МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

П.К.МАЦЕНКО, В.В.СЕЛИВАНОВ

РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебное пособие

для студентов высших технических учебных заведений

Ульяновск 2000

УДК 519.2 (076)

Рецензент канд. физ. - мат. наук, доцент УГУ Д. Р. Воденин

Одобрено редакционно-издательским советом УлГТУ

Маценко П. К., Селиванов В. В. Руководство к решению задач по теории вероятностей. Учебное пособие. - Ульяновск: УлГТУ, 2000.- 99 с.

Составлено в соответствии с программами курса высшей математики для инженерно-технических специальностей высших учебных заведений и предназначено для студентов всех специальностей Ульяновского государственного технического университета.

Приведены необходимые теоретические сведения, образцы решения задач, справочные данные и список рекомендуемой литературы.

Работа подготовлена на кафедре "Высшая математика"

УДК 519.2 (076)

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее пособие написано на основе многолетнего опыта преподавания теории вероятности во втузе. Цель пособия - помочь студентам приобрести навыки применения вероятностно-статистических методов к решению различных технических задач. Поэтому при подборе задач и методов их решения основное внимание было обращено не на формально-математическую сторону, а на их прикладное содержание.

Учебное пособие состоит из 14 разделов. В начале каждого раздела приведена краткая сводка теоретических сведений и формул, необходимых для решения задач этого раздела; затем даны решения типовых задач и задачи для самостоятельного решения. Все задачи снабжены ответами. Задачи, имеющиеся в пособии, различны по трудности. Среди них есть как задачи для простого приобретения навыков применения готовых формул и теорем, так и более сложные задачи, решение которых требует некоторой изобретательности. Задачи расположены в порядке постепенного возрастания трудности их решения.

При отборе задач были использованы источники, список которых приведен в конце пособия; многие задачи составлены непосредственно авторами пособия.

1. СЛУЧАЙНОЕ СОБЫТИЕ

В теории вероятностей для каждого эксперимента строится *множество* Ω *элементарных исходов* $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,...\}$, определяемое условием: результатом эксперимента всегда является ровно один исход из Ω. Сами элементы $\omega_1,\omega_2,\omega_3,...$ называются *элементарными исходами*. *Случайное событие* - это некоторое множество, состоящее из элементарных исходов $A=\{\omega_{i_1},\omega_{i_2},\omega_{i_3},...\}$. При этом исходы $\omega_{i_1},\omega_{i_2},\omega_{i_3},...$ называются *благоприятствующими событию* A**.** Поскольку не все элементарные исходы благоприятствуют событию A, случайное событие A при данном эксперименте может либо появиться, либо не появиться. Событие, которое происходит при любом эксперименте, называется *достоверным* и обозначается через E. Ясно, что достоверное событие содержит все элементарные исходы из Ω, то есть, $E=\Omega$. Событие, не происходящее ни при одном эксперименте, называется *невозможным* и обозначается через $\varnothing$; это событие не содержит ни одного элементарного исхода.

Произведением AB *событий* A *и* B называется новое событие, состоящее в одновременном появлении событий A и B. *Суммой* $A+B$ называется событие, состоящее в появлении либо A, либо B, либо в их одновременном появлении. *Разностью* $A\backslash B$ называется событие, состоящее в появлении A и непоявлении B. Событие $\overline{A}$ называется *противоположным* к событию A, если $\overline{A}$ происходит при непоявлении А. Ясно, что $A\overline{A} = \varnothing$, $A + \overline{A} = E$. События A и B называются *несовместными*, если они не могут происходить одновременно. Ясно, что для несовместных событий $AB = \varnothing$.

Пример 1. Одновременно подбрасываются два кубика (игральные кости). Контролируется число очков на их верхних гранях. Описать множество элементарных исходов Ω и построить события: A = {в сумме выпадет 6 очков}, B = {суммарное число выпавших очков кратно 3}, C = {на кубиках выпало одинаковое число очков}.

