Дифференциальные уравнения

§1. Основные понятия теории дифференциальных уравнений

1.1. Задачи, приводящие к понятию дифференциального уравнения

Во многих задачах науки и техники требуется находить неизвестную функцию, которая удовлетворяет уравнению, связывающему эту функцию, ее производные и независимую переменную. Простейшая такая задача встречалась в интегральном исчислении, где находили функцию по данной ее производной, то есть находили функцию, удовлетворяющую уравнению $y' = f(x)$.

Пример 1. Найти y, если $y' = x^3$.

Решение. Из интегрального исчисления мы знаем, что уравнению $y' = x^3$ удовлетворяет множество функций $y = \frac{x^4}{4} + C$, где C — произвольная постоянная.

Чтобы из этого множества выделить одну определенную функцию, нужно задать дополнительное условие. Например, найдем функцию, которая при $x = 1$ принимает значение $y = 2$, то есть $y(1) = 2$. Подставляя $x = 1$, $y = 2$ в формулу $y = \frac{x^4}{4} + C$, получим $2 = \frac{1}{4} + C$. Отсюда $C = \frac{7}{4}$. Следовательно, функция, удовлетворяющая уравнению $y' = x^3$ и условию $y(1) = 2$, имеет вид $y = \frac{x^4}{4} + \frac{7}{4}$.

Пример 2. Найти кривую, обладающую тем свойством, что отрезок любой ее касательной, заключенной между осями координат, делится пополам в точке касания.

Решение. Пусть $y = f(x)$ — уравнение искомой кривой, $M(x, y)$ — произвольная точка этой кривой, а AB — касательная к кривой в точке M. Угол, образованный касательной с осью Ox, обозначим через φ. Из дифференциального исчисления мы знаем, что угловой коэффициент касательной к кривой равен

$$k = \operatorname{tg}\varphi, \quad \operatorname{tg}(180^\circ - \varphi) = \frac{PM}{PA} \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = -\frac{PM}{AM} \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = -\frac{y}{x} \qquad (1)$$

и получаем уравнение

$$y' = -\frac{y}{x}, \tag{2}$$

которое связывает неизвестную функцию, ее производную и независимую переменную.

Проверкой можно убедиться, что уравнению (2) удовлетворяет любая функция вида $y = \frac{C}{x}$. Таким образом, мы получили семейство гипербол. Найдем гиперболу, которая проходит через точку $M_0(2,3)$. Подставляя координаты точки в формулу $y = \frac{C}{x}$, получим $3 = \frac{C}{2}$, $C = 6$. Следовательно, уравнение гиперболы, проходящей через точку $M_0(2,3)$, имеет вид

$$y = \frac{6}{x}.$$

Пример 3. Груз, масса которого m, закреплен на верхнем конце вертикально расположенной пружины (рессоры). Его отклоняют от точки O на некоторое расстояние, а затем отпускают. Определить закон движения груза, если сила, действующая на него со стороны пружины, пропорциональна сжатию (растяжению) пружины и направлена в сторону точки O (точки, в которой находился верхний конец пружины, когда она была в свободном состоянии).

Решение. Если груз движется прямолинейно вдоль оси Ox, то согласно закону Ньютона

$$ma = \sum_{k=1}^{n} F_k, \tag{3}$$

где $a = \frac{d^2x}{dt^2}$ — ускорение груза, $x = x(t)$ — искомый закон движения груза, F_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — проекции сил на ось Ox, действующих на груз.

В нашем случае на груз действуют две силы: $\vec{F_1} = mg\vec{\imath}$ — вес груза и $\vec{F_2} = (-cx)\vec{\imath}$ — сила, действующая со стороны пружины, где c — коэффициент жесткости пружины, $\vec{\imath}$ — единичный вектор, направленный вдоль оси Ox. Проекции этих сил равны $F_1 = mg$, $F_2 = -cx$. Получаем уравнение

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx + mg,$$

содержащее неизвестную функцию x и ее вторую производную.

Проверкой можно убедиться, что уравнению

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = g, \tag{4}$$

где $k^2 = \frac{c}{m}$, удовлетворяет функция

$$x = c_1 \cos kt + c_2 \sin kt + \frac{g}{k^2},$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные.

Действительно, подставим значение x в левую часть уравнения (4):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = -ck^2\cos kt - c_2k^2\sin kt + c_1k^2\cos kt + c_2k^2\sin kt + g = g.$$

Таким образом, функция $x = c_1\cos kt + c_2\sin kt + \frac{g}{k^2}$ удовлетворяет уравнению (4).

Поскольку x зависит от двух произвольных постоянных, то для получения определенного закона движения нужно задать два дополнительных условия. Например, найдем закон движения груза, если в момент времени $t = 0$ его отклонили на величину x и придали ему скорость v_0. Тогда получим

$$x_0 = c_1 + \frac{g}{k^2} \Rightarrow c_1 = x_0 - \frac{g}{k^2}.$$

Далее

$$\frac{dx}{dt} = -c_1k\sin kt + c_2k\cos kt.$$

$$v_0 = c_2k \Rightarrow c_2 = \frac{v_0}{k}.$$

Таким образом, искомый закон движения

$$x = \left(x_0 - \frac{g}{k^2}\right)\cos kt + \frac{v_0}{k}\,\sin kt + \frac{g}{k^2}.$$

В каждой из рассмотренных задач мы получили для искомой функции уравнение, которое содержит производную искомой функции.

1.2. Основные определения

Определение 1. Дифференциальным уравнением называется такое уравнение, которое связывает неизвестную функцию, ее производные и независимую переменную.

Определение 2. Порядком дифференциального уравнения называется порядок наивысшей производной неизвестной функции, входящей в дифференциальное уравнение.

Определение 3. Функция $y = y(x)$, определенная на некотором интервале (a, b), называется решением дифференциального уравнения, если после подстановки этой функции и ее производных в уравнение, оно обращается в тождество на всем интервале.

В некоторых случаях решение $y = y(x)$ дифференциального уравнения удается найти в виде неявной функции, заданной равенством $\varphi(x, y) = 0$. В тех случаях, когда равенство $\varphi(x, y) = 0$ можно разрешить относительно

y, мы получим решение уравнения в виде $y = y(x)$. Если же выразить y явно из равенства $\varphi(x, y) = 0$ не удается, то решение оставляют в виде $\varphi(x, y) = 0$.

Определение 4. Равенство $\varphi(x, y) = 0$, которое неявно определяет решение $y = y(x)$ дифференциального уравнения, называется интегралом дифференциального уравнения.

Определение 5. График решения дифференциального уравнения называется интегральной кривой этого уравнения.

1.3. Об интегрировании дифференциальных уравнений

При интегрировании дифференциальных уравнений мы находим их решения, которые выражаются через элементарные функции и интегралы от них. Однако доказано, что во многих случаях решения дифференциальных уравнений, хотя и существуют, но не выражаются в виде конечной комбинации элементарных функций и интегралов от них. Например, решение уравнения $y' = x^2 + y^2$ нельзя найти в таком виде.

Для нахождения частных решений в таких случаях широко применяются различные численные методы, эффективность которых существенно возросла с развитием компьютерных технологий. В настоящее время численные методы позволяют находить решения дифференциальных уравнений практически с любой требуемой точностью.

Отметим, что имеются справочники по дифференциальным уравнениям, в которых приведены решения большого числа встречающихся дифференциальных уравнений.

Задачи для самостоятельного решения

Составить дифференциальные уравнения данных семейств линий:

1. $y = e^x$;

2. $y = (x - c)^3$;

3. $y = \sin(x + c)$;

4. $x^2 + cy^2 = 2y$;

5. $y^2 + cx = x^3$;

6. $y = c(x - c)^2$;

7. $y = ax^2 + be^x$;

8. $(x - a)^2 + by^2 = 1$;

9. $\ln y = ax + by$;

10. $x = ay^2 + by + c$.

§2. Дифференциальные уравнения первого порядка

2.1. Метод изоклин

Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ геометрически устанавливает связь между координатами точки и угловым коэффициентом касательной, проведенной к интегральной кривой в этой точке, причем сама интегральная кривая нам неизвестна.

Определение 1. Геометрическое место точек плоскости (x, y), в которых наклон касательных к решениям уравнения $y' = f(x, y)$ один и тот же, называется изоклиной.

Каждой точке (x, y) ставится в соответствие некоторое направление; мы получаем поле направлений.

Уравнение изоклины имеет вид $f(x, y) = k$, где $k = \text{const}$. Чтобы приближенно построить решение уравнения $y' = f(x, y)$, можно начертить достаточное число изоклин, а затем провести решение.

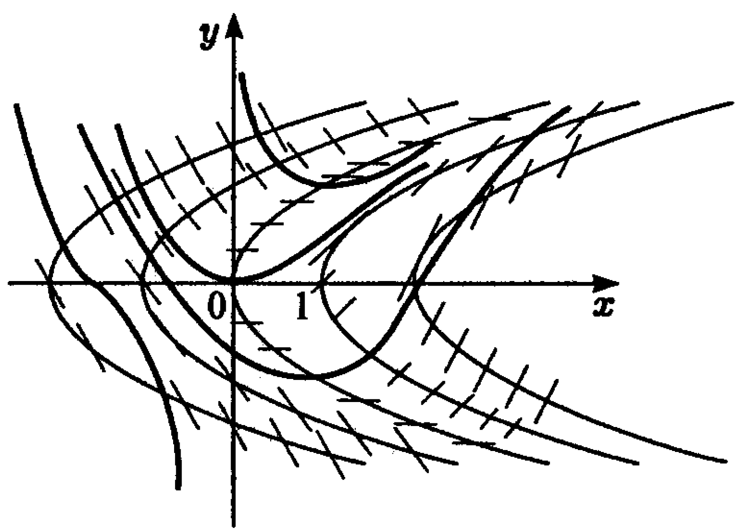
Пример 1. Методом изоклин построить интегральные кривые уравнения

$$y' = x - y^2.$$

Решение. Изоклинами данного дифференциального уравнения являются линии, уравнения которых

$$x - y^2 = k.$$

Для нескольких значений k, например, для $k = 0, \pm 1, \pm 2$, проведем изо-



клины $x - y^2 = k$. Это — параболы. Каждую изоклину $x - y^2 = k$ пересечем короткими отрезками под углом α, $\operatorname{tg}\alpha = k$, к оси Ox, не доходящими до других изоклин. Проведем интегральные кривые, например, через точки

$(1,1)$, $(0,0)$, $(1,-1)$, $(-1,-1)$, согласуясь, как указано выше, с направлениями отрезков на изоклинах. Полученный рисунок дает общее представление о решениях уравнения $x - y^2 = k$.

