны нулю, а третья — не равна нулю, следовательно, $x = 0$ не является точкой экстремума (3 — нечётное число).

Пример 13. Исследовать на экстремум функцию $y = x^4$.

Решение. Находим: $y'(x) = 4x^3$, отсюда, возможная точка экстремума — $x = 0$ (см. пример 3). Далее,

$$y''(x) = 12x^2,\ y''(0) = 0;\ y'''(x) = 24x,\ y'''(0) = 0;\ y^{(4)}(x) = y^{(4)}(0) = 24 > 0.$$

Получили, что первая, вторая и третья производные функции в точке $x = 0$ равны нулю, а четвёртая — не равна нулю, следовательно, $x = 0$ является точкой экстремума (4 — чётное число). Так как $y^{(4)}(0) > 0$, то $x = 0$ — точка минимума.

Пример 14. Выяснить, является ли точка $x = 0$ точкой экстремума функции

$$y = -\frac{x^6}{2} + x^2\left(e^{x^4} - 1\right).$$

Решение. Последовательно находим производные функции:

$$y'(x) = -3x^5 + 2x\left(e^{x^4} - 1\right) + 4x^5e^{x^4}, \quad y'(0) = 0;$$

$$y''(x) = -15x^4 + 2\left(e^{x^4} - 1\right) + 28x^4e^{x^4} + 16x^8e^{x^4}, \quad y''(0) = 0;$$

$$y'''(x) = -60x^3 + 120x^3e^{x^4} + 112x^7e^{x^4} + \ldots, \quad y'''(0) = 0;$$

$$y^{(4)}(x) = -180x^2 + 360x^2e^{x^4} + \ldots, \quad y^{(4)}(0) = 0;$$

$$y^{(5)}(x) = -360x + 720xe^{x^4} + \ldots, \quad y^{(5)}(0) = 0;$$

$$y^{(6)}(x) = -360 + 720e^{x^4} + \ldots, \quad y^{(6)}(0) = 360.$$

Так как $y^{(6)}(0) = 360 > 0$ и число 6 чётное, то точка $x = 0$ является точкой минимума данной функции.

4.8. Нахождение наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на отрезке

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$. Тогда на этом отрезке она достигает своих наибольшего и наименьшего значений.

Наибольшее и наименьшее значения на отрезке непрерывной функции могут достигаться как внутри отрезка, так и на его концах. Если своего наибольшего или наименьшего значения функция достигает во внутренней точке отрезка, то такая точка является точкой экстремума.

Находить наибольшее и наименьшее значения на отрезке $[a;b]$ непрерывной функции $y=f(x)$ удобно по следующей схеме.

1. Найти производную $f'(x)$.
2. Найти точки, в которых $f'(x)=0$ или не существует, и отобрать из них те, которые лежат внутри отрезка $[a;b]$.
3. Вычислить значения функции $y=f(x)$ в точках, полученных во втором пункте, а также на концах отрезка и выбрать из них наибольшее и наименьшее: они и являются соответственно наибольшим и наименьшим значениями функции $y=f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Пример 15. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3-3x^2-45x+225$ на отрезке $[0;6]$.

Решение. 1. Находим производную: $y'=3x^2-6x-45$.

2. Производная y' существует при всех x. Найдём точки, в которых $y'=0$, получим:

$$3x^2-6x-45=0, \quad x^2-2x-15=0, \quad x=-3,\ x=5.$$

Отрезку $[0;6]$ принадлежит только точка $x=5$.

3. Вычисляем значения функции в точках $x=0$, $x=5$, $x=6$:

$$y(0)=225, \quad y(5)=50, \quad y(6)=63.$$

Наибольшим из найденных значений функции является число 225 (достигается при $x=0$), а наименьшим — число 50 (достигается при $x=5$).

Пример 16. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3-2x|x-2|$ на отрезке $[0;3]$.

Решение. Рассмотрим функцию отдельно на множествах $[0;2]$ и $[2;3]$.

Если $x\in[0;2]$, то $|x-2|=-(x-2)$, и данная функция может быть записана в виде $y=x^3+2x^2-4x$. Находим производную: $y'=3x^2+4x-4$. Корнями уравнения $3x^2+4x-4=0$ являются числа $x=-2$, $x=\frac{2}{3}$. Корень $x=-2\notin[0;2]$, а корень $x=\frac{2}{3}\in[0;2]$. Значит, наибольшее и наименьшее значения данной функции на отрезке $[0;2]$ находятся среди чисел: $y(0)$, $y\left(\frac{2}{3}\right)$ и $y(2)$.

Если $x\in[2;3]$, то $|x-2|=x-2$, и данная функция может быть записана в виде $y=x^3-2x^2+4x$. Находим производную:

$$y'=3x^2-4x+4=3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{8}{3}>0 \text{ при любом } x.$$

Так как функция $y = x^3 - 2x^2 + 4x$ непрерывна на отрезке $[2; 3]$ и $y'(x) > 0$ на интервале $(2; 3)$, то эта функция возрастает на отрезке $[2; 3]$. Следовательно, наибольшее значение данной функции на отрезке $[2; 3]$ есть $y(3)$, а наименьшее значение — $y(2)$.

Теперь находим наибольшее и наименьшее значения функции на всём отрезке $[0; 3]$. Для этого вычисляем значения:

$$y(0) = 0, \quad y\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{40}{27}, \quad y(2) = 8, \quad y(3) = 21.$$

Таким образом, наибольшее значение данной функции на отрезке $[0; 3]$ есть $y(3) = 21$, а наименьшее значение функции равно $y\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{40}{27}$.

Задачи для самостоятельного решения

Найти наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке:

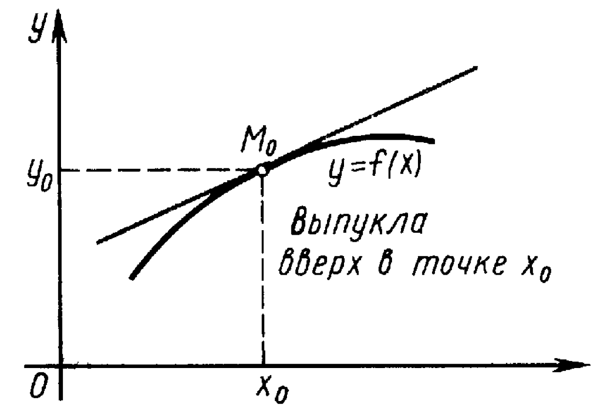
58. $y = 2x - 1$, $[0; 1]$;
59. $y = x^2 - 6x + 8$, $[1; 4]$;
60. $y = 3x^3 - 4x + 8$, $[-1; 1]$;
61. $y = 3x^4 + 4x^3 + 1$, $[0; 1]$;
62. $y = 3x^4 + 4x^3 + 1$, $[-2; 1]$;
63. $y = \sin x + 2x$, $[-\pi; \pi]$;
64. $y = \sin^2 x$, $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{2\pi}{3}\right]$;
65. $y = \sin x - x - \frac{x^3}{3}$, $[0; \pi]$;
66. $y = \frac{1}{x} + x$, $[0,1; 10]$;
67. $y = \frac{x}{x - x^2 - 1}$, $[-2; 2]$;
68. $y = x \ln x - x$, $\left[\frac{1}{e}; e\right]$.

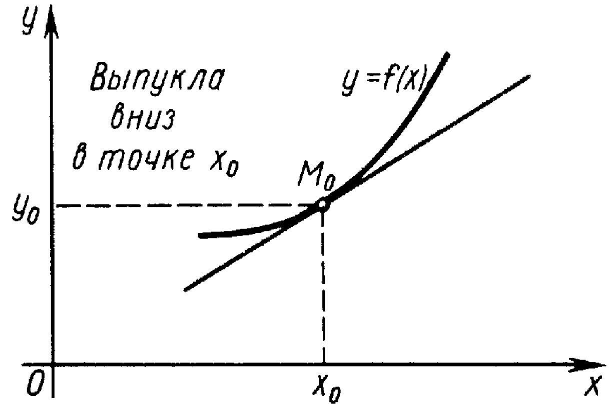
§5. Интервалы выпуклости и точки перегиба функции

5.1. Выпуклость вверх и вниз

Функция $y = f(x)$ выпукла вверх в точке x_0, если существует окрестность точки x_0 такая, что для всех её точек x касательная к графику функции в точке $M(x_0; y_0)$ лежит выше графика.