Решение. Рассмотрим события: $\omega_{k,j}$ = {на верхней грани первого кубика выпадет k очков, второго - j очков}, (k,j = 1,2,...,6). Ясно, что эти события являются элементарными исходами, поэтому $\Omega = \{\omega_{11}, \omega_{12}, ..., \omega_{16}, \omega_{21}, ..., \omega_{26}, ..., \omega_{66}\}$. Событию A благоприятствуют исходы: $\omega_{15}, \omega_{24}, \omega_{33}, \omega_{42}, \omega_{51}$, поэтому $A = \{\omega_{15}, \omega_{24}, \omega_{33}, \omega_{42}, \omega_{51}\}$. Поскольку событие B происходит, если на верхних гранях в сумме выпадет 3 или 6, или 9, или 12 очков, то $B = \{\omega_{12}, \omega_{21}, \omega_{15}, \omega_{51}, \omega_{24}, \omega_{42}, \omega_{33}, \omega_{36}, \omega_{63}, \omega_{66}\}$. Очевидно $C = \{\omega_{11}, \omega_{22}, \omega_{33}, \omega_{44}, \omega_{55}, \omega_{66}\}$.

Пример 2. Из таблицы случайных чисел наудачу взято одно число. Вводятся события: A= {выбранное число делится на 5}, B = {выбранное число оканчивается нулем}. Выяснить смысл событий AB, $A+B$.

Решение. Согласно определению, AB описывается так: выбранное число делится на 5 и одновременно оканчивается нулем, т.е. число, оканчивающееся нулем. Значит, $AB = B$. Согласно определению $A+B$ описывается так: выбранное число или делится на 5, или оканчивается нулем, т.е. число, делящееся на 5. Значит, $A+B = A$.

Ответ: $AB = B$; $A+B = A$.

Пример 3. На рис 1.1 изображена электрическая схема. Вводятся события: A= {работает блок a}, B_k ={работает блок b_k, k=1,2}, C = {схема работает}. Записать выражение для C и $\overline{C}$.

Решение. Параллельное соединение блоков b_1, b_2 работает, если работает хотя бы один из них, поэтому $B_1 + B_2 =$ {работает параллельное соединение блоков}. Событие С произойдет, если одновременно с этим работает блок a. Значит, $C = A(B_1 + B_2)$. Схема не работает, если не работает или блок a, или параллельное соединение блоков b_1, b_2, или и то, и другое сразу. Значит, $\overline{C} = \overline{A} + \overline{B_1}\,\overline{B_2}$.

Ответ: $C = A(B_1 + B_2)$, $\overline{C} = \overline{A} + \overline{B_1}\,\overline{B_2}$.

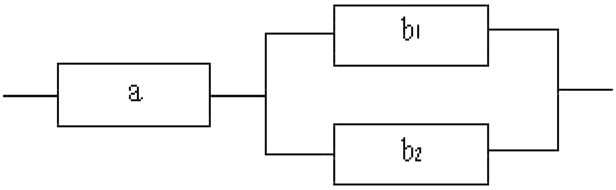


Рис. 1.1.

В задачах 1.1-1.4 построить множество элементарных исходов и выразить через эти исходы указанные события.

1.1. Кубик (игральная кость) подбрасывается один раз. События: A = {на верхней грани выпало четное число очков}, B = {на верхней грани выпало число очков, кратное 3}.

1.2. Одновременно подбрасываются две монеты. События: A = {герб выпадает на одной монете}, B = {герб выпадает на двух монетах}.

1.3. Из четырех отобранных тузов наугад вытаскивается две карты. События: A = {обе карты черной масти}, B = {карты разного цвета}.

1.4. Монета подбрасывается три раза. События: A = {герб выпал ровно один раз}, B= {ни разу не выпала цифра}, C= {выпало больше гербов, чем цифр}, D= {герб выпал не менее чем два раза подряд}.

1.5. Три изделия проверяются на стандартность. Вводятся события: A = {все изделия стандартны}, B = {хотя бы одно изделие нестандартно}. Выяснить смысл событий $A+B,\ AB,\ A\overline{B},\ A\setminus B.$

1.6. Два шахматиста играют одну партию. Вводятся события: A = {выигрывает первый игрок}, B = {выигрывает второй игрок}.
Описать события $AB,\ \overline{A}\setminus B,\ \overline{A}B,\ A+B+(\overline{A}\setminus B)$.