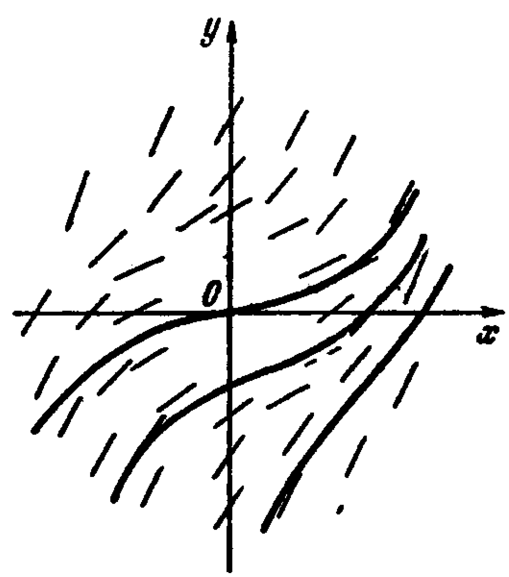
Пример 2. Методом изоклин построить интегральные кривые уравнения

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2.$$

Решение. Изоклинами этого дифференциального уравнения являются линии

$$x^2 + y^2 = k.$$

Построим изоклины и расставим стрелки, определяющие поле направлений.
$y' = 0$, имеем $x = y = 0$ (начало координат);
$y' = \frac{1}{2}$, $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ (окружность радиусом $\frac{1}{\sqrt{2}}$ с центром в начале координат);
$y' = 1$, $x^2 + y^2 = 1$ (окружность радиусом 1).



Чтобы начертить интегральную кривую уравнения, нужно взять некоторую точку (x_0, y_0) на плоскости и провести через нее кривую так, чтобы она в каждой точке имела направление поля. На рисунке проведены кривые через точки $(0,0)$, $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$, $(\sqrt{2}, 0)$. Мы видим, что получается не одна кривая, а целое семейство кривых, зависящих от одного параметра. В качестве параметра можно взять, например, отрезок, отсекаемый кривой на оси Oy.

2.2. Общее и частное решения дифференциального уравнения первого порядка. Теорема существования и единственности решения задачи Коши

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка

$$F(x, y, y') = 0 \tag{5}$$

или в виде, разрешенном относительно y':

$$y' = f(x, y), \tag{6}$$

где F — заданная непрерывная функция трех своих аргументов, f — непрерывная заданная функция от x, y.

Определение 2. Функция $y = y(x, c)$, где c — произвольная постоянная, называется общим решением дифференциального уравнения первого порядка, если при любом значении c функция $y = y(x, c)$ является решением дифференциального уравнения.

Определение 3. Равенство $\varphi(x, y, c) = 0$, которое неявно определяет общее решение $y = y(x, c)$ дифференциального уравнения, называется общим интегралом дифференциального уравнения.

Если равенство $\varphi(x, y, c) = 0$ можно разрешить относительно y, то получим общее решение в виде $y = y(x, c)$.

Определение 4. Если в общем решении $y = y(x, c)$ произвольной постоянной придать конкретное значение $c = c_0$, то полученное решение $y = y(x, c_0)$ называется частным решением дифференциального уравнения.

Определение 5. Нахождение решения $y = y(x)$, удовлетворяющего условию $y(x_0) = y_0$, где x_0, y_0 — заданные числа, называется задачей Коши.

Возникает вопрос, каким условиям должна удовлетворять функция $f(x, y)$, чтобы уравнение $y' = f(x, y)$ имело единственное решение задачи Коши. Ответ на этот вопрос дает теорема существования и единственности решения.

Теорема. Если в некоторой области D изменения переменных x и y функция $f(x, y)$ и ее частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны, то для всякой точки (x_0, y_0) области D существует единственное решение $y = y(x)$ уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$.

Геометрический смысл теоремы существования и единственности заключается в том, что через каждую точку области D проходит только одна интегральная кривая.

2.3. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

I. Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \tag{7}$$

не содержащее (явно) искомую функцию. Запишем его с помощью дифференциалов

$$dy = f(x)\,dx. \tag{8}$$

Откуда на основании интегрального исчисления получаем

$$y = \int f(x)\,dx + C. \tag{9}$$

Получим общее решение уравнения (7). Задаваясь начальными условиями (x_0, y_0), определим частное решение этого уравнения. Аналогично решаются уравнения первого порядка, не содержащие явно независимого переменного

$$\frac{dy}{dx} = f(y) \tag{10}$$

$$dx = \frac{dy}{f(y)}, \quad \text{при } f(y) \neq 0.$$

$$x = \int \frac{dy}{f(y)} + C. \tag{11}$$

Решения, записанные в виде (9), (11), называются решениями в квадратурах. После вычисления интегралов получаем общее решение.

Пример 3. Найти решение дифференциального уравнения $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, удовлетворяющее условию $y(0) = \frac{\pi}{2}$.

Решение. Найдем сначала общее решение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow dy = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow y = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + C \Rightarrow y = \arcsin x + C.$$

Далее найдем решение, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = \frac{\pi}{2}$.

$$\frac{\pi}{2} = \arcsin 0 + C \Rightarrow C = \frac{\pi}{2}.$$

Получаем решение, удовлетворяющее заданному начальному условию

$$y = \arcsin x + \frac{\pi}{2}.$$

Пример 4. Найти решение уравнения $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{y}}$, удовлетворяющее условию $y(0) = 1$.

Решение. Найдем сначала общее решение

$$\sqrt{y}\,dy = dx \Rightarrow dx = \sqrt{y}\,dy \Rightarrow x = \int \sqrt{y}\,dy + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} + C \Rightarrow x = \frac{2}{3}y\sqrt{y} + C$$

Найдем далее решение, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$

$$0 = \frac{2}{3} + C \Rightarrow C = -\frac{2}{3}, \quad x = \frac{2}{3}y\sqrt{y} - \frac{2}{3}.$$

II. Дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\varphi(y), \tag{12}$$

в котором правая часть есть произведение функции, зависящей только от x, на функцию только от y, интегрируется следующим образом: мы "разделяем переменные", то есть при помощи умножения и деления приводим уравнение к такой форме, чтобы в одну часть входила только функция от x и дифференциала dx, а в другую часть — функция от y и dy.

В уравнении (12) надо обе части уравнения умножить на dx и разделить на $\varphi(y)$. Получаем

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)\,dx. \tag{13}$$

Если дифференциалы равны, то их неопределенные интегралы могут различаться только постоянным слагаемым.

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)\,dx + C. \tag{14}$$

Если уравнение задано в виде

$$M(x)N(y)\,dx + P(x)Q(y)\,dy = 0, \tag{15}$$

достаточно разделить обе части на $N(y)P(x)$:

$$\frac{M(x)\,dx}{P(x)} + \frac{Q(y)\,dy}{N(y)} = 0.$$

Откуда получаем общий интеграл

$$\int \frac{M(x)\,dx}{P(x)} + \int \frac{Q(y)\,dy}{N(y)} = C.$$

Пример 5. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$x\,dx + y\,dy = 0.$$

Решение. Разрешим уравнение относительно производной $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ — уравнение с разделяющимися производными.

$$y\,dy = -x\,dx \Rightarrow \int y\,dy = -\int x\,dx + C \Rightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C \Rightarrow x^2 + y^2 = 2C.$$

Получили семейство окружностей с центром в начале координат и радиусом $r = \sqrt{2C}$. Итак, $x^2 + y^2 = r^2$ — общий интеграл уравнения.

Пример 6. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}.$$

Решение.

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} + C \Rightarrow \ln|y| = -\ln|x| + \ln C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|y| = \ln\frac{C_1}{x} \Rightarrow y = \frac{C_1}{x}, \quad \text{где } \ln C_1 = C.$$

Ответ: $y = \frac{C_1}{x}$.

Пример 7. Найти решение дифференциального уравнения

$$y\,dx + \operatorname{ctg} x\,dy = 0,$$

удовлетворяющее начальному условию $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1$.

Решение.

$$y\,dx + \operatorname{ctg} x\,dy = 0 \Rightarrow \frac{dx}{\operatorname{ctg} x} + \frac{dy}{y} = 0 \Rightarrow -\ln|\cos x| + \ln|y| = \ln C.$$

Потенцируем $\frac{y}{\cos x} = C \Rightarrow y = C\cos x$ — общее решение. Найдем C из начальных условий.

$$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = C\cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow C = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2.$$

$y = -2\cos x$ — частное решение, удовлетворяющее заданному начальному условию.

Ответ: $y = -2\cos x$.

2.4. Однородные дифференциальные уравнения и уравнения, приводящиеся к ним

I. Однородным уравнением называется такое уравнение, в котором правая часть является функцией от отношения аргументов, то есть

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right), \tag{16}$$

а также уравнение вида

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0, \tag{17}$$

где $M(x,y)$, $N(x,y)$ являются однородными функциями одного измерения.

По определению, $f(x,y)$ есть однородная функция n-го измерения, если выполняется тождество

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y). \tag{18}$$

При $n=0$ имеем

$$f(tx,ty) = f(x,y).$$

В уравнении (16) $f\left(\frac{y}{x}\right)$ является однородной функцией нулевого измерения.

Если ввести новую переменную

$$u = \frac{y}{x}, \tag{19}$$

то уравнение (16) упрощается и приводится к уравнению с разделяющимися переменными:

$$y = ux.$$

Найдем

$$y' = u + x\frac{du}{dx}$$

и подставим в уравнение (16)

$$u + x\frac{du}{dx} = \varphi(u)$$

или

$$x\,du = (\varphi(u) - u)\,dx.$$

Переменные разделяются, если обе части разделить на $x[\varphi(u) - u]$, получим

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, получим

$$\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \ln|x| + C. \tag{20}$$

Если в этом выражении заменить u его значением $\frac{y}{x}$, то получим интеграл уравнения (16).

Замечание. При решении конкретных однородных уравнений не обязательно приводить их к виду (16). Достаточно убедиться в том, что уравнение принадлежит к рассматриваемому типу, и непосредственно применить подстановку (19). Пользоваться готовой формулой (20) тоже нецелесообразно.

Замечание. Если $\varphi(u) - u \equiv 0$, то уравнение имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

и интегрируется разделением переменных. Его общее решение имеет вид $y = cx$. Если $\varphi(u) - u$ обращается в нуль при значении $u = u_0$, то кроме решений, даваемых формулой (20), существует также решение $u = u_0$ или $y = u_0 x$ (прямая, проходящая через начало координат).

Пример 8. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}.$$

Решение. Данное уравнение однородное, так как $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2-y^2}$ является однородной функцией нулевого измерения. Действительно,

$$f(tx, ty) = \frac{2(tx \cdot ty)}{(tx)^2 - (ty)^2} = \frac{t^2 \cdot 2xy}{t^2(x^2 - y^2)} = \frac{2xy}{x^2 - y^2},$$

то есть $f(x, y) = f(tx, ty)$.