Функция $y = f(x)$ выпукла вниз в точке x_0, если существует окрестность точки x_0 такая, что для всех её точек x касательная к графику функции в точке $M(x_0; y_0)$ лежит ниже графика.



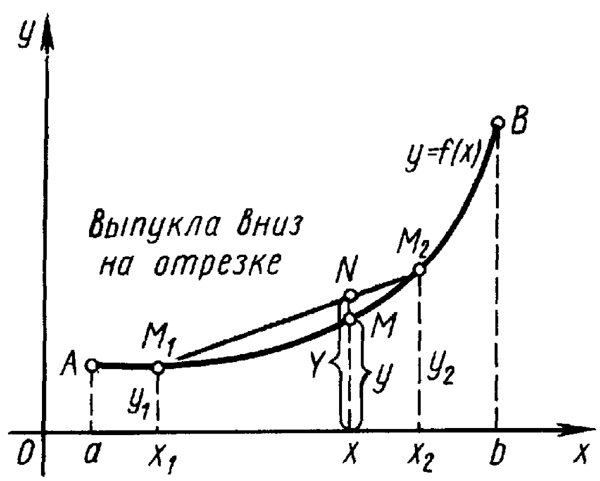


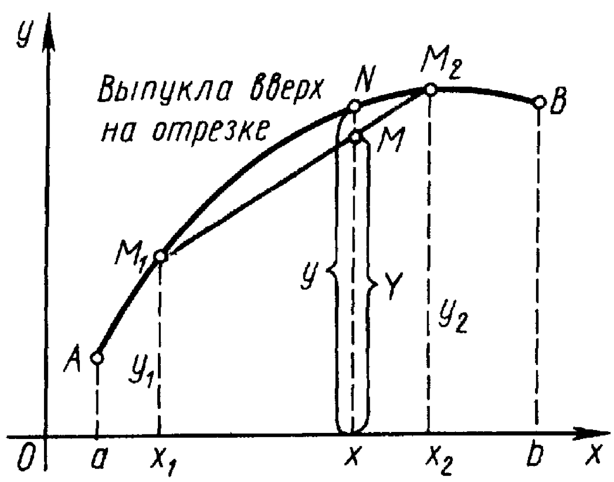
Если на некотором интервале $(a; b)$ все касательные к графику функции $y = f(x)$ лежат выше самого графика, то на данном интервале функция выпукла вверх. Если на некотором интервале $(a; b)$ все касательные к графику функции $y = f(x)$ лежат ниже самого графика, то на данном интервале функция выпукла вниз.

Замечание. Иногда, функцию $y = f(x)$, выпуклую вверх на интервале $(a; b)$, называют вогнутой, а выпуклую вниз — выпуклой (без слова вниз) на интервале $(a; b)$.

Понятие выпуклости функции на промежутке можно ввести, не требуя существования касательной в каждой точке графика.

Выпуклая вверх на отрезке функция характеризуется тем, что все точки любой дуги её графика расположены над соответствующей хордой. Выпуклая вниз на отрезке функция характеризуется тем, что все точки любой дуги её графика расположены под соответствующей хордой.





5.2. Достаточное условие выпуклости функции на интервале

Если вторая производная $f''(x)$ функции $f(x)$ существует на интервале $(a; b)$ и не меняет знак на интервале $(a; b)$, то:

1) при $f''(x) > 0$ (знак “+”) функция $f(x)$ выпукла вниз на интервале $(a; b)$;

2) при $f''(x) < 0$ (знак "$-$") функция $f(x)$ выпукла вверх на интервале $(a; b)$.

Таким образом, для нахождения интервалов выпуклости вверх и выпуклости вниз функции $f(x)$ нужно найти вторую производную функции и решить неравенства $f''(x) < 0$ и $f''(x) > 0$.

Пример 1. Найти интервалы выпуклости функции $y = (x^2 - 4x + 3)^2$.

Решение. Находим вторую производную: $y'' = 12\left(x^2 - 4x + \frac{11}{3}\right)$. Решаем неравенства $y'' > 0$ и $y'' < 0$. Имеем:

$$y'' > 0 \text{ или } 12\left(x^2 - 4x + \frac{11}{3}\right) > 0, \text{ откуда } x < 2 - \frac{1}{\sqrt{3}},\ x > 2 + \frac{1}{\sqrt{3}};$$

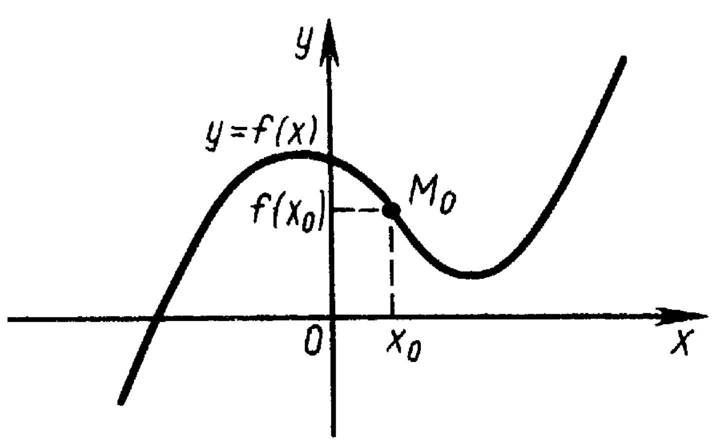
$$y'' < 0 \text{ или } 12\left(x^2 - 4x + \frac{11}{3}\right) < 0, \text{ откуда } 2 - \frac{1}{\sqrt{3}} < x < 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Таким образом, на интервалах $\left(-\infty; 2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ и $\left(2 + \frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$ функция выпукла вниз, а на интервале $\left(2 - \frac{1}{\sqrt{3}}; 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ функция выпукла вверх.

Замечание. Вместо решения неравенств $f''(x) < 0$ и $f''(x) > 0$ удобно вычислять значения $f''(x)$ в отдельных точках, взяв по произвольной точке из каждого интервала знакопостоянства функции $f''(x)$.

Точка $M_0(x_0; f(x_0))$ графика функции $y = f(x)$ называется точкой перегиба этого графика, если существует такая окрестность точки x_0, в пределах которой график функции $y = f(x)$ слева и справа от M_0 имеет разные направления выпуклости.

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, имеющий перегиб в точке $M_0(x_0; f(x_0))$.



Пример 2. Найти точки перегиба функции $y = (x^2 - 4x + 3)^2$.

Решение. В примере 1 для данной функции найдены интервалы выпуклости вверх и вниз. Для точек $x = 2 - \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $x = 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}$ существуют окрестности, в пределах которых график функции имеет разные направления выпуклости слева и справа от данных точек. Следовательно, точки $x = 2 - \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $x = 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}$ являются точками перегиба исходной функции.

5.3. Необходимый признак существования точки перегиба

Если функция в точке x_0 имеет перегиб, то вторая производная в этой точке либо не существует, либо равна нулю.

Точки, в которых вторая производная обращается в нуль или не существует, называют критическими точками второго рода.

Пример 3. Найти критические точки второго рода функции $y = x^3$.

Решение. Вычисляем вторую производную функции $y = x^3$: $y'' = 6x$. Приравниваем вторую производную нулю и находим, что $x = 0$ — критическая точка второго рода. Отметим, что точка $x = 0$ является точкой перегиба функции $y = x^3$ (см. график функции в примере 2 §4).

Пример 4. Найти критические точки второго рода функции $y = x^4$.

Решение. Вычисляем вторую производную функции $y = x^4$: $y'' = 12x^2$. Приравниваем вторую производную нулю и находим, что $x = 0$ — критическая точка второго рода. Отметим, что точка $x = 0$ не является точкой перегиба функции $y = x^4$ (см. график функции в примере 3 §4).

Из предыдущих примеров видно, что критическая точка второго рода может быть точкой перегиба, а может и не быть. Этот вопрос решается с помощью достаточных признаков существования точки перегиба.