1.7. Из колоды в 36 карт наугад вытаскивается карта. Вводятся события: A = {вытащен туз}, B = {вытащена карта красной масти}, C= {вытащена карта масти "пик"}. Выяснить смысл событий: $AB,\ AC,\ BC,\ A\setminus B,\ B\setminus C,\ B\setminus A,\ B\overline{C},\ B+C.$

1.8. Одновременно подбрасывается 4 монеты. Вводятся события: A = {гербов выпало больше, чем цифр}, B = {выпали все гербы}, C ={выпали все цифры}. Выяснить смысл событий: $\overline{A},\ \overline{B},\ A\setminus B,\ A+B,\ AB,\ \overline{A}\setminus C,\ \overline{A}\cdot C,\ \overline{C}\setminus A.$

1.9. Из урны, в которой находятся белые и черные шары, производится последовательное извлечение шаров. Вводятся события A_k = {при k-ом извлечении появится белый шар}, k=1,2,3,... Описать события $\overline{A_1}A_2,\ A_1A_2A_3\overline{A_4},\ A_1\overline{A_2}A_3\overline{A_4}+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}A_4.$

1.10. Двухмоторный самолет терпит аварию, если одновременно отказывают оба двигателя или выходит из строя системы управления. Вводятся события: A_k = {выходит из строя k-ый двигатель}, k=1,2, B = {выходит из строя система управления}, C = {самолет терпит аварию}. Найти события C и $\overline{C}$.

1.11. Из двух коробок, в каждой из которых красные и синие карандаши, наугад берется по карандашу. Вводятся события: A_k = {из k-ой коробки вытащен красный карандаш}, k=1,2. Построить множество элементарных исходов, выразив каждый элементарный исход через A_1, A_2. Представить в алгебре событий следующие события: A = {вытащено два красных карандаша}, B = {вытащено два синих карандаша}, C = {вытащены карандаши одного цвета}, D = {вытащены карандаши разных цветов}.

1.12. Орудие дважды стреляет по цели. Пусть A_k = {попадание в цель при k-ом выстреле}, k=1,2. Построить множество элементарных исходов, выразив каждый элементарный исход через A_1, A_2. Представить в алгебре событий следующие события: A = {произойдет ровно одно попадание}, B = {не будет ни одного попадания}, C = {произойдет хотя бы одно попадание}, D = {произойдет хотя бы один промах}.

1.13. Произведено три выстрела из орудия по цели. Пусть A_k = {попадание в цель при k-ом выстреле}, k=1,2,3. Построить множество элементарных исходов, выразив каждый элементарный исход через события A_k. Записать в алгебре событий следующие события: A = {произойдет ровно одно попадание}, B = {произойдет хотя бы одно попадание}, C = {произойдет хотя бы один промах}, D = {произойдет не менее двух попаданий}, F = {попадание произойдет только на третьем выстреле}.

1.14. Пусть A_1, A_2, A_3 - три события, наблюдаемые в данном эксперименте. Выразить в алгебре событий следующие события: A = {произойдет ровно одно событие A_1 или A_2, или A_3}, B = {произойдет хотя бы одно из событий A_1, A_2, A_3}, C = {произойдет ровно два события из трех}, D = {произойдет не менее двух событий из трех}, F = {не произойдет ни одного из событий A_1, A_2, A_3}, G = {произойдет хотя бы два события из трех}.

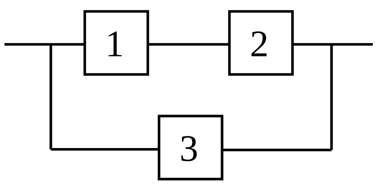


Рис. 1.2.

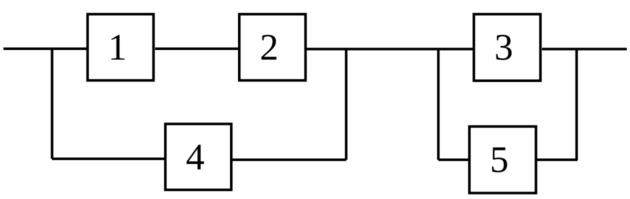


Рис. 1.3.

1.15. Обозначим события: A_k = {элемент с номером k вышел из строя}, k=1,2,3,4. B = {разрыв цепи}. Выразить событие B через A_k для электрической схемы, приведенной на рис. 1.2.

1.16. Обозначим события: A_k = {элемент с номером k вышел из строя}, k=1,2,..,5, B = {разрыв цепи}. Выразить событие B через A_k для электрической схемы, приведенной на рис. 1.3.