Делаем подстановку $y = ux$, $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$, уравнение принимает вид:

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{2u}{1 - u^2} \quad \text{или} \quad x\frac{du}{dx} = \frac{u + u^3}{1 - u^2}.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{du}{dx} = \frac{u(1 + u^2)}{(1 - u^2)} \cdot \frac{1}{x},$$

$$\frac{(1 - u^2)}{u(1 + u^2)}\, du = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{1 - u^2}{u(1 + u^2)}\, du = \int \frac{dx}{x} + \ln C.$$

Вычисляем интеграл в левой части, разлагая дробно-рациональную функцию на элементарные дроби

$$\frac{1 - u^2}{u(1 + u^2)} = \frac{A}{u} + \frac{Cu + B}{1 + u^2},$$

$$1 - u^2 = A(1 + u^2) + u(Cu + B),$$

$$1 - u^2 = (A + C)u^2 + Bu + A,$$

откуда следует, что $A = 1$, $B = 0$, $C = -2$. Интегрируя обе части уравнения, получаем

$$\ln u - \ln|1 + u^2| - \ln|x| = \ln C$$

или

$$\ln\frac{u}{(1 + u^2)x} = \ln C \Rightarrow \frac{u}{(1 + u^2)x} = C.$$

Подставляя значение $u = \frac{y}{x}$ и освобождаясь от знаменателя, находим

$$x^2 + y^2 = C_1 y, \quad \text{где} \quad C_1 = \frac{1}{C}$$

Получили семейство кругов, касающихся оси Ox в начале координат. Кроме того, решением является прямая $y = 0$.

Пример 9. Проинтегрировать уравнение

$$(x^2 + y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0.$$

Решение. Разрешим уравнение относительно $\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2xy} \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\frac{y}{x}}$$

— однородное уравнение.

Положим $\frac{y}{x} = u$, $y = xu$, $y' = xu' + u$. Тогда

$$xu' + u = \frac{1 + u^2}{2u} \Rightarrow xu' = \frac{1 + u^2 - 2u^2}{2t} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow xu' = \frac{1 - u^2}{2u} \Rightarrow u' = \frac{1 - u^2}{2u} \cdot \frac{1}{x}$$

— уравнение с разделяющимися переменными. $\frac{2u\,du}{1-u^2} = \frac{dx}{x}$ интегрируем

$$-\ln|1 - u^2| = \ln|x| - \ln C,$$

потенцируем

$$x(1 - u^2) = C.$$

Подставляя $u = \frac{y}{x}$, получаем

$$x\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) = C \Rightarrow x^2 - y^2 = Cx$$

— общий интеграл.

Ответ: $x^2 - y^2 = Cx$.

II. Рассмотрим уравнение

$$y' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2},$$

не являющееся однородным. Пусть, по крайней мере, одно из чисел c_1 или c_2 не равно нулю. Тогда, если определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, то это уравнение можно привести к однородному путем введения новых переменных X, Y по формулам

$$x = X + x_0, \quad y = Y + y_0,$$

где x_0 и y_0 выбираются так, чтобы в новых переменных уравнение стало однородным.

Действительно, так как $dx = dX$, $dy = dY$, то $y' = \frac{dY}{dX}$. Подставляя

$$x = X + x_0, \quad y = Y + y_0, \quad y' = \frac{dY}{dX}$$

в данное уравнение, получим

$$\frac{dY}{dX} = \frac{a_1X + b_1Y + (a_1x_0 + b_1y_0 + c_1)}{a_2X + b_2Y + (a_2x_0 + b_2y_0 + c_2)}.$$

Для определения x_0, y_0 получаем два уравнения

$$\begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0 \\ a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = 0 \end{cases}$$

Так как определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, то система имеет единственное решение.

В результате получаем уравнение, однородное относительно новых переменных

$$\frac{dY}{dX} = \frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}.$$

Пример 10. Найти общий интеграл уравнения

$$y' = \frac{x - y + 1}{x + y - 3}.$$

Решение. Вычислим определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Поскольку $\Delta \neq 0$, то данное уравнение можно свести к однородному. Для этого вводим новые переменные

$$x = X + x_0, \quad y = Y + y_0.$$

Тогда $dx = dX$, $dy = dY$ и $y' = \frac{dY}{dX}$ и уравнение принимает вид

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X - Y + (x_0 - y_0 + 1)}{X + Y + (x_0 + y_0 - 3)}.$$

Выберем x_0, y_0 таким образом, чтобы выражения в скобках обратились в нуль. Решая эту систему, получаем $x_0 = 1$, $y_0 = 2$. Исходное уравнение принимает вид

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X - Y}{X + Y}.$$

Это уравнение является однородным. Решаем его:

$$\frac{Y}{X} = u \Rightarrow Y = uX, \quad \frac{dY}{dX} = u + X \cdot u'.$$

Подставим Y и $\frac{dY}{dX}$ в уравнение.

$$u + Xu' = \frac{1-u}{1+u}.$$

Отсюда

$$Xu' = \frac{1-u}{1+u} - u \Rightarrow Xu' = \frac{1-2u-u^2}{1+u}; \quad Xu' = -\frac{u^2+2u-1}{1+u}.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Полагая, что $u^2 + {}$ $+ 2u - 1 \neq 0$, разделим переменные

$$\frac{dX}{X} = -\frac{u+1}{u^2+2u-1}\, du.$$

Общий интеграл этого уравнения

$$\int \frac{dX}{X} = -\int \frac{u+1}{u^2+2u-1}\, du + \ln|C_1|, \quad C_1 \neq 0.$$

Вычислив интегралы, будем иметь

$$\ln|X| = -\frac{1}{2}\ln|u^2+2u-1| + \ln|C_1|.$$

Потенцируя, получаем

$$X = \frac{C_1}{\sqrt{u^2+2u-1}}.$$

Подставляя вместо $u = \frac{Y}{X}$, получим

$$X = \frac{C_1}{\sqrt{\left(\frac{Y}{X}\right)^2 + 2\left(\frac{Y}{X}\right) - 1}}.$$

Переходя к старым переменным, получим общий интеграл исходного уравнения

$$(x-1) = \frac{C_1}{\sqrt{\left(\frac{y-2}{x-1}\right)^2 + 2\left(\frac{y-2}{x-1}\right) - 1}}.$$

III. Рассмотрим теперь случай, когда в уравнении

$$y' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$$

определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{а} \quad \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{a_1}{a_2}.$$

В этом случае $a_2 = \lambda a_1$ и $b_2 = \lambda b_1$, поэтому уравнение можно записать в виде

$$y' = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{\lambda(a_1 x + b_1 y) + c_2}.$$

Такое уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными путем замены

$$z = a_1 x + b_1 y.$$

Пример 11. Найти общий интеграл уравнения

$$y' = \frac{x + y - 2}{-2x - 2y + 3}.$$

Решение. Вычислим $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 0$. Уравнение преобразуется к виду

$$y' = \frac{(x + y) - 2}{-2(x + y) + 3}.$$

Вводим новую функцию

$$z = x + y \Rightarrow y = z - x, \quad y' = z' - 1.$$

Подставляем в уравнение

$$z' - 1 = \frac{z - 2}{-2z + 3}.$$

Отсюда

$$z' = \frac{-z + 1}{-2z + 3}.$$

Полученное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными

$$dx = \frac{2z - 3}{z - 1}\, dz.$$

Общий интеграл уравнения

$$x = 2z - \ln|z - 1| + \ln C,$$

так как

$$\int \frac{2z - 3}{z - 1}\, dz = \int \left(2 - \frac{1}{z - 1}\right) dz = 2z - \ln|z - 1|.$$

Потенцируя обе части общего интеграла, получаем

$$e^x = \frac{Ce^{2z}}{z - 1}.$$

Это выражение запишем в виде

$$e^x(z - 1) = Ce^{2z}.$$

Подставив сюда $z = x + y$ и сократив на $e^z \neq 0$, получим

$$x + y - 1 = Ce^{x+2y}$$

— общий интеграл исходного уравнения, где C — произвольная постоянная.

Задачи для самостоятельного решения

С помощью изоклин начертить (приближенно) решения данных уравнений:

11. $y' = x + y$;
12. $y' = y - x^2$;
13. $2(y + y') = x + 3$;
14. $y' = \frac{x^2+y^2}{2} - 1$;
15. $(y^2 + 1)y' = y - x$;
16. $yy' + x = 0$;
17. $xy' = 2y$;
18. $xy' + y = 0$;
19. $y' + y = (x - y)^2$;
20. $y' = x - e^y$;
21. $y(y' + x) = 1$.

Найти решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющие заданным условиям:

22. $y' = \sqrt[3]{x^2}$, $y(0) = 1$;
23. $y' = \frac{3}{x}$, $y(1) = 2$;
24. $y' = e^{2x}$, $y(0) = 0$;
25. $y' = \frac{1}{\sin^2 x}$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$;
26. $y' = \cos^3 x$, $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$;
27. $y' = \frac{1}{4+x^2}$, $y(2) = \frac{\pi}{8}$;
28. $y' = \frac{1}{x^2}$, $y(1) = 0$;
29. $y' = -y$, $y(2) = 4$;
30. $y' = \frac{1}{y^2}$, $y(1) = 1$;
31. $y' = y^3$, $y(0) = 1$.