5.4. Достаточный признак существования точки перегиба

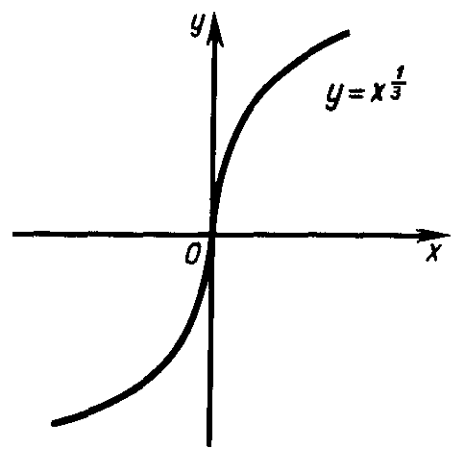
Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в некоторой окрестности точки x_0, включая саму точку. Пусть, далее, вторая производная в этой точке равна нулю или не существует. Тогда, если $f''(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f''(x) > 0$ при $x > x_0$ или $f''(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f''(x) < 0$ при $x > x_0$, то точка $M_0(x_0; f(x_0))$ является точкой перегиба функции $y = f(x)$.

Пример 5. Найти точки перегиба функции $y = x^3 - 3x^2$.

Решение. Находим вторую производную функцию: $y''(x) = 6x$. Из уравнения $6x = 0$ получаем одну критическую точку второго рода: $x = 0$. Исследуем знак $y''(x)$ в окрестности этой точки. Слева от точки $x = 0$ выполнено $y''(x) < 0$ (выпуклость графика направлена вверх), а справа — $y''(x) > 0$ (выпуклость графика направлена вниз), то есть точка $x = 0$ является точкой перегиба рассматриваемой функции (см. рисунок в примере 4 §4).

Пример 6. Найти точки перегиба функции $y = x^{\frac{1}{3}}$.

Решение. Эта функция в точке $x = 0$ имеет бесконечную производную, а касательная к графику функции в точке $(0; 0)$ совпадает с ось Oy. Вторая производная в точке $x = 0$ не существует. График функции $y = x^{\frac{1}{3}}$ имеет перегиб в точке $(0; 0)$, так как вторая производная $y''(x) = \frac{2}{9^{5/3}}$ имеет слева и справа от точки $x = 0$ разные знаки.



Пример 7. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции $y = x^2 + \sqrt[3]{x^2}$.

Решение. Найдём вторую производную функции:

$$y'(x) = 2x + \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}, \quad y''(x) = 2 - \frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}} = 2\left(1 - \frac{1}{9x\sqrt[3]{x}}\right);$$

$$y''(x) = 0 \text{ при } x = \frac{1}{\sqrt{27}} \text{ и } x = -\frac{1}{\sqrt{27}};$$

$$y''(x) \text{ не существует при } x = 0.$$

Определим интервалы выпуклости вверх и вниз:

$$-\infty < x < -\frac{1}{\sqrt{27}}, \quad y''(x) > 0, \quad \text{функция выпукла вниз;}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{27}} < x < 0, \quad y''(x) < 0, \quad \text{функция выпукла вверх;}$$

$$0 < x < \frac{1}{\sqrt{27}}, \quad y''(x) < 0, \quad \text{функция выпукла вверх;}$$

$$\frac{1}{\sqrt{27}} < x < +\infty, \quad y''(x) > 0, \quad \text{функция выпукла вниз.}$$

Таким образом, на интервалах $\left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{27}}\right)$ и $\left(\frac{1}{\sqrt{27}}; +\infty\right)$ функция выпукла вниз, а на интервалах $\left(-\frac{1}{\sqrt{27}}; 0\right)$ и $\left(0; \frac{1}{\sqrt{27}}\right)$ — выпукла вверх.

В точках $x = -\frac{1}{\sqrt{27}}$ и $x = \frac{1}{\sqrt{27}}$ вторая производная меняет знак, значит эти точки являются точками перегиба данной функции. Точка $x = 0$ не является точкой перегиба, так как вторая производная не меняет знак при переходе через эту точку ($y''(x) < 0$ и слева и справа от точки $x = 0$).

5.5. Достаточный признак существования точки перегиба (с помощью производных высшего порядка)

Пусть n — некоторое натуральное число и пусть функция $y = f(x)$ имеет в некоторой окрестности точки x_0 производную порядка $n-1$, а в самой точке x_0 — производную n-го порядка. Пусть в точке x_0 выполняются следующие соотношения:

$$f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Тогда:

1) если n — нечётное число, то точка x_0 является точкой перегиба функции $y = f(x)$;

2) если n — чётное число, то точка x_0 не является точкой перегиба функции $y = f(x)$.

Пример 8. Найти точки перегиба функции $y = x^3$.

Решение. Находим: $y''(x) = 6x$, отсюда, возможная точка перегиба — $x = 0$ (см. пример 3). Далее, $y'''(x) = y'''(0) = 6 \neq 0$.

Итак, вторая производная функции в точке $x = 0$ равна нулю, а третья — не равна нулю, следовательно, $x = 0$ является точкой перегиба (3 — нечётное число).

Пример 9. Найти точки перегиба функции $y = x^4$.

Решение. Находим: $y''(x) = 12x^2$, отсюда, возможная точка перегиба — $x = 0$ (см. пример 4). Далее,

$$y'''(x) = 24x, \quad y'''(0) = 0; \quad y^{(4)}(x) = y^{(4)}(0) = 24 \neq 0.$$

Итак, вторая и третья производные функции в точке $x = 0$ равны нулю, а четвёртая — не равна нулю, следовательно, $x = 0$ является точкой перегиба (4 — чётное число).

5.6. Нахождение интервалов выпуклости и точек перегиба

Алгоритм применения второй производной для нахождения интервалов выпуклости вверх и вниз и точек перегиба полностью аналогичен алгоритму нахождения экстремумов и интервалов монотонности, только вместо первой производной рассматривается вторая производная.

1. Вычислить производную $f''(x)$.

2. Найти критические точки второго рода, то есть точки, в которых $f''(x)$ либо равна нулю, либо не существует (найденные точки разбивают числовую ось на непересекающиеся интервалы).
3. В каждом из получившихся интервалов определить знак второй производной (можно нарисовать схему). Определить интервалы выпуклости и наличие точек перегиба.
4. Найти ординаты точек перегиба.

Пример 10. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции $y = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 12$.

Решение. 1. Находим вторую производную:

$$y''(x) = 36x^2 - 48x + 12 = 36(x-1)\left(x - \frac{1}{3}\right).$$

2. Вторая производная определена при любом x и обращается в нуль при $x = 1$ и при $x = \frac{1}{3}$. Следовательно, имеются две критические точки второго рода: $x = 1$ и $x = \frac{1}{3}$.

3. Знаки второй производной меняются следующим образом: на интервале $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ имеем $y''(x) > 0$, на интервале $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$ имеем $y''(x) < 0$, на интервале $(1; +\infty)$ имеем $y''(x) > 0$.

Функция выпукла вверх на интервале $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$ и выпукла вниз на интервалах $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ и $(1; +\infty)$. При переходе через точки $x = \frac{1}{3}$ и $x = 1$ направление выпуклости функции меняется, следовательно точки $x = \frac{1}{3}$ и $x = 1$ являются точками перегиба данной функции.

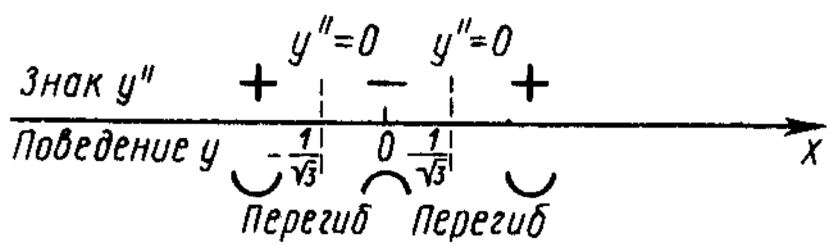
4. Находим ординаты точек перегиба: $y\left(\frac{1}{3}\right) = 12\frac{11}{27}$, $y(1) = 13$.

Пример 11. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции $y = \frac{1}{x^2+1}$.

Решение. 1. Находим вторую производную: $y'' = \frac{2(3x^2-1)}{x^2+1)^3}$.

2. Вторая производная определена при любом x, она обращается в нуль при $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Найденный точки являются критическими точками второго рода.

3. Решаем неравенства $y'' > 0$ и $y'' < 0$. Имеем: $y'' > 0$ или $\frac{2(3x^2-1)}{x^2+1)^3} > 0$, откуда $x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x > \frac{1}{\sqrt{3}}$; $y'' < 0$, откуда $-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$. Рисуем схему.