Решить данные уравнения. Найти также решения, удовлетворяющие начальным условиям (в тех задачах, где указаны начальные условия):

32. $\sin x\, dx + \cos 2y\, dy = 0$;
33. $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{4+y^2}} = 0$;
34. $xe^{x^2}\, dx + \operatorname{tg} y\, dy = 0$;
35. $\frac{dx}{x} + \frac{dy}{1+y^2} = 0$, $y(1) = \sqrt{3}$;
36. $\sqrt{x}\, dx + \frac{dy}{\cos^2 y} = 0$, $y(0) = \frac{\pi}{4}$;

37. $(x+1)^3\,dy-(y-2)^2\,dx=0$;
38. $\sec^2 x\sec y\,dx+\operatorname{ctg}x\,\sin y\,dy=0$;
39. $(\sqrt{xy}+\sqrt{x})y'-y=0$;
40. $y=y'\cos^2 x\ln y,\ y(\pi)=1$;
41. $x(1+y^2)\,dx+y(1+x^2)\,dy=0$;
42. $yxe^{x^2}\,dx+(1+y)\,dy=0$;
43. $x(1+y^2)\,dx+e^x\,dy=0,\ y(0)=0$;
44. $\sqrt[3]{y^2}\,dx-\frac{1}{3}\,dy=0$;
45. $y'=y^2\cos 2x,\ y\left(\frac{\pi}{4}\right)=2$;
46. $\frac{x\,dx}{1+x^2}+\frac{y^2\,dy}{1+y^3}=0$;
47. $\frac{\operatorname{tg}y\,dx}{\cos^2 x}+\frac{\operatorname{tg}x\,dy}{\cos^2 y}=0$;
48. $3e^x\operatorname{tg}y\,dx+(1-e^x)\frac{dy}{\cos^2 y}=0$;
49. $x^2(1+y)\,dx+(x^3-1)(y-1)\,dy=0$;
50. $2x\,dx+3y\,dy=4x^2y\,dy-2xy^2\,dx$;
51. $y'=y^2\cos x$;
52. $(1+x^2)\,dy-2xy\,dx=0,\ y(0)=1$;
53. $y'=\frac{y+1}{x},\ y(1)=0$;
54. $(1+e^x)yy'=e^x,\ y(0)=1$;
55. $y'\operatorname{ctg}x+y=2,\ y(0)=-1$;
56. $y'=3\sqrt[3]{y^2},\ y(2)=0$;
57. $xy'+y=y^2,\ y(1)=0,5$;
58. $2x^2yy'+y^2=2$;
59. $y'-xy^2=2xy$;
60. $e^{-x}\left(1+\frac{dy}{dx}\right)=1$;
61. $y'=10^{x+y}$;
62. $xy\,dx+(x+1)\,dy=0$;
63. $\sqrt{y^2+1}\,dx=xy\,dy$;
64. $(x^2-1)y'+2xy^2=0,\ y(0)=1$;
65. $(1+x)y\,dx+(1-y)x\,dy=0$;
66. $x^2y^2y'+1=y$;
67. $y\frac{dy}{dx}+x=t$.

Уравнения вида $y'=f(ax+by)$ приводятся к уравнениям с разделяющимися переменными заменой $z=ax+by$ (или $z=ax+by+c$, где c — любое число).

68. $y'=\cos(y-x)$;
69. $y'-y=2x-3$;
70. $(x+2y)y'=1,\ y(0)=-1$;
71. $y'=\sqrt{4x+2y-1}$.

Решить уравнения:

72. $y' = \frac{y}{x+y}$;
73. $x\,dy = y(1 + \ln y - \ln x)\,dx$;
74. $y' = \frac{-x+2y-4}{2x-y+5}$;
75. $y' = -\frac{2x+3y-1}{4x+6y-5}$;
76. $y^2 + x^2 y' = xyy'$;
77. $(x^2 + y^2)y' = 2xy$;
78. $xy' - y = x \ln \frac{y}{x}$;
79. $xy' = y - xe^{y/x}$;
80. $xy' - y = (x + y) \ln \frac{x+y}{x}$;
81. $xy' = y \cos \ln \frac{y}{x}$;
82. $(y + \sqrt{xy})\,dx = x\,dy$;
83. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$;
84. $(2x - 4y + 6)\,dx + (x + y - 3)\,dy = 0$;
85. $(2x + y + 1)\,dx - (4x + 2y - 3)\,dy = 0$;
86. $(x - y - 1) + (y - x + 2)y' = 0$;
87. $(x + 2y)\,dx - x\,dy = 0$;
88. $(x - y)\,dx + (x + y)\,dy = 0$;
89. $(y^2 - 2xy)\,dx + x^2\,dy = 0$;
90. $2x^3 y' = y(2x^2 - y^2)$;
91. $y^2 + x^2 y' = xyy'$.

§3. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнения Бернулли

Определение 1. Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется дифференциальное уравнение вида:

$$y' + P(x)y = Q(x), \tag{22}$$

где $P(x)$, $Q(x)$ — функции, непрерывные на заданном интервале (a, b).

Замечание. Некоторые уравнения становятся линейными, если в них поменять ролями функцию и аргумент.

3.1. Метод Бернулли решения линейных уравнений

По методу Бернулли решение линейного уравнения ищется в виде

$$y = u(x)v(x),$$

где $u(x)$, $v(x)$ — неизвестные функции.

Найдем $y'(x)$ и подставим в уравнение (22):

$$y' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x),$$
$$u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) + P(x)\cdot u(x)v(x) = Q(x).$$

Далее сгруппируем второй и третий члены этого уравнения и вынесем за скобки $u(x)$:

$$u'(x)v(x) + u(x)[v'(x) + P(x)\cdot v(x)] = Q(x). \qquad (23)$$

Выберем теперь функцию $v(x)$ так, чтобы выражение в квадратных скобках обратилось в нуль, то есть $v(x)$ находим из уравнения

$$v'(x) + P(x)v(x) = 0. \qquad (24)$$

Решаем это уравнение

$$\frac{dv(x)}{dx} + P(x)v(x) = 0, \quad dv(x) + P(x)v(x)\,dx = 0$$

Это уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dv(x)}{v(x)} = -P(x)\,dx, \quad \int\frac{dv(x)}{v(x)} = -\int P(x)\,dx$$
$$\ln|v(x)| = -\int P(x)\,dx + \ln C;$$

потенцируя обе части, получим

$$v(x) = Ce^{-\int P(x)\,dx}.$$

Мы получили целое семейство функций $v(x)$. Нам достаточно выбрать одну функцию этого семейства. Выберем ту, которая получается при $c = 1$

$$v(x) = e^{-\int P(x)\,dx}.$$

Для нахождения $u(x)$ подставим найденное $v(x)$ в уравнение (23), получим

$$u'(x)e^{-\int P(x)\,dx} = Q(x).$$

Решаем это уравнение

$$\frac{du(x)}{dx} = Q(x)e^{\int P(x)\,dx}, u = \int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}\,dx + C,$$

где C — произвольная постоянная. Подставляя $u(x)$ и $v(x)$ в $y = u(x)\cdot v(x)$, получаем решение данного уравнения в виде

$$y(x) = \left[\int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}\,dx + C\right]e^{-\int P(x)\,dx}. \qquad (25)$$

Отметим, что при решении конкретных уравнений нецелесообразно пользоваться громоздкой и трудно запоминаемой формулой (25), а проще усвоить изложенный способ нахождения общего решения линейного уравнения и применять его в каждом конкретном случае.

Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x^2.$$

Решение. Данное уравнение является линейным. Решение ищем в виде $y = uv$. Найдем y'

$$y' = u'v + uv'.$$

Подставим y и y' в данное уравнение

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x} = x^2.$$

Преобразуем это уравнение к виду

$$u'v + u\left(v' - \frac{v}{x}\right) = x^2. \tag{26}$$

Найдем функцию v так, чтобы выражение в скобках обратилось в нуль.

$$v' - \frac{v}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{v}{x}.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}.$$

Общий интеграл этого уравнения

$$\ln|v| = \ln|cx|.$$

Нам нужно найти одну какую-либо функцию v, положим $c = 1$. Получим

$$v = x.$$

Подставляем $v = x$ в уравнение (26):

$$xu' = x^2 \Rightarrow du = x\,dx \Rightarrow u = \frac{x^2}{2} + C.$$

Подставляя найденные u и v в $y = uv$, получим общее решение данного уравнения

$$y = x\left(\frac{x^2}{2} + C\right).$$

Пример 2. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y' - 2xy = \sqrt{x}\,e^{x^2}.$$

Решение. Данное уравнение является линейным дифференциальным уравнением. Общее решение ищем в виде $y = uv$. Найдем y'

$$y' = u'v + uv'.$$

Подставляем y и y' в данное уравнение, получаем

$$u'v + u(v' - 2xv) = \sqrt{x}\, e^{x^2}. \tag{27}$$

Найдем функцию v так, чтобы выражение в скобках обратилось в нуль

$$v' - 2xv = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = 2xv.$$

Разделяем переменные

$$\frac{dv}{v} = 2x\, dx \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = 2\int x\, dx \Rightarrow \ln|v| = x^2 \Rightarrow v = e^{x^2}.$$

Подставляем $v = e^{x^2}$ в уравнение (27):

$$u'e^{x^2} = \sqrt{x}\, e^{x^2} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \sqrt{x} \Rightarrow u = \frac{2}{3}\, x^{\frac{3}{2}} + c.$$

Подставляя найденные значения u и v в $y = uv$, получим общее решение данного уравнения

$$y = \left(\frac{2}{3}\, x^{\frac{3}{2}} + c\right) e^{x^2}.$$

Пример 3. Найти решение дифференциального уравнения

$$(1 + x^2)y' - 2xy = 1 + x^2,$$

удовлетворяющее условию $y(1) = 0$.

Решение. Разделим обе части данного уравнения на $(1 + x^2)$

$$y' - \frac{2x}{1 + x^2}\, y = 1.$$

Общее решение этого уравнения ищем в виде $y = uv$, тогда $y' = u'v + uv'$. Подставляем y и y' в данное уравнение и преобразуем его:

$$u'v + u\left(v' - \frac{2x}{1 + x^2}\, v\right) = 1. \tag{28}$$

Далее найдем v так, чтобы выражение в скобках обратилось в нуль:

$$v' - \frac{2xv}{1 + x^2} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{2xv}{1 + x^2} \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{2x\, dx}{1 + x^2}$$

$$\int \frac{dv}{v} = 2\int \frac{x\, dx}{1 + x^2} \Rightarrow \ln|v| = \ln|1 + x^2| \Rightarrow v = 1 + x^2.$$

Подставляя $v = 1 + x^2$ в уравнение (28), получим

$$u'(1 + x^2) = 1.$$

Отсюда

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{1 + x^2} \Rightarrow du = \frac{dx}{1 + x^2} \Rightarrow u = \operatorname{arctg} x + c.$$

Подставляя найденные u и v в $y = uv$, получим общее решение данного уравнения

$$y = (\operatorname{arctg} x + c)(1 + x^2).$$

Найдем теперь решение, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 0$. Подставляем $x = 1$, $y = 0$ в общее решение

$$0 = 2(\operatorname{arctg} 1 + c), \quad 0 = 2\left(\frac{\pi}{4} + c\right) \Rightarrow c = -\frac{\pi}{4}.$$

Следовательно, решение уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 0$, имеет вид

$$y = \left(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{4}\right)(1 + x^2).$$

3.2. Метод вариации произвольной постоянной решения линейных уравнений

Метод вариации произвольной постоянной решения линейного неоднородного уравнения

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

состоит в следующем.

Сначала ищется решение однородного уравнения, соответствующего линейному уравнению:

$$y' + P(x)y = 0.$$

Затем в общем решении однородного уравнения постоянную C считают некоторой дифференцируемой функцией от x: $C = C(x)$. Эту функцию находят из дифференциального уравнения с разделяющимися переменными, которое получается в результате подстановки общего решения однородного уравнения в неоднородное уравнение.

Пример 4. Решить уравнение

$$y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}.$$

Решение. Сначала находим общее решение однородного уравнения, соответствующего данному:

$$y' + y \operatorname{tg} x = 0.$$

Разделяем переменные и после интегрирования находим $y = C\cos x$, где C — произвольная постоянная.

Для получения всех решений исходного уравнения считаем $C = C(x)$ и требуем, чтобы функция $y = C(x)\cos x$ удовлетворяла ему. Для этого находим y' и подставляем y, y' в данное уравнение:

$$y' = (C(x)\cos x)' = C'(x)\cos x - C(x)\sin x,$$

$$C'(x)\cos x - C(x)\sin x + C(x)\cos x \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x},$$

откуда, после сокращений, $C'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$. Отсюда находим $C(x) = \operatorname{tg} x + C_0$, где C_0 — новая произвольная постоянная. Подставив значение $C(x)$ в равенство $y = C(x)\cos x$, окончательно получим

$$y = C(x)\cos x = (\operatorname{tg} x + C_0)\cos x = \sin x + C_0\cos x.$$

Замечание. Для новой произвольной постоянной можно использовать старое обозначение C. Таким образом, в рассмотренном примере $y = \sin x + C\cos x$ есть общее решение, а C — произвольная постоянная.

Пример 5. Решить уравнение

$$(2x+1)y' = 4x + 2y.$$

Решение. Решаем соответствующее однородное уравнение

$$(2x+1)y' = 2y.$$

Его общее решение имеет вид $y = C(2x+1)$. Применим метод вариации произвольной постоянной. Имеем $y = C(x)(2x+1)$, находим y' и подставляем y и y' в исходное уравнение:

$$\left(C'(x)(2x+1) + 2C(x)\right)(2x+1) = 4x + 2C(x)(2x+1) \;\Rightarrow\; (2x+1)^2 C'(x) = 4x.$$

Отсюда находим

$$C(x) = 4\int \frac{x\,dx}{(2x+1)^2} + C_0 = \ln|2x+1| + \frac{1}{2x+1} + C_0.$$

Таким образом, окончательно получаем

$$y = (2x+1)(\ln|2x+1| + C) + 1.$$

3.3. Уравнения Бернулли

Определение 2. Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n, \quad n = \text{const},$$

где $P(x)$, $Q(x)$ — непрерывные функции на заданном интервале (a, b).

Заметим, что при $n = 0$, $n = 1$ мы получаем линейные уравнения.

Уравнение Бернулли можно привести к линейному с помощью введения новой переменной. Разделим обе части уравнения Бернулли на y^n ($y \neq 0$):

$$\frac{1}{y^n}\,y' + P(x)\frac{1}{y^{n-1}} = Q(x)$$

и введем новую переменную z по формуле

$$z = \frac{1}{y^{n-1}}.$$

Тогда

$$y' = \frac{1-n}{y^n}\,y'$$

и уравнение Бернулли принимает вид

$$\frac{1}{1-n}z' + P(x)z = Q(x)$$

или

$$z' + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x).$$

Относительно z получили линейное уравнение. Если найти общее решение этого уравнения и вместо z подставить $z = y^{1-n}$, то получим общий интеграл уравнения Бернулли. Если $n > 0$, то уравнение Бернулли имеет еще решение $y = 0$.

Замечание. Уравнение Бернулли можно решать так же, как и линейное дифференциальное уравнение, то есть искать его решение в виде $y = uv$.

Пример 6. Найти множество всех решений уравнения

$$y' - \frac{y'}{2x} = \frac{x^2}{2y}, \quad x > 0.$$

Решение. Данное уравнение является уравнением Бернулли. В данном случае $n = -1$. Решение ищем в виде $y = uv$. Найдем y' и подставим y и y' в данное уравнение:

$$y' = u'v + uv', \quad u'v + uv' - \frac{uv}{2x} = \frac{x^2}{2uv}.$$

Преобразуем уравнение

$$u'v + u\left(v' - \frac{v}{2x}\right) = \frac{x^2}{uv} \tag{29}$$

и найдем v так, чтобы выражение в скобках обратилось в нуль:

$$v' - \frac{v}{2x} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{dx}{2x} \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|v| = \frac{1}{2}\ln|x| \Rightarrow v = \sqrt{x}$$

Подставляя $v = \sqrt{x}$ в уравнение (29), получим:

$$u'v = \frac{x^2}{2uv} \Rightarrow \frac{du}{dx}\sqrt{x} = \frac{x^2}{u\sqrt{x}} \Rightarrow u\,du = \frac{x\,dx}{2} \Rightarrow \frac{u^2}{2} = \frac{x^2}{4} + c_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u^2 = \frac{x^2}{2} + c, \quad \text{где } c = 2c_1.$$

Отсюда

$$u = \pm\sqrt{\frac{x^2}{2} + c}.$$

Подставляя найденные u, v в $y = uv$, получим:

$$y = \pm\sqrt{\frac{x^3}{2} + cx}.$$

Пример 7. Найти решение уравнения $y' - \frac{4y}{x} = x\sqrt{y}$, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 1$.

Решение. Данное уравнение является уравнением Бернулли, при этом $n = \frac{1}{2}$. Ищем решение в виде $y = uv$. Находим y' и подставляем y и $y' = u'v + uv'$ в данное уравнение

$$u'v + uv' - \frac{4uv}{x} = x\sqrt{uv}.$$

Преобразуем уравнение

$$u'v + u\left(v' - \frac{uv}{x}\right) = x\sqrt{uv} \tag{30}$$

и находим v:

$$v' - \frac{4v}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = 4\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|v| = 4\ln|x| \Rightarrow v = x^4.$$

Подставляя $v = x^4$ в уравнение (30), получаем

$$x^4\frac{du}{dx} = x\sqrt{u}\cdot x^2 \Rightarrow \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int \frac{dx}{x} + c \Rightarrow 2\sqrt{u} = \ln|x| + c \Rightarrow u = \frac{1}{4}(\ln|x| + c)^2.$$

Подставляя найденные значения u и v в $y = uv$, получим общее решение данного уравнения

$$y = \frac{1}{4}\, x^4 (\ln|x| + c)^2.$$

Найдем теперь решение, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 1$. Подставляя в общее решение $x = 1$, $y = 1$, получим $c = 2$. Таким образом, решение данного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y(1) = 1$, имеет вид

$$y = \frac{1}{4}\, x^4 (\ln|x| + 2)^2.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти общее решение или решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

92. $y' - y \operatorname{ctg} x = \sin x$;

93. $y' - y = e^x$;

94. $x^2 \frac{dy}{dx} - 2xy = -3$, $y(-1) = 1$;

95. $y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$;

96. $(1 + x^2) y' - 2xy = 1 + x^2$, $y(1) = 0$;

97. $y' + \frac{y}{x} = x^2$;

98. $y' - y \operatorname{tg} x = \cos x$;

99. $y' + 2xy = x$;

100. $y' - 4y = e^{2x}$;

101. $y' + \frac{x}{1-x^2}\, y = 1$;

102. $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{2x}{\cos x}$;

103. $y' - \frac{x}{x^2+1}\, y = x$, $y(1) = 0$;

104. $y' + y + \frac{4x(x+1)}{y} = 0$, $y(0) = 1$;

105. $xy' - 2y = 2x^4$;

106. $(2x + 1) y' = 4x + 2y$;

107. $y' + y \operatorname{tg} x = \sec x$;

108. $(xy + e^x)\, dx - x\, dy = 0$;

109. $y' + y = x\sqrt{y}$;

110. $x^2 y^2 y' + xy^3 = 1$;

111. $\cos y\, dx = (x + 2\cos y) \sin y\, dy$.

§4. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель

4.1. Уравнение в полных дифференциалах

Уравнение вида

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \tag{31}$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции $F(x,y)$, то есть

$$\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Чтобы решить уравнение (31), надо найти функцию $F(x,y)$, полный дифференциал которой равен левой части уравнения (31)

$$dF(x,y) = F'_x\,dx + F'_y\,dy.$$

Тогда общее решение уравнения (31) можно написать в виде

$$F(x,y) = c,$$

где c — произвольная постоянная.

Пример 1. Решить уравнение

$$(2x + 3x^2 y)\,dx + (x^3 - 3y^2)\,dy = 0. \tag{32}$$

Решение. Найдем частные производные $\frac{\partial M}{\partial y}$ и $\frac{\partial N}{\partial x}$:

$$\frac{\partial(2x + 3x^2 y)}{\partial y} = 3x^2; \quad \frac{\partial}{\partial x}(x^3 - 3y^2) = 3x^2.$$

Так как $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial y}$, то уравнение (32) является уравнением в полных дифференциалах. Найдем $F(x,y)$:

$$F'_x = 2x + 3x^2 y; \quad F'_y = x^3 - 3y^2. \tag{33}$$

Интегрируем по x первое из уравнений (33), считая y постоянным, вместо постоянной интегрирования поставим $\varphi(y)$ неизвестную функцию от y

$$F(x,y) = \int (2x + 3x^2 y)\,dx = x^2 + x^3 y + \varphi(y).$$

Далее найдем F'_y и подставим во второе уравнение (33)

$$F'_y = x^3 - 3y^2; \quad \varphi'(y) = -3y^2; \quad \varphi(y) = -3y^2; \quad \varphi(y) = -y^3 + \mathrm{const}\,.$$

Следовательно,

$$F(x,y) = x^2 + x^3 y - y^3$$

и общее решение имеет вид:

$$x^2 + x^3y - y^3 = c.$$

4.2. Интегрирующий множитель

Интегрирующим множителем для уравнения

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \tag{34}$$

называется такая функция $m(x,y) \not\equiv 0$, после умножения на которую уравнение (34) превращается в уравнение в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель существует, если функции $M(x,y)$, $N(x,y)$ имеют непрерывные частные производные и не обращаются в нуль одновременно. Но общего метода для его нахождения нет. Для решения некоторых уравнений можно применить метод выделения полных дифференциалов, используя формулы

$$d(xy) = y\,dx + x\,dy; \qquad dy^2 = 2y\,dy$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}; \quad d(\ln y) = \frac{dy}{y} \text{ и т.д.}$$

Пример 2. Решить уравнение

$$y\,dx - (4x^2y + x)\,dy = 0. \tag{35}$$

Сначала выделяем группу членов, представляющую собой полный дифференциал

$$y\,dx - x\,dy = -x^2\,d(y/x).$$

Тогда делим уравнение на $-x^2$, получим

$$d\left(\frac{y}{x}\right) + 4y\,dy = 0, \quad d\left(\frac{y}{x}\right) + d(2y^2) = 0.$$