На интервалах $\left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ и $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$ функция выпукла вниз, а на интервале $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ — выпукла вверх. В точках $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ функция имеет перегибы.

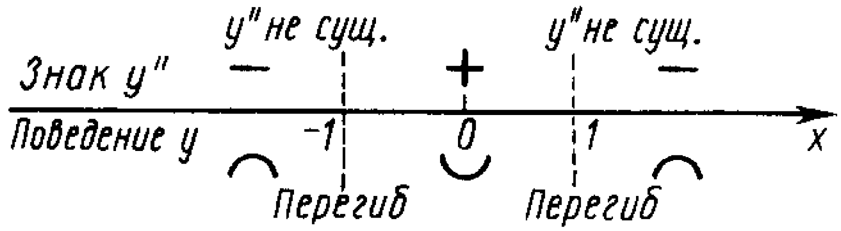
4. Находим ординаты точек перегиба: $y\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3}{4}$ и $y\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3}{4}$.

Пример 12. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$.

Решение. 1. Находим вторую производную: $y'' = -\frac{2}{9} \cdot \frac{x^2+3}{(x^2-1)^{5/3}}$.

2. В точках $x = -1$ и $x = 1$ вторая производная не существует (знаменатель обращается в нуль). Учитывая ещё, что ни в одной точке вторая производная в нуль не обращается, делаем вывод, что критическими точками второго рода являются две точки: $x = -1$ и $x = 1$.

3. Решаем неравенства $y'' > 0$ и $y'' < 0$. Имеем: $y'' > 0$ или $-\frac{2}{9} \cdot \frac{x^2+3}{(x^2-1)^{5/3}} > 0$, откуда $-1 < x < 1$; $y'' < 0$, откуда $x < -1$, $x > 1$. Рисуем схему.



На интервалах $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$ функция выпукла вверх, а на интервале $(-1; 1)$ — выпукла вниз. Точки $x = -1$ и $x = 1$ являются точками перегиба функции.

4. Находим ординаты точек перегиба: $y(-1) = 0$ и $y(1) = 0$.

§6. Полное исследование функции и построение её графика

Полное исследование функции и построение её графика рекомендуется проводить по следующей схеме.

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать функцию на периодичность.
3. Исследовать функцию на чётность и нечётность.
4. Найти точки пересечения графика функции с осями координат и определить интервалы знакопостоянства функции.
5. Найти точки разрыва функции и установить характер разрыва; исследовать поведение функции на границе области определения; найти асимптоты.

6. Найти промежутки возрастания и убывания функции, точки экстремума.
7. Исследовать направления выпуклости графика функции, найти точки перегиба.
8. Используя все полученные результаты, построить график функции.

Замечание. В процессе исследования функции необязательно строго придерживаться приведённой схемы, иногда удобнее изменить порядок исследования.

Пример 1. Провести полное исследование и построить график функции $y = x(x+1)(x-1)$.

Решение. 1. Область определения — вся числовая ось.

2. Функция не является периодической.

3. Функция является нечётной.

4. Функция имеет три точки пересечения с осью Ox: $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$. С осью Oy функция пересекается только при $y = 0$.

Определим интервалы знакопостоянства функции. Решим неравенство $x(x+1)(x-1) > 0$. Его решением является объединение двух интервалов: $(-1; 0)$ и $(1; +\infty)$. Таким образом, исследуемая функция положительна на интервалах $(-1; 0)$ и $(1; +\infty)$ и отрицательна на интервалах $(-\infty; -1)$ и $(0; 1)$ (это следует из нечётности функции).

5. Точек разрыва нет.

Поведение функции на границе области определения:

$$\lim_{x\to+\infty} x(x+1)(x-1) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} x(x+1)(x-1) = -\infty.$$

Найдём угловой коэффициент наклонной асимптоты:

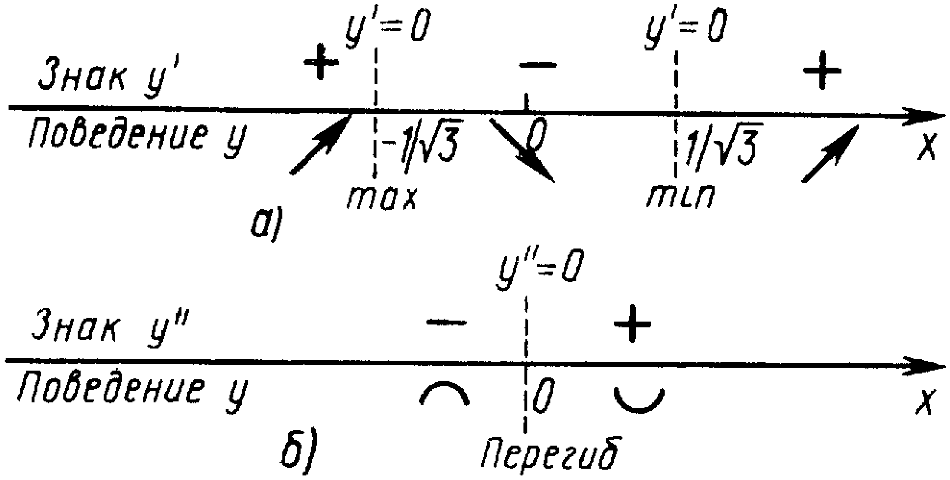
$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} (x+1)(x-1) = \infty.$$

Значит, наклонных, а следовательно, и горизонтальных асимптот нет. Вертикальных асимптот тоже нет, так как отсутствуют точки разрыва и функция определена на всей числовой оси.

6. Найдём производную: $y' = 3x^2 - 1$. Решаем неравенства $y' > 0$ и $y' < 0$. Имеем: $y' > 0$ или $3x^2 - 1 > 0$, откуда $x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x > \frac{1}{\sqrt{3}}$; $y' < 0$, откуда $-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$. Таким образом, на интервалах $\left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ и $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$ функция монотонно возрастает, а на интервале $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ — монотонно убывает.

Приравнивая производную нулю, находим критические точки первого рода: $y' = 3x^2 - 1$, откуда $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Рисуем схему (рис. а)), из которой следует, что в точке $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ функция имеет максимум, а в точке

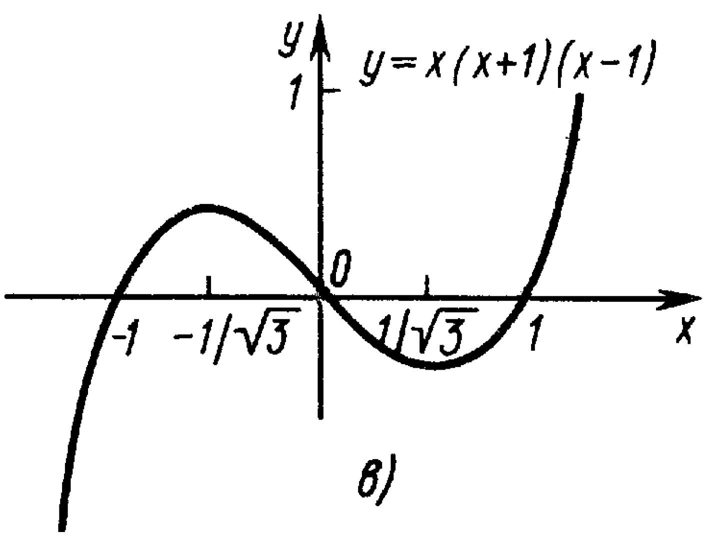
$x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ — минимум. Находим значения функции в экстремальных точках: если $x_{max} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, то $y_{max} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$; если $x_{min} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, то $y_{min} = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$.



7. Находим вторую производную: $y'' = 6x$. Решаем неравенства $y'' > 0$ и $y'' < 0$. Имеем: $y'' > 0$ или $6x > 0$, откуда $x > 0$; $y'' < 0$, откуда $x < 0$.

Приравнивая вторую производную нулю, найдём критическую точку второго рода: $y'' = 6x = 0$, откуда $x = 0$. Рисуем схему (рис. б)), из которой следует, что в точке $x = 0$ функция имеет перегиб (это также следует из нечётности функции). На интервале $(-\infty; 0)$ функция выпукла вверх, а на интервале $(0; +\infty)$ — выпукла вниз. Находим ординату точки перегиба: $y_{пер} = 0$.

8. График функции изображён на рис. в). При построении пользуемся симметрией графика относительно начала координат.