Это уравнение в полных дифференциалах. Интегрируя, получим

$$\frac{y}{x} + 2y^2 = c.$$

Задачи для самостоятельного решения

Проверить, что данные уравнения являются уравнениями в полных дифференциалах, и решить их:

112. $2xy\,dy + (x^2 - y^2)\,dy = 0;$

113. $(2 - 9xy^2)\,dx + (4y^2 - 6x^3)y\,dy = 0;$

114. $e^{-y}\,dx - (2y + xe^{-y})\,dy = 0;$

115. $\frac{y}{x}\,dx + (y^3 + \ln x)\,dy = 0;$

116. $\frac{3x^2+y^2}{y^2}\,dx - \frac{2x^3+5y}{y^3} = 0;$

117. $2x(1+\sqrt{x^2y^2})\,dx - (\sqrt{x^2-y})\,dy = 0;$

118. $(1+y^2\sin 2x)\,dx - 2y\cos^2 x\,dy = 0;$

119. $3x^2(1+\ln y)\,dx = \left(2y - \frac{x^3}{y}\right)\,dy;$

120. $y^2\,dx - (xy+x^3)\,dy = 3;$

121. $y^2\,dx + (e^x - y)\,dy = 0.$

Разные уравнения первого порядка:

122. $xy' + x^2 + xy - y = 0;$

123. $2xy' + y^2 = 1;$

124. $(2xy^2 - y)\,dx + x\,dy = 0;$

125. $(xy' + y)^2 = x^2y';$

126. $y - y' = y^2 + xy';$

127. $(x + 2y^3)y' = y;$

128. $y'^3 - y'e^{2x} = 0;$

129. $x^2y' = y(x+y);$

130. $(1-x^2)\,dy + xy\,dx = 0;$

131. $y'^2 + 2(x-1)y' - 2y = 0;$

132. $y + y'\ln^2 y = (x + 2\ln y)y';$

133. $xy' - 2xy = 3y;$

134. $x + yy' = y^2(1+y'^2);$

135. $y = (xy' + 2y)^2;$

136. $y' = \frac{1}{x-y^2};$

137. $y'^3 + (3x-6)y' = 3y;$

138. $x - \frac{y}{y'} = \frac{2}{y};$

139. $2y'^3 - 3y'^2 + x = y;$

140. $(x+y)^2y' = 1;$

141. $2x^3yy' + 3x^2y^2 + 7 = 0.$

§5. Дифференциальные уравнения второго порядка. Уравнения, допускающие понижение порядка

Среди уравнений второго порядка имеются такие типы уравнений, которые могут быть сведены к дифференциальным уравнениям первого порядка. Рассмотрим некоторые из таких типов уравнений.

5.1. Уравнения, не содержащие y в явном виде

Уравнение вида $y'' = f(x, y')$ явно не содержит y. Обозначим $y' = p$. Тогда $y'' = p'$. Подставив это в уравнение, получим

$$p' = f(x, p).$$

Получили дифференциальное уравнение первого порядка. Его общий интеграл имеет вид

$$y = \int p(x, c_1)\, dx + c_2,$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные.

Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$(1 + x^2)y'' + xy' = 2.$$

Решение. Данное дифференциальное уравнение не содержит y. Поэтому для его решения положим $y' = p$. Тогда $y'' = p'$. Подставим в данное дифференциальное уравнение

$$(1 + x^2)p' + xp = 2.$$

Относительно новой неизвестной функции p получили линейное уравнение. Решение этого уравнения ищем в виде $p = uv$, $p' = u'v + uv'$. Подставляя в уравнение p, p' и преобразуя это уравнение, получим

$$(1 + x^2)u'v + [(1 + x^2)v' + xv]u = 2.$$

Далее находим v: $(1 + x^2)v' + xv = 0$. Решаем это уравнение:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{x\, dx}{1 + x^2} \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\frac{1}{2} \int \frac{d(1 + x^2)}{1 + x^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ln|v| = -\frac{1}{2} \ln|1 + x^2| \Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Далее находим u:

$$\sqrt{1 + x^2}\, u' = 2 \Rightarrow du = \frac{2}{\sqrt{1 + x^2}}\, dx \Rightarrow$$
$$\Rightarrow u = 2 \int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} + c_1, \quad u = 2 \ln|x + \sqrt{1 + x^2}| + c.$$

Теперь находим p:

$$p = [2 \ln|x + \sqrt{1 + x^2}| + c_1] \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Так как $p = y'$, то

$$y' = [2\ln|x + \sqrt{1+x^2}| + c_1]\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Находим y:

$$y = \int [2\ln|x + \sqrt{1+x^2}| + c_1]\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} + c_2 = 2\int \ln|x + \sqrt{1+x^2}|\times$$
$$\times d\ln|x + \sqrt{1+x^2}| + c_1 \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} + c_2 =$$
$$= \ln^2|x + \sqrt{1+x^2}| + c_1 \ln|x + \sqrt{1+x^2}| + c_2$$

Таким образом, общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = \ln^2|x + \sqrt{1+x^2}| + c_1 \ln|x + \sqrt{1+x^2}| + c_2.$$

5.2. Уравнения, не содержащие x в явном виде

Уравнение вида $y'' = f(y, y')$ явно не содержит x. Положим $y' = p(y)$, где $p(y)$ — новая неизвестная функция. Найдем y''. По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}.$$

Подставляя выражения для y, y' в данное уравнение, получим

$$p\frac{dp}{dy} = f(y, p).$$

Относительно p получили дифференциальное уравнение первого порядка.

Пусть нашли его общее решение

$$p = p(y, c_1),$$

где c_1 — произвольная постоянная. Так как $p = y'$, то $y' = p(y, c_1)$ — это уравнение с разделяющимися переменными.

$$dx = \frac{dy}{p(y, c_1)} \Rightarrow x = \int \frac{dy}{p(y, c_1)} + c_2,$$

где c_2 — произвольная постоянная. В результате получили общий интеграл данного уравнения.

Пример 2. Найти общее решение уравнения $yy'' = y'^2$.

Решение. Данное уравнение не содержит явно x. Поэтому для его решения полагаем $y' = p$, тогда $y'' = p\frac{dp}{dy}$. Подставляем в уравнение

$$yp\frac{dp}{dy} = p^2 \Rightarrow y\frac{dp}{dy} = p \quad (p \neq 0)$$

— уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \int \frac{dp}{p} = \int \frac{dy}{y} + \ln|c_1| \Rightarrow \ln|p| = \ln|y| + \ln|c_1|.$$

Потенцируя обе части этого равенства, получаем $p = c_1 y$. Далее,

$$y' = c_1 y \Rightarrow \frac{dy}{y} = c_1\,dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = c_1 \int dx + \ln c_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ln|y| = c_1 x + \ln|c_2| \Rightarrow y = c_2 e^{c_1 x} \text{ — общее решение.}$$

5.3. Уравнения, разрешенные относительно второй производной

Дифференциальное уравнение, разрешенное относительно второй производной, имеет вид

$$y'' = f(x).$$

Обозначим $y' = p$, тогда $y'' = p'$ и уравнение принимает вид $p' = f(x)$ — уравнение первого порядка с разделяющимися переменными.

$$\frac{dp}{dx} = f(x) \Rightarrow dp = f(x)\,dx \Rightarrow \int dp = \int f(x)\,dx + c_1 \Rightarrow p = \int f(x)\,dx + c_1.$$

Далее вместо p подставляем $y' = \frac{dy}{dx}$.

$$\frac{dy}{dx} = \int f(x)\,dx + c_1 \Rightarrow dy = \left(\int f(x)\,dx + c_1\right)\,dx,$$
$$y = \int \left(\int f(x)\,dx\right)\,dx + c_1 \int dx + c_2,$$
$$y = \int \left(\int f(x)\,dx\right)\,dx + c_1 x + c_2 \text{ — общее решение.}$$

Пример 3. Решить уравнение $y'' = x^2$.

Решение. Обозначим $y' = p$, тогда $y'' = p'$. Подставляем в уравнение

$$p' = x^2 \Rightarrow \frac{dp}{dx} = x^2 \Rightarrow dp = x^2\,dx,$$

$$p = \int x^2\,dx + c_1 \Rightarrow p = \frac{x^3}{3} + c_1,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3}{3} + c_1 \Rightarrow dy = \left(\frac{x^3}{3} + c_1\right)dx,$$

$$y = \int \frac{x^3}{3}\,dx + c_1 \int dx + c_2,$$

$$y = \frac{x^4}{12} + c_1 x + c_2 \text{ — общее решение.}$$

Задачи для самостоятельного решения

Решить уравнения:

142. $(3x+2)y'' + 7y' = 0$;
143. $(1+x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0$;
144. $y^3 y'' + 1 = 0$;
145. $y'^2 - yy'' = y^2 y'$;
146. $y'' = 3\sqrt{y}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$;
147. $xy'' + y' = \sqrt{x}$, $y(1) = 1$, $y(1) = 0$;
148. $2yy'' = y'^2 + 1$;
149. $y^2 + y'^2 - 2yy'' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$;
150. $1 + y'^2 = 2yy''$;
151. $(x+1)y'' = y' + 1$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

§6. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка

6.1. Основные определения

Определение 1. Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \qquad (36)$$

где $a_1(x)$, $a_2(x)$, …, $a_n(x)$, $f(x)$ — функции, заданные на некотором интервале.

Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение называется линейным однородным дифференциальным уравнением n-го порядка; если $f(x) \not\equiv 0$, то линейным неоднородным уравнением.

Общее решение уравнения (36) имеет вид

$$y = \bar{y} + y^*,$$

где $\bar{y}$ — общее решение соответствующего однородного уравнения, y^* — частное (какое-нибудь) решение неоднородного дифференциального уравнения.

Если общее решение однородного уравнения $\bar{y}(x)$ найдено, то частное решение может быть найдено методом вариации произвольных постоянных.

$$\begin{aligned} &\bar{y}(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n, \\ &y^*(x) = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2 + \ldots + c_n(x) y_n \end{aligned} \tag{37}$$

Функции $c_i(x)$ определяются из системы

$$\begin{cases} c_1' y_1 + \ldots + c_n' y_n = 0, \\ c_1' y_1' + \ldots + c_n' y_n' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1' y_1^{(n-2)} + \ldots + c_n' y_n^{(n-2)} = 0, \\ c_1' y_1^{(n-1)} + \ldots + c_n' y^{(n-1)} = f(x). \end{cases} \tag{38}$$

6.2. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

Чтобы решить линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \tag{39}$$

надо составить характеристическое уравнение

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \tag{40}$$

и найти его корни λ_1, λ_2, …, λ_n.

Общее решение уравнения (39) есть сумма, состоящая из слагаемых вида $c_i e^{\lambda_i x}$ для каждого простого корня λ_i уравнения (40) и слагаемых вида

$$(c_{m+1} + c_{m+2} x + c_{m+3} x^2 + \ldots + c_{m+k} x^{k-1}) e^{\lambda x} \tag{41}$$

для каждого кратного корня λ уравнения (40). Все c_i —произвольные постоянные. Коэффициенты уравнения (39) и корни λ могут быть вещественными и комплексными. Если же коэффициенты (39) вещественные, то решение можно тоже записать в вещественной форме и в случае комплексных корней λ. Для каждой пары комплексных сопряженных корней $\lambda = \alpha \pm \beta i$ в формулу общего решения включаются слагаемые

$$c_{m+1}e^{\alpha x}\cos\beta x + c_{m+2}e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

если эти корни простые, и слагаемые

$$P_{k-1}(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q_{k-1}(x)e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

если каждый из корней $\alpha+\beta i$ и $\alpha-\beta i$ имеет кратность k. Здесь многочлены P_{k-1}, Q_{k-1} степени $k-1$, аналогичные многочлену в (41), их коэффициенты постоянны.

Пример 1. Решить уравнение

$$y^{(\mathrm{V})} - 2y^{(\mathrm{IV})} - 16y' + 32y = 0.$$

Решение. Пишем характеристическое уравнение

$$\lambda^5 - 2\lambda^4 - 16\lambda + 32 = 0.$$

Разлагая левую часть на множители, находим корни

$$(\lambda-2)(\lambda^4-16) = 0 \qquad (\lambda-2)^2(\lambda+2)(\lambda^2+4) = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2; \quad \lambda_3 = -2; \quad \lambda_4 = 2i; \quad \lambda_5 = -2i$$

По изложенным выше правилам пишем общее решение

$$y = (c_1 + c_2x)e^{2x} + c_3e^{-2x} + c_4\cos 2x + c_5\sin 2x.$$

6.3. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами

Если правая часть линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами состоит из сумм и произведений функций

$$b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m, \quad e^{ax}, \quad \cos\beta x, \quad \sin\beta x,$$

то частное решение неоднородного уравнения можно искать методом неопределенных коэффициентов.

Для уравнений с правой частью $P_m(x)e^{\nu x}$, частное решение имеет вид

$$y^* = x^sQ_m(x)e^{\nu x}. \tag{42}$$

Число $s=0$, если ν — не корень характеристического уравнения (40), а если ν — корень, то s равно кратности этого корня. Чтобы найти коэффициенты многочлена $Q_m(x)$, надо решение (42) подставить в дифференциальное уравнение и приравнять коэффициенты при подобных членах в левой и правой частях уравнения.

Если коэффициенты левой части уравнения вещественны, то для уравнения с правой частью

$$e^{\alpha x}(P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x) \tag{43}$$

частное решение ищется в виде

$$y^* = x^s e^{\alpha x}(R_m(x)\cos\beta x + T_m(x)\sin\beta x),$$

где $s = 0$, если $\alpha + \beta i$ не корень характеристического уравнения и s равно кратности корня $\alpha + \beta i$, а R_m, T_m — многочлены степени m, равной наибольшей из степеней P и Q. Коэффициенты многочленов находятся путем приравнивания их при подобных членах правой и левой частей уравнения.

Пример 2. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''' + 3y'' - 4y' = x + e^x + \sin x.$$

Решение. Найдем сначала решение соответствующего однородного уравнения

$$y''' + 3y'' - 4y' = 0.$$

Составляем характеристическое уравнение и решаем его

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2 + 3\lambda - 4) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = -4.$$

Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$\bar{y} = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-4x}.$$

Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде суммы

$$y^* = y_1^* + y_2^* + y_3^*,$$

где y_1^*, y_2^*, y_3^* — частные решения соответствующих неоднородных уравнений

$$\begin{aligned} y''' + 3y'' - 4y' &= x, & y_1^* &= x(Ax + B),\\ y''' + 3y'' - 4y' &= e^x, & y_2^* &= Cxe^x,\\ y''' + 3y'' - 4y' &= \sin x, & y_3^* &= D\cos x + E\sin x. \end{aligned}$$

Таким образом, частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y^* = x(Ax + B) + Cxe^x + D\cos x + E\sin x.$$

Найдем коэффициенты A, B, C, D, E. Для этого вычислим производные $y^{*\prime}$, $y^{*\prime\prime}$, $y^{*\prime\prime\prime}$, подставим в данное уравнение и приведем подобные члены:

$$\begin{aligned} y^{*\prime} &= 2Ax + B + Ce^x + Cxe^x - D\sin x + E\cos x,\\ y^{*\prime\prime} &= 2A + 2Ce^x + Cxe^x - D\cos x - E\sin x,\\ y^{*\prime\prime\prime} &= 3Ce^x + Cxe^x + D\sin x - E\cos x, \end{aligned}$$

$$\begin{gathered} -8Ax + (6A - 4B) + 5Ce^x + (-3D - 5E)\cos x + (5D - 3E)\sin x = \\ = x + e^x + \sin x, \end{gathered}$$

$$\begin{array}{l|l} x & \\ x^0 & \\ e^x & \\ \cos x & \\ \sin x & \end{array}\left\{\begin{array}{l} -8A = 1,\\ \;\; 6A - 4B = 0,\\ \;\; 5C = 1,\\ -3D - 5E = 0,\\ \;\; 5D - 3E = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{c} A = -\tfrac{1}{8}; \quad B = -\tfrac{3}{16};\\ C = \tfrac{1}{5}; \quad D = \tfrac{5}{34}; \quad E = -\tfrac{3}{34}. \end{array}$$

Следовательно,

$$y^* = -\frac{1}{8}\,x\left(x + \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{5}\,xe^x + \frac{1}{34}\,(5\cos x - 3\sin x).$$

Подставляя $\bar{y}$ и y^* в формулу $y = \bar{y} + y^*$, получим общее решение данного уравнения:

$$y = c_1 + c_2e^x + c_3e^{-4x} - \frac{1}{8}\,x\left(x + \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{5}\,xe^x + \frac{1}{34}\,(5\cos x - 3\sin x).$$

Пример 3. Решить уравнение

$$y^{\mathrm{IV}} - 3y'' = 9x^2.$$

Решение. Решение y ищем в виде суммы $y = \bar{y} + y^*$. Находим $\bar{y}$:

$$\begin{gathered} \lambda^4 - 3\lambda^2 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_{1,2} = 0,\; \lambda_{3,4} = \pm\sqrt{3} \;\Rightarrow \\ \Rightarrow\; \bar{y} = c_1 + c_2x + c_3e^{-\sqrt{3}x} + c_4e^{\sqrt{3}x}. \end{gathered}$$

Ищем y^* в виде $y^* = x^2(Ax^2 + Bx + C)$. Находим производные и подставляем их в исходное уравнение:

$$\begin{aligned} y^* &= Ax^4 + Bx^3 + Cx^2,\\ y^{*\prime} &= 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx,\\ y^{*\prime\prime} &= 12Ax^2 + 6Bx + 2C,\\ y^{*\prime\prime\prime} &= 24Ax + 6B,\\ y^{*\mathrm{IV}} &= 24A, \end{aligned}$$

$$9x^2 = -36Ax^2 - 18Bx + 6C + 24A.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x и находим:

$$9 = -36A,\ 0 = -18B,\ -6C + 24A \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{1}{4},\ B = 0,\ C = -1.$$

Подставляя найденные значения, получаем общее решение уравнения

$$y = C_1 + C_2x + C_3e^{-\sqrt{3}x} + C_4e^{\sqrt{3}x} - \frac{x^4}{4} - x^2.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти общее решение:

152. $y^{\mathrm{V}} - y' = x + 1$;
153. $y''' - 3y'' + 2y' = e^{2x} + 10\sin x$;
154. $y^{\mathrm{IV}} - y = 0$;
155. $y^{\mathrm{IV}} - 3y'' = 9x^2$;
156. $y''' + y'' = 1 - 6x^2e^{-x}$.

Решить уравнение:

157. $y'' - 3y' + 2y = e^x$;
158. $y'' + 6y' + 5y = 25x^2 - 2$;
159. $y''2y' + 10y = 37\cos 3x$;
160. $y'' - 6y' + 9y = 3x - 8e^x$;
161. $y'' - 5y' + 4y = x - 2$;
162. $y'' + 2y' = x^2 + 1$;
163. $y'' + 2y' - 3y = e^{-2x}$;
164. $y'' + y' = xe^{-x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$;
165. $y'' - 6y' + 8y = 3 - 4x^2$;
166. $y'' + 3y' = 2 + x$;
167. $y'' + 2y' = e^{-2x}$;
168. $y'' + 9y = e^{3x}$;
169. $y'' + 4y' + 3y = xe^{-x}$;
170. $y'' - 2y' + y = e^x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;
171. $y'' + 4y = 2x + 1$, $y(0) = 1$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$;
172. $y'' - y' - 6y = 5\cos x - 2\sin x$;
173. $y'' + y = \cos x$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 3$;
174. $y'' - y = 3e^{2x}\cos x$;
175. $y'' + 3y' - 4y = x^2 + 2e^x + 5\sin 3x$;
176. $y'' + y = 2\sin x + 3\cos x$;
177. $y'' - 4y' + 3y = 5\sin 2x + \cos 2x + e^x$.