Пример 2. Провести полное исследование и построить график функции $y = (x^2 + 1)(x - 1)$.

Решение. 1. Область определения — вся числовая ось.

2. Функция не является периодической.

3. Функция не является ни чётной, ни нечётной.

4. Функция имеет одну точку пересечения с осью Ox в токе $(1;0)$ и одну точку пересечения с осью Oy в точке $(0;-1)$.

Функция положительна при $x>1$ и отрицательна при $x<1$.

5. Точек разрыва нет.

Поведение функции на границе области определения:

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2+1)(x-1)=+\infty,\quad \lim_{x\to-\infty}(x^2+1)(x-1)=-\infty.$$

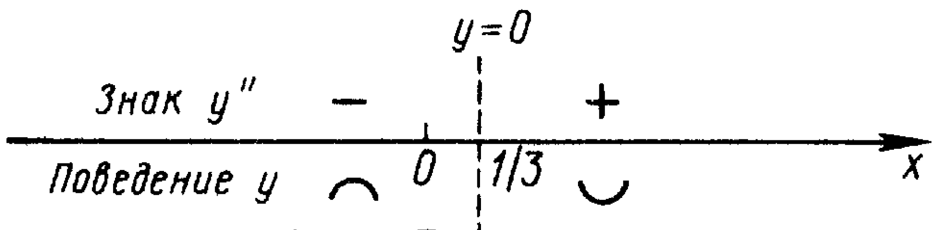
Найдём угловой коэффициент наклонной асимптоты:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+1)(x-1)}{x}=\infty.$$

Значит, наклонных, а следовательно, и горизонтальных асимптот нет. Нет и вертикальных асимптот (функция определена на всей числовой оси и нет точек разрыва).

6. Найдём производную: $y'=3x^2-2x+1$. На всей числовой оси $y'= 3x^2-2x+1>0$, значит функция монотонно возрастает. Экстремумов нет.

7. Находим вторую производную: $y''=6x-2$. Решаем неравенства $y''>0$ и $y''<0$. Имеем: $y''>0$ или $6x-2>0$, откуда $x>\frac{1}{3}$; $y''<0$, откуда $x<\frac{1}{3}$.



а)

Приравнивая вторую производную нулю, находим критическую точку второго рода: $y''=6x-2=0$, откуда $x=\frac{1}{3}$. Из схемы (рис. а)) следует, что в точке $x=\frac{1}{3}$ функция имеет перегиб. На интервале $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$ функция выпукла вверх, а на интервале $\left(\frac{1}{3};\infty\right)$ — выпукла вниз. Найдём ординату точки перегиба: $y_{пер}=-\frac{20}{27}$.

8. График функции изображён на рис. б).

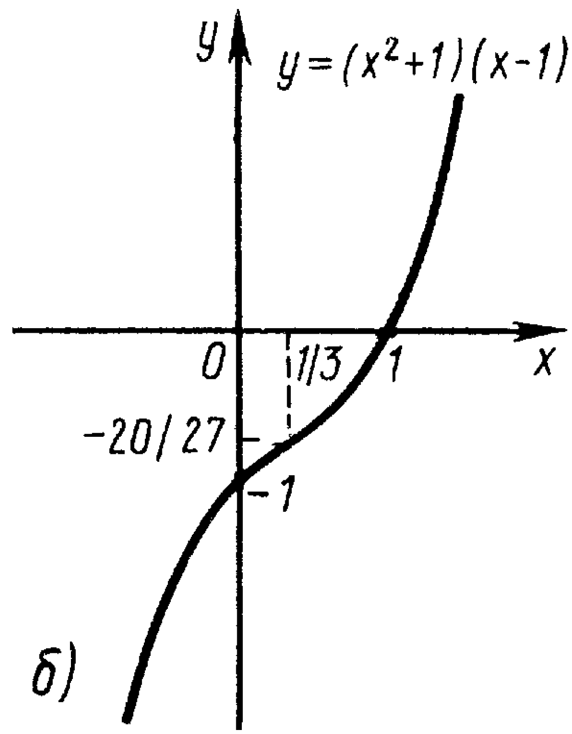
Пример 3. Провести полное исследование и построить график функции $y=\frac{2x}{x^2+1}$.

Решение. 1. Область определения — вся числовая ось.

2. Функция не является периодической.

3. Функция является нечётной.

4. Функция имеет одну точку пересечения с осями координат — точку $(0;0)$.



Функция положительна на интервале $(0; +\infty)$ и отрицательна на интервале $(-\infty; 0)$.

5. Точек разрыва нет.

Поведение функции на границе области определения:

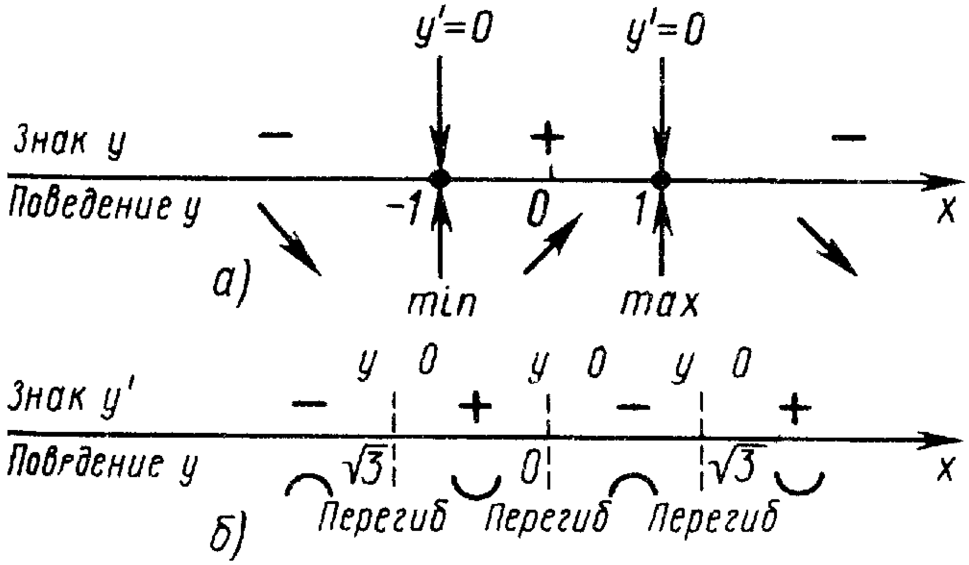
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x^2+1}=0,\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x^2+1}=0.$$

Следовательно, имеется горизонтальная асимптота $y = 0$. Вертикальных асимптот нет.

6. Найдём производную: $y' = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$. Решаем неравенства $y' > 0$ и $y' < 0$. Имеем: $y' > 0$ или $\frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2} > 0$, откуда $-1 < x < 1$, $y' < 0$, откуда $x < -1$, $x > > 1$. Таким образом, на интервалах $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$ функция монотонно убывает, а на интервале $(-1; 1)$ — монотонно возрастает.

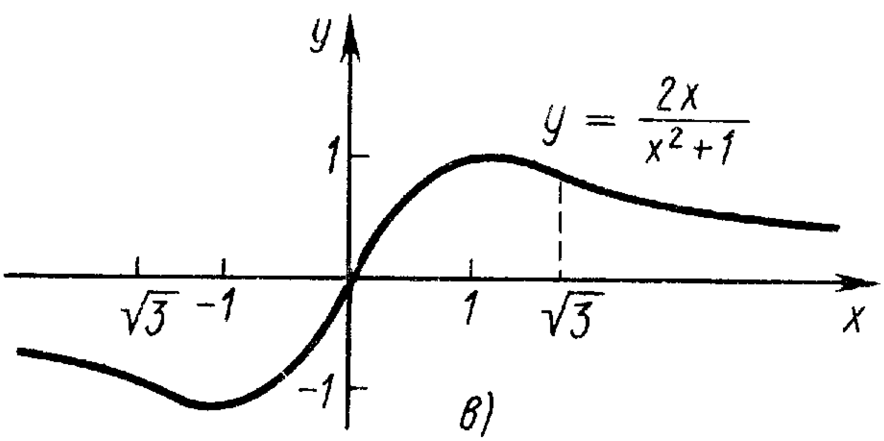
Приравнивая производную нулю, находим критические точки первого рода: $y' = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2} = 0$, откуда $x = -1$, $x = 1$. Из схемы (рис. а)) следует, что в точке $x = -1$ функция имеет минимум, а в точке $x = 1$ — максимум. Найдём ординаты экстремальных точек: если $x = -1$, то $y_{min} = -1$; если $x = 1$, то $y_{max} = 1$.