Ответы

1. $y = e^{xy'/y}$. **2.** $y' = 3y^{2/3}$. **3.** $y^2 + y'^2 = 1$. **4.** $x^2y' - xy = yy'$. **5.** $2xyy' - y^2 = 2x^3$. **6.** $y'^3 = 4y(xy' - 2y)$. **7.** $x(x-2)y'' - (x^2-2)y' + 2(x-1)y = 0$. **8.** $(yy'' + y'^2) = -y^2y''$. **9.** $y''y^2(\ln y - 1) = y'^2(xy' - y)$. **10.** $y'''y' = 3y''^2$. **22.** $y = \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + 1$. **23.** $y = 3\ln x + 2$. **24.** $y = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}$. **25.** $y = -\operatorname{ctg} x + 1$. **26.** $y = \frac{1}{3}\sin 3x$. **27.** $y = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$. **28.** $y = -\frac{1}{x} + 1$. **29.** $x = -\ln|y| + 2(1 + \ln 2)$. **30.** $x = \frac{y^3}{3} + \frac{2}{3}$. **31.** $x = -\frac{1}{2y^2} + \frac{1}{2}$. **32.** $-\cos x + \frac{1}{2}\sin 2y = c$. **33.** $\arcsin x + \ln|y + \sqrt{4 + y^2}| = c$. **34.** $\frac{1}{2}e^{x^2} - \ln|\cos y| = c$. **35.** $\ln|x| + \operatorname{arctg} y = \frac{\pi}{3}$. **36.** $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \operatorname{tg} y = 1$. **37.** $-\frac{1}{y-2} + \frac{1}{2(x+1)^2} = c$. **38.** $\operatorname{tg}^2 x + \sin^2 y = c$. **39.** $2\sqrt{y} + \ln|y| - 2\sqrt{x} = c$. **40.** $\ln^2 y = 2\operatorname{tg} x$. **41.** $(1 \mp x^2)(1 + y^2) = c$. **42.** $\frac{1}{2}e^{x^2} + \ln|y| + y = c$. **43.** $-xe^{-x} - e^{-x} + \operatorname{arctg} y = -1$. **44.** $y = (x-c)^3$. **45.** $y = \frac{2}{2 - \sin 2x}$. **46.** $\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt[3]{1+y^3} = c$. **47.** $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = c$. **48.** $\operatorname{tg} y = c(1 - e^x)^3$. **49.** $3y + \ln\frac{|x^3-1|}{(y+1)^6} = c$. **50.** $\frac{4x^2-3}{(1+y^2)^2} = c$. **51.** $y = \frac{1}{c - \sin x}$. **52.** $y = 1 + x^2$. **53.** $y = x - 1$. **54.** $2e^{\frac{y^2}{2}} = \sqrt{e}\,(1 + e^x)$. **55.** $y = 2 - 3\cos x$. **56.** $y = (x-2)^3$. **57.** $y(1+x) = 1$. **58.** $y^2 - 2 = ce^{1/x}$. **59.** $(ce^{-x^2} - 1)y = 2$. **60.** $e^{-y} = 1 + ce^x$. **61.** $y = -\lg(c - 10^x)$. **62.** $y = c(x+1)e^{-x}$. **63.** $\ln|x| = c + \sqrt{y^2+1}$. **64.** $y(\ln|x^2-1| + 1) = 1$. **65.** $\ln|xy| + x - y = c$. **66.** $\frac{y^2}{2} + y + \ln|y-1| = -\frac{1}{x} + c$. **67.** $y^2 + x^2 - 2x = c$. **68.** $\operatorname{ctg}\frac{y-x}{2} = x + c$. **69.** $2x + y - 1 = ce^x$. **70.** $x + 2y + 2 = 0$. **71.** $\sqrt{4x+2y-1} - 2\ln(\sqrt{4x+2y-1} + 2) = x + c$. **72.** $y = ce^{\frac{x}{y}}$. **73.** $y = xe^{cx}$. **74.** $(x+y+1)^3 = c(x-y+3)$. **75.** $x + 2y + 3\ln|2x+3y-7| = c$. **76.** $y = ce^{y/x}$. **77.** $y^2 - x^2 = cy$. **78.** $\sin\frac{y}{x} = cx$. **79.** $y = -x\ln\ln cx$. **80.** $\ln\frac{x+y}{x} = cx$. **81.** $\ln cx = \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{y}{x}\right)$. **82.** $x\ln cx = 2\sqrt{xy}$. **83.** $\arcsin\frac{y}{x} = \ln|cx|$. **84.** $(y-2x)^3 = c(y-x-1)^2$. **85.** $2x + y - 1 = ce^{2y-x}$. **86.** $(y-x+2)^2 + 2x = c$. **87.** $x + y = cx^2$. **88.** $\ln(x^2+y^2) = c - 2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$. **89.** $x(y-x) = cy$. **90.** $x = \pm y\sqrt{\ln cx}$. **91.** $y = ce^{y/x}$. **92.** $y = (x+c)\sin x$. **93.** $y = (x+c)e^x$. **94.** $y = 2x^2 + \frac{1}{x}$. **95.** $y = (\operatorname{tg} x + c)\cos x$. **96.** $y = \left(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{4}\right)(1 + x^2)$. **97.** $y = \frac{c}{x} + \frac{x^3}{4}$. **98.** $y = \frac{c}{\cos x} + \frac{1}{2}\sin x + \frac{x}{2\cos x}$. **99.** $y = ce^{-x^2} + \frac{1}{2}$. **100.** $y = ce^{4x} - \frac{1}{2}e^{2x}$. **101.** $y = \sqrt{1-x^2}\,(\arcsin x + c)$. **102.** $y = \frac{x^2+c}{\cos x}$. **103.** $y = 1 + x^2$. **104.** $y = e^{-x}\sqrt{1 - 4x^2e^{2x}}$. **105.** $y = cx^2 + x^4$. **106.** $y = (2x+1)(c + \ln|2x+1|) + 1$. **107.** $y = \sin x + c\cos x$. **108.** $y = e^x(\ln|x| + c)$. **109.** $y = e^{-x}(xe^{\frac{x}{2}} - 2e^{\frac{x}{2}} + c)^2$. **110.** $y = \sqrt[3]{\frac{3}{2x} + \frac{c}{x^3}}$. **111.** $x = -\frac{1}{2}\cos 2y\cdot\frac{1}{\cos y} + \frac{c}{\cos y}$. **112.** $3x^2y - y^3 = c$. **113.** $x^2 - 3x^3y^3 + y^4 = 0$. **114.** $xe^{-y} - y^2 = c$. **115.** $4y\ln x + y^4 = c$.

116. $x+\frac{x^3}{y^2}+\frac{5}{y}=c$. **117.** $x^2+\frac{2}{3}(x^2-y^2)^{3/2}=c$. **118.** $x-y^2\cos^2 x=c$. **119.** $x^3+x^3\ln y-y^2=c$. **120.** $y^2=x^2(c-2y)$. **121.** $\ln|y|-ye^{-x}=c$. **122.** $y=x(ce^{-x}-1)$. **123.** $(cx+1)y=cx-1$, $y=1$. **124.** $y(x^2-c)=x$. **125.** $x(c-y)=c^2$, $x=4y$. **126.** $y(x+c)=x+1$, $y=0$. **127.** $x=cy+y^3$, $y=0$. **128.** $y=c_1$, $y=c+e^x$. **129.** $y\ln cx=-x$, $y=0$. **130.** $y^2=c(x^2-1)$, $x=\pm 1$. **131.** $2y=2c(x-1)+c^2$, $2y=-(x-1)^2$. **132.** $x=cy+\ln^2 y$. **133.** $y=cx^2e^{-3/x}$. **134.** $(x-c)^2+y^2=c$, $4(y^2-x)=1$. **135.** $4x^2y=(x+2c)^2$, $y=0$. **136.** $x=ce^y+y^2+2y+2$, $xy=1$. **137.** $3y=3c(x-2)+c^3$, $9y^2=4(2-x)^3$. **138.** $y^2=c(xy-1)$, $xy=1$. **139.** $4(x-c)^3=27(y-c)^2$, $y=x-1$. **140.** $x+y=\operatorname{tg}(y-c)$. **141.** $x^3+y^2+7x=c$. **142.** $y=c_2+c_1(3x+2)^{4/3}$. **143.** $y=-\frac{x}{c_1}+\frac{c_1^2+1}{c_1^2}\ln|1+c_1x|+c_2$. **144.** $c_1y^2+1=c_1^2(x+c_2)^2$. **145.** $x=c_1-\frac{1}{c_2}\ln\left|\frac{y}{y+c_2}\right|$. **146.** $y=\frac{1}{16}(x+2)^4$. **147.** $y=\frac{4}{9}x\sqrt{x}-\frac{2}{3}\ln|x|+\frac{5}{9}$. **148.** $4(c_1y-1)=c_1^2(x+c_2)$. **149.** $y=e^x$. **150.** $y=\frac{1}{4c_1}\left[c_1^2(x-c_2)^2+4\right]$. **151.** $y=\frac{3(x+1)^2}{2}-x-\frac{1}{2}$. **152.** $y=c_1+c_2e^2+c_3e^{-x}+c_4\cos x+c_5\sin x-\frac{1}{2}x^2-x$. **153.** $y=c_1+c_2e^x+c_3e^{2x}+\frac{1}{2}xe^{2x}+3\sin x-\cos x$. **154.** $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3\cos x+$ $+c_4\sin x$. **155.** $y=c_1+c_2x+c_3e^{-\sqrt{3}\,x}+c_3e^{\sqrt{3}\,x}-\frac{x^4}{4}-x^2$. **156.** $y=$ $=c_1+c_2x+c_3e^{-x}+\frac{1}{2}x^2-2x(x^2+6x+18)e^{-x}$. **157.** $y=c_1e^x+c_2e^{2x}-xe^x$. **158.** $y=c_1e^{-x}+c_2e^{-5x}+5x^2-12x+12$. **159.** $y=e^x(c_1\cos 3x+c_2\sin 3x)+$ $+\cos 3x-6\sin 3x$. **160.** $y=e^{3x}(c_1+c_2x)+\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}-2e^x$. **161.** $y=c_1e^{4x}+c_2e^x+$ $+\frac{1}{4}x-\frac{3}{16}$. **162.** $y=c_1+c_2e^{-2x}+x\left(\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}\right)$. **163.** $y=c_1e^x+c_2e^{-3x}-\frac{1}{3}e^{-2x}$. **164.** $y=4-3e^{-x}-x\left(\frac{x}{2}+1\right)e^{-x}$. **165.** $y=c_1e^{2x}+c_2e^{4x}-\frac{x^2}{2}-\frac{3}{4}x-\frac{1}{16}$. **166.** $y=c_1+c_2e^{-3x}+\frac{x^2}{6}+\frac{5}{9}x$. **167.** $y=c_1+c_2e^{-2x}-\frac{x}{2}e^{-2x}$. **168.** $y=c_1\sin 3x+$ $+c_2\cos 3x+\frac{1}{8}e^{3x}$. **169.** $y=c_1e^{-3x}+c_2e^{-x}+\frac{1}{4}(x^2-x)e^{-x}$. **170.** $y=xe^x+\frac{x^2}{2}e^x$. **171.** $y=\frac{3}{4}\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{x}{2}+\frac{1}{4}$. **172.** $y=c_1e^{3x}+c_2e^{-2x}-\frac{37}{50}\cos x+\frac{9}{50}\sin x$. **173.** $y=-2\cos x+3\sin x+\frac{1}{2}x\sin x$. **174.** $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+\frac{3}{10}e^{2x}(\cos x+$ $+2\sin x)$. **175.** $y=c_1e^x+c_2e^{-4x}-\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{8}x-\frac{13}{32}+\frac{2}{5}xe^x-\frac{9}{50}\cos 3x-\frac{13}{50}\sin 3x$. **176.** $y=c_1\cos x+c_2\sin x+x\left(\frac{3}{2}\sin x-\cos x\right)$. **177.** $y=c_1e^{3x}+c_2e^x-$ $-\frac{1}{5}\sin 2x+\frac{3}{5}\cos 2x-\frac{x}{2}e^x$.