7. Находим вторую производную: $y'' = \frac{4x^3-12x}{(x^2+1)^3}$. Решаем неравенства $y'' > > 0$ и $y'' < 0$. Имеем: $y'' > 0$ или $\frac{4x^3-12x}{(x^2+1)^3} > 0$, откуда $-\sqrt{3} < x < 0$, $x > \sqrt{3}$; $y'' < 0$, откуда $0 < x < \sqrt{3}$, $x < -\sqrt{3}$.



Приравнивая вторую производную нулю, находим критическую точку второго рода: $y'' = \frac{4x^3-12x}{(x^2+1)^3} = 0$, откуда $x = 0$, $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$. Из схемы (рис. б)) следует, что в точках $x = 0$, $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$ функция имеет перегибы. На интервалах $\left(-\sqrt{3}; 0\right)$ и $\left(\sqrt{3}; +\infty\right)$ функция выпукла вниз, а на интервалах $\left(-\infty; -\sqrt{3}\right)$ и $\left(0; \sqrt{3}\right)$ — выпукла вверх. Найдём ординаты точек перегиба: если $x = 0$, то $y_{пер} = 0$; $x = -\sqrt{3}$, то $y_{пер} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $x = \sqrt{3}$, то $y_{пер} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

8. График функции изображён на рис. в).



Пример 4. Провести полное исследование и построить график функции $y = \frac{x}{x^2-4}$.

Решение. 1. Область определения — вся числовая ось, кроме точек $x = 2$ и $x = -2$.

2. Функция не является периодической.

3. Функция является нечётной.

4. Функция имеет одну точку пересечения с осями координат — точку $(0; 0)$.

Для нахождения интервалов знакопостоянства решаем неравенство $y > 0$ или $\frac{x}{x^2-4} > 0$, откуда $-2 < x < 0$ и $x > 2$. Функция положительна на интервалах $(-2; 0)$ и $(2; +\infty)$ и отрицательна (в силу нечётности) на интервалах $(-\infty; -2)$ и $(0; 2)$.

5. Функция имеет две точки разрыва — $x = 2$ и $x = -2$.

Поведение функции на границе области определения:

$$\lim_{x\to-\infty} = \frac{x}{x^2-4} = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} = \frac{x}{x^2-4} = 0,$$
$$\lim_{x\to-2-} = \frac{x}{x^2-4} = -\infty, \quad \lim_{x\to-2+} = \frac{x}{x^2-4} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to2-} = \frac{x}{x^2-4} = -\infty, \quad \lim_{x\to2+} = \frac{x}{x^2-4} = +\infty.$$

Отсюда следует, что в точках $x = 2$ и $x = -2$ функция имеет разрывы второго рода. Прямые $x = 2$ и $x = -2$ являются вертикальными асимптотами, прямая $y = 0$ — горизонтальной асимптотой.

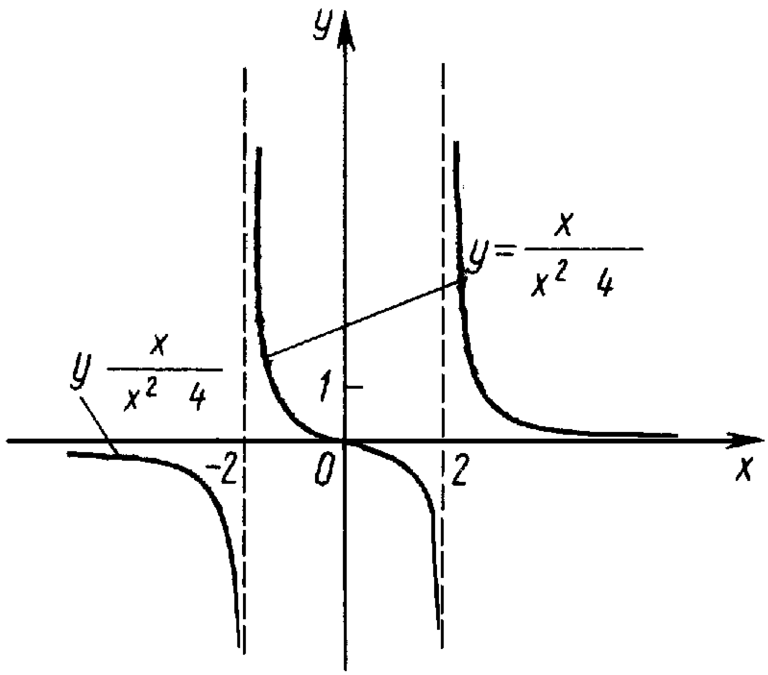
6. Найдём производную: $y' = -\frac{x^2+4}{(x^2-4)^2}$. Производная отрицательна на всей числовой оси, кроме точек $x = 2$ и $x = -2$, где она не существует (в этих точках и сама функция н существует). Функция монотонно убывает всюду, где она определена.

7. Находим вторую производную: $y'' = \frac{2x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$. Решаем неравенства $y'' >$ > 0 и $y'' < 0$. Имеем: $y'' > 0$ или $\frac{2x(x^2+12)}{(x^2-4)^3} > 0$, откуда $-2 < x < 0$, $x > 2$; $y'' < 0$, откуда $x < -2$, $0 < x < 2$.

Приравнивая вторую производную нулю, находим критическую точку второго рода: $x = 0$. Из схемы следует, что в точке $x = 0$ функция имеет перегиб (это следует также и из нечётности функции). На интервалах $(-2; 0)$ и $(2; +\infty)$ функция выпукла вниз, а на интервалах $(-\infty; -2)$ и $(0; 2)$ — выпукла вверх. Найдём ординату точки перегиба: $y_{пер} = 0$.

8. Полезно провести эскизирование этого графика. Так как $y = \frac{x}{(x-2)(x+2)}$, то при $x \to 0$ имеем $y \sim -4x$; при $x \to 2$ получим $y \sim \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-2}$; при $x \to -2$ находим $y \sim \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+2}$; при $x \to \infty$ имеем $y \sim \frac{1}{x} \to 0$.

Таким образом, становится понятным поведение функции при $x = 0$, в окрестности точек разрыва и на бесконечности. График функции изображён на рисунке.



Пример 5. Провести полное исследование и построить график функции $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$.

Решение. 1. Область определения — вся числовая ось, кроме точки $x = -1$.

2. Функция не является периодической.

3. Функция не является ни чётной, ни нечётной.

4. Функция имеет одну точку пересечения с осями координат — точку $(0;0)$.

Функция положительна при $x > 0$ и отрицательна при $x < 0$.

5. Функция имеет разрыв в точке $x = -1$.

Поведение функции на границе области определения:

$$\lim_{x\to-\infty} = \frac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} = \frac{x^3}{2(x+1)^2} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to-1-} = \frac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty, \quad \lim_{x\to-1+} = \frac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty.$$

Отсюда следует, что в точке $x = -1$ функция имеет разрыв второго рода. Прямые $x = -1$ является вертикальной асимптотой.

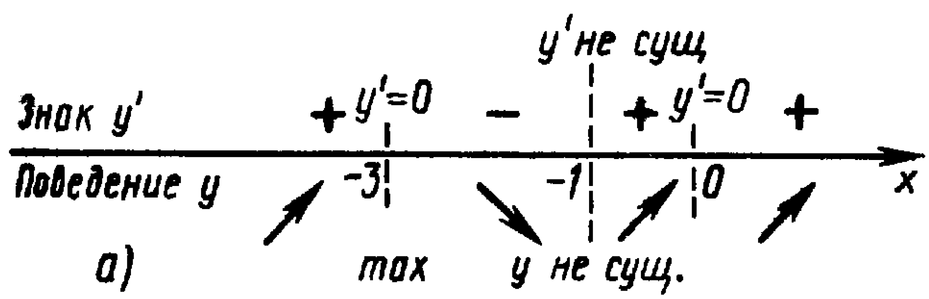
Найдём параметры наклонной асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\infty} yx = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{2x(x+1)^2} = \frac{1}{2},$$
$$b = \lim_{x\to\infty} (y - kx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{2(x+1)^2} - \frac{1}{2}x\right) = -1.$$

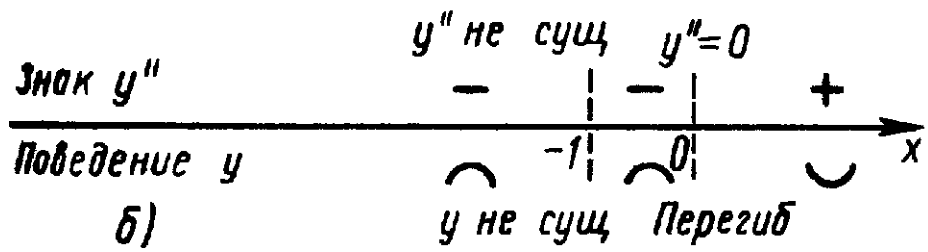
Уравнение наклонной асимптоты: $y = \frac{1}{2}x - 1$.

6. Найдём производную: $y' = \frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}$. Решаем неравенства: $y' > 0$ и $y' < 0$. Имеем: $y' > 0$ или $\frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3} > 0$, откуда $x < -3$, $-1 < x < 0$, $x > 0$; $y' < 0$, откуда $-3 < x < -1$. На интервалах $(-\infty; -3)$, $(-1; 0)$ и $(0; +\infty)$ функция монотонно возрастает, на интервале $(-3; -1)$ — монотонно убывает.

Приравнивая производную нулю, находим критические точки первого рода: $x = 0$, $x = -3$. Из схемы (рис. а)) следует, что в точке $x = -3$ функция имеет максимум, а в точке $x = 0$ экстремума нет. Найдём ординату точки максимума: $y_{max} = -3\frac{3}{8}$.



7. Находим вторую производную: $y'' = \frac{3x}{(x+1)^4}$. Вторая производная положительна на интервале $(0; +\infty)$ и отрицательна на интервалах $(-\infty; -1)$ и $(-1; 0)$. Критическая точка второго рода — $x = 0$. Из схемы (рис. б)) следует, что в точке $x = 0$ функция имеет перегиб. На интервалах $(-\infty; -1)$ и $(-1; 0)$ функция выпукла вверх, а на интервале $(0; +\infty)$ — выпукла вниз. Ордината точки перегиба $y_{пер} = 0$.



8. График функции изображён на рис. в).

Пример 6. Провести полное исследование и построить график функции $y = e^{\frac{1}{x-1}}$.

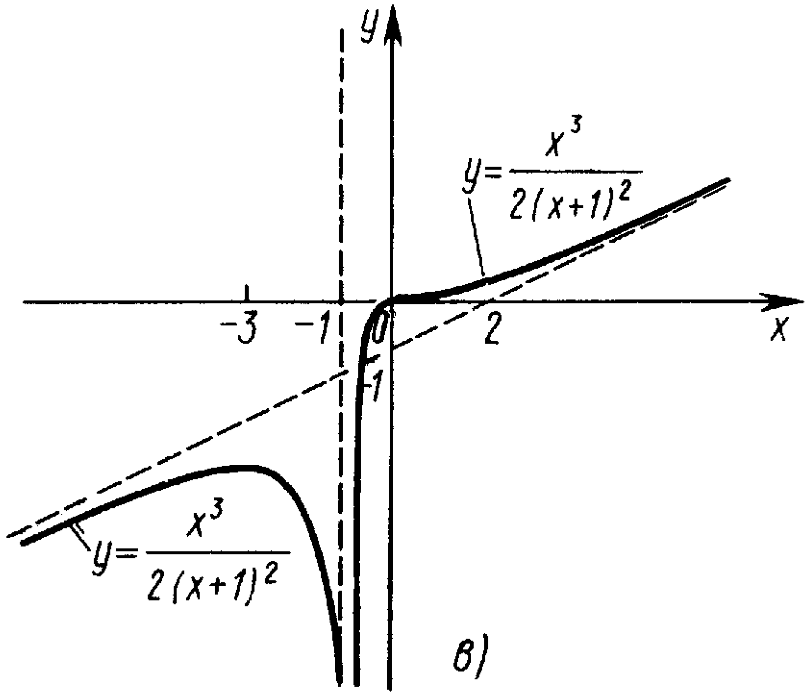
Решение. 1. Область определения — вся числовая ось, кроме точки $x = 1$.

2. Функция не является периодической.

3. Функция не является ни чётной, ни нечётной.

4. Функция не имеет нулей. Она положительна на всей числовой оси, кроме точки $x = 1$. Функция пересекается с осью Oy в точке $\left(0; \frac{1}{e}\right)$.

5. Функция имеет разрыв в точке $x = 1$.



Поведение функции на границе области определения:

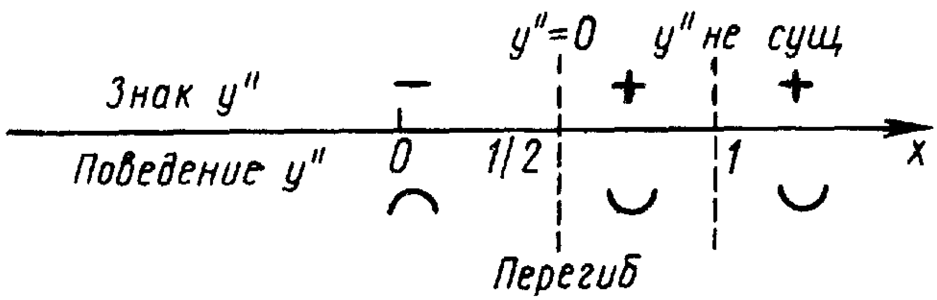
$$\lim_{x\to-\infty} = e^{\frac{1}{x-1}} = 1, \quad \lim_{x\to+\infty} = e^{\frac{1}{x-1}} = 1,$$

$$\lim_{x\to 1-} = e^{\frac{1}{x-1}} = 0, \quad \lim_{x\to 1+} = e^{\frac{1}{x-1}} = +\infty.$$

Отсюда следует, что в точке $x = 1$ функция имеет разрыв второго рода. Прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой, прямая $y = 1$ — горизонтальной асимптотой.

6. Найдём производную: $y' = -\frac{1}{(x-1)^2}e^{\frac{1}{x-1}}$. Производная отрицательна на всей числовой оси, кроме точки $x = 1$. Следовательно, функция монотонно убывает всюду, где она определена.

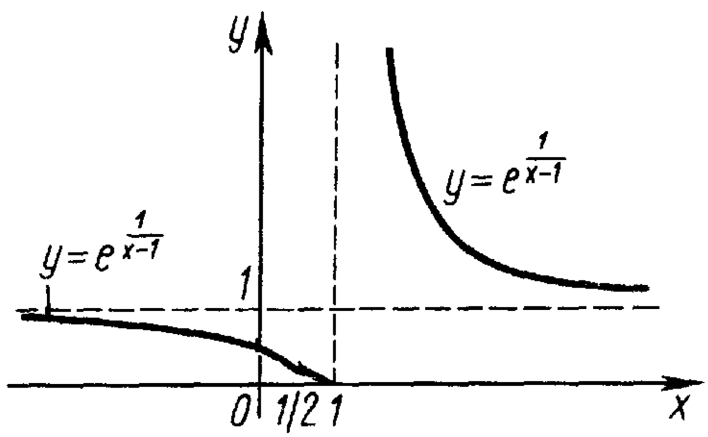
7. Находим вторую производную: $y'' = \frac{2x-1}{(x-1)^4}e^{\frac{1}{x-1}}$. Решаем неравенства $y'' > 0$ и $y'' < 0$. Имеем: $y'' > 0$ или $\frac{2x-1}{(x-1)^4}e^{\frac{1}{x-1}} > 0$, откуда $x > \frac{1}{2}$, $x \neq 1$; $y'' < 0$, откуда $x < \frac{1}{2}$.



Приравнивая вторую производную нулю, найдём критическую точку второго рода: $x = \frac{1}{2}$. Из схемы следует, что на интервалах $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ и $(1; +\infty)$

функция выпукла вниз, а на интервале $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ — выпукла вверх. Таким образом, в точке $x = \frac{1}{2}$ функция имеет перегиб. Ордината точки перегиба $y_{пер} = e^{-2} \approx 0,135$.

8. График функции изображён на рисунке.



Задачи для самостоятельного решения

Провести полное исследование и построить график функции:

69. $y = x^3 - 3x$;

70. $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$;

71. $y = x^3 + 6x^2 + 9x$;

72. $y = \frac{x^3}{3} + x^2$;

73. $y = 1 + 2x^2 - \frac{x^4}{4}$;

74. $y = \frac{x^4}{4} + x^3$;

75. $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}$;

76. $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2$;

77. $y = 3x^5 - 5x^3$;

78. $y = \frac{x^5}{5} - x^4 + x^3$;

79. $y = (x^2 - 1)^3$;

80. $y = 32x^2(x^2 - 1)^3$;

81. $y = x + 2\sqrt{-x}$;

82. $y = x\sqrt{1 - x}$;

83. $y = \frac{6\sqrt{x}}{x+2}$;

84. $y = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}$;

85. $y = \sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 + 1}$;

86. $y = \sqrt[3]{x^2} - 1$;

87. $y = 1 - \sqrt[3]{(x - 4)^2}$;

88. $y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$;

89. $y = 1 + \sqrt[3]{(x-1)^2}$;
90. $y = (x-2)^{\frac{2}{3}} - (x+2)^{\frac{2}{3}}$;
91. $y = (x-2)^{\frac{2}{3}} + (x+2)^{\frac{2}{3}}$;
92. $y = x^{\frac{2}{3}}(1-x)$;
93. $y = x(x-1)^{\frac{2}{3}}$;
94. $y = \frac{x}{1-x^2}$;
95. $y = \frac{x}{x^2-4}$;
96. $y = \frac{x}{x^2+1}$;
97. $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$;
98. $y = \frac{3-2x}{(x-2)^2}$;
99. $y = \frac{x-1}{(x-2)(x-5)}$;
100. $y = \frac{x}{(x-1)(4-x)}$;
101. $y = \frac{x^2}{x^2-1}$;
102. $y = \frac{(x+1)^2}{x^2+2x}$;
103. $y = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$;
104. $y = \frac{(x-3)^2}{x^2-4x+5}$;
105. $y = \frac{x^2-x+1}{3x-x^2-3}$;
106. $y = xe^{-\frac{x}{2}}$;
107. $y = (x+1)e^{-x}$;
108. $y = x^2e^{-x}$;
109. $y = (x+4)^2e^{-\frac{x}{2}}$;
110. $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$;
111. $y = xe^{\frac{3-x^2}{2}}$;
112. $y = (1-x)e^{x}$;
113. $y = (x-2)^2e^{x}$;
114. $y = x^3e^{x}$;
115. $y = x^3e^{-x}$;
116. $y = \frac{e^x}{x}$;
117. $y = \frac{e^x}{x-2}$;
118. $y = \frac{e^x}{4(1-x)}$;
119. $y = \frac{e^x}{(1-x)^2}$;
120. $y = \frac{e^{-x}}{x^2-3}$;
121. $y = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$;
122. $y = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$;
123. $y = \frac{2}{e^x(x+3)}$;

124. $y = x^2 e^{-x^2}$;
125. $y = x \ln x$;
126. $y = x - \ln x$;
127. $y = x \ln^2 x$;
128. $y = x^2 \ln^2 x$;
129. $y = \frac{\ln x}{x}$;
130. $y = x^2 \ln x$;
131. $y = \frac{1+\ln x}{x}$;
132. $y = \frac{x}{\ln x}$;
133. $y = \frac{x}{\ln |x|}$;
134. $y = -\frac{\ln x}{x^2}$;
135. $y = \frac{\ln(x-1)}{(x-1)^2}$;
136. $y = \frac{\ln^2 x}{x}$;
137. $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$;
138. $y = x^{\frac{2}{3}} e^{-x}$;
139. $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$;
140. $y = 2x + \frac{1}{x^2}$;
141. $y = \frac{x^3}{1-x^2}$;
142. $y = \frac{x^3}{1+x^2}$;
143. $y = \frac{x^3}{(x-1)^2}$;
144. $y = \frac{(x-2)^2}{2(x-1)}$;
145. $y = x + \operatorname{arctg} x$;
146. $y = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$;
147. $y = \frac{x^4}{(1+x)^3}$;
148. $y = \frac{x}{2} + \operatorname{arcctg} x$;
149. $y = x - \operatorname{arctg} 2x$;
150. $y = x - 2 \operatorname{arctg} x$;
151. $y = (x+2) e^{\frac{1}{x}}$;
152. $y = 1 + x e^{\frac{2}{x}}$;
153. $y = e^{\frac{1}{x}} - x$;
154. $y = \sqrt[3]{x^2(1-x)}$;
155. $y = \sqrt[3]{x(1+x^2)}$;
156. $y = \sqrt[3]{x(3-x)^2}$;
157. $y = x - 2 \operatorname{tg} x$;
158. $y = x + \sin 2x$;
159. $y = \sqrt[3]{x(2-x^2)}$.

Ответы

1. Функция чётная. **2.** Функция не является ни чётной, ни нечётной. **3.** Функция чётная. **4.** Функция нечётная. **5.** Функция нечётная. **6.** Функция чётная. **7.** Функция не является ни чётной, ни нечётной. **8.** Функция нечётная. **9.** Функция нечётная. **10.** Функция нечётная. **11.** Функция чётная. **12.** Функция не является ни чётной, ни нечётной. **13.** Функция не является ни чётной, ни нечётной. **14.** $\frac{\pi}{2}$. **15.** 2π. **16.** 2π. **17.** $\frac{\pi}{3}$. **18.** 2π. **19.** π. **20.** $\frac{2\pi}{3}$. **21.** $\frac{\pi}{2}$. **22.** 3π. **23.** 2π. **24.** 0 — разрыв второго рода. **25.** 0 — разрыв первого рода (скачок). **26.** 0 — разрыв первого рода (скачок). **27.** 1 — разрыв первого рода (устранимый разрыв). **28.** $\frac{2n-1}{2}\pi$ (n — целое) — разрывы второго рода. **29.** -2, 2 — разрывы второго рода. **30.** -2 — разрыв первого рода (скачок). **31.** 2 — разрыв второго рода. **32.** 0 — разрыв второго рода. **33.** 0 — разрыв первого рода (устранимый разрыв). **34.** -2, 2 — разрывы первого рода (устранимые разрывы); 0 — разрыв второго рода. **35.** $x = 0$, $y = 1$. **36.** $y = 1$. **37.** $x = 0$, $y = -1$. **38.** $x = -\frac{1}{2}$, $y = -2$. **39.** $x = 0$, $y = x$. **40.** $x = -1$, $y = x - 1$. **41.** $x = 0$, $y = x - 1$. **42.** $x = -\frac{4}{7}$, $y = -\frac{5}{7}$. **43.** $y = x$. **44.** $y = -x$. **45.** Асимптот нет. **46.** $y = x + \pi$, $y = x - \pi$. **47.** $y = -\frac{\pi}{4}$; прямая $x = 5$ не асимптота. **48.** $y = 0$. **49.** $y = 2x$, $y = -2x$. **50.** $x = 0$, $y = x$. **51.** $x = 0$, $y = 1$. **52.** $x = 0$, $y = -x$. **53.** Асимптот нет. **54.** $x = -2$, $y = \frac{1}{2}$. **55.** $x = 1$, $y = -\frac{x+1}{2}$. **56.** $x = 2$, $x = -2$, $y = 1$. **57.** $x = 1$, $x = -1$, $y = -x$. **58.** $y_{min} = y(0) = -1$, $y_{max} = y(1) = 1$. **59.** $y_{min} = y(3) = -1$, $y_{max} = y(1) = 3$. **60.** $y_{min} = y\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{56}{9}$, $y_{max} = y\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{88}{9}$. **61.** $y_{min} = y(0) = 1$, $y_{max} = y(1) = 8$. **62.** $y_{min} = y(-1) = 0$, $y_{max} = y(-2) = 17$. **63.** $y_{min} = y(-\pi) = -2\pi$, $y_{max} = y(\pi) = 2\pi$. **64.** $y_{min} = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y_{max} = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. **65.** $y_{min} = y(\pi) = -\frac{\pi(3+\pi^2)}{3}$, $y_{max} = y(0) = 0$. **66.** $y_{min} = y(1) = 2$, $y_{max} = y(0,1) = 10,1$. **67.** $y_{min} = y(1) = -1$, $y_{max} = y(-1) = \frac{1}{3}$. **68.** $y_{min} = y(1) = -1$, $y_{max} = y(e) = 0$.