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ КЛАССИЧЕСКОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

Если некоторый эксперимент (опыт) имеет n равновозможных исходов, из которых k благоприятствуют появлению события А, то вероятность этого события находится по формуле

$$P(A) = k/n \ . \qquad (2.1)$$

При этом исходы эксперимента считаются равновозможными, если они имеют одинаковую возможность появиться. Напоминаем, что исход считается благоприятствующим, если событие A происходит при его появлении.

Пример 1. Датчик случайных чисел генерирует двузначное случайное число. Какова вероятность того, что сгенерированное число делится на 5?

Решение. Так как всего 90 двузначных чисел (от 10 до 99), то общее число исходов n=90. Число исходов, благоприятствующих нашему событию, равно k =17. Поэтому по формуле (2.1) получаем p = 17/90= 0,189.

Ответ: 0,189.

Во многих задачах вычисление классической вероятности ведется на основе *формул комбинаторики*. Большинство задач комбинаторики ставятся следующим образом. Имеется конечное множество X из элементов произвольной природы $x_1, x_2, ..., x_n$. Из этого множества выбирается k элементов и из них строится группа ($x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_k}$). Если учитывается порядок расположения элементов внутри группы (т.е. группы, составленные из одних и тех же элементов, но расположенных в разном порядке, считаются разными), то такая группа называется *размещением*. Если порядок расположения элементов внутри группы не учитывается, то такая группа называется *сочетанием*. Размещение, составленное сразу из всех элементов множества X, называется перестановкой. Число размещений A_n^k, перестановок P_n, сочетаний C_n^k находятся по формулам

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \qquad (2.2)$$

$$P_n = n! \qquad (2.3)$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} \qquad (2.4)$$

При вычислении вероятностей часто используются также два основных правила комбинаторики: правило суммы и правило произведения.

Правило суммы. Если все группы элементов можно разбить на несколько классов, причем каждая группа входит только в один класс, то общее число групп равно сумме групп по всем классам.

Правило произведения. Если одну часть группы элементов можно выбрать n_1 способами, вторую часть группы - n_2 способами, то всю группу можно выбрать $n = n_1 n_2$ способами. При разбиении группы на s частей аналогично всю группу можно выбрать $n = n_1 n_2 \dots n_s$ способами.

Пример 2. Одновременно бросаются два кубика (игральные кости). Найти вероятность того, что суммарное число выпавших очков меньше 5.

Решение. Найдем n - общее число исходов. Так как с каждой из 6 граней одного кубика возможно появление любой из 6 граней другого кубика, то согласно правилу произведения $n = 6^2 = 36$. Число благоприятствующих исходов найдем простым их пересчетом: 1+1, 1+2, 1+3, 2+1, 2+2, 3+1, т.е. k=6. Следовательно, по формуле (2.1) $p = k/n =$ 6/36= 1/6.

Ответ: 1/6.

Пример 3. В урне находятся 13 белых и 17 черных шаров. Извлекаются 5 шаров. Найти вероятности событий: A = {извлечено два белых шара}, B = {извлечен хотя бы один белый шар}.

Решение. Найдем общее число исходов. Вытащить 5 шаров – означает составить группу из 5 шаров, если всего их 30, причем порядок извлечения шаров безразличен. Значит, речь идет о сочетаниях по 5 элементам из 30. Число таких сочетаний равно C_{30}^5, и по формуле (2.4)

$$n = C_{30}^5 = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26}{5!} = 142506.$$

Найдем число исходов, благоприятствующих событию A. Исход благоприятствует A, если из 13 белых шаров извлечем два, а из 17 черных шаров - три, причем порядок извлечения безразличен. Поэтому согласно правилу произведения число исходов, благоприятствующих A, равно

$$k_1 = C_{13}^2 \cdot C_{17}^3 = \frac{13 \cdot 12}{2!} \cdot \frac{17 \cdot 16 \cdot 15}{3!} = 53040.$$

Теперь по формуле (2.1) $P(A) = k_1 / n = 0{,}372$.

Чтобы решить вторую часть задачи, введем в рассмотрение противоположное событие $\overline{B}$ = {извлечены все черные шары}. Число исходов, благоприятствующих $\overline{B}$, равно $k_2 = C_{17}^5 = 6188$. Значит, $P(\overline{B}) = k_2/n = 0{,}043$ и $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 0{,}957$.

Ответ: 0,372; 0,957.

Пример 4. Слово АБРАКАДАБРА разрезается на буквы, которые затем буквы перемешиваются. Одна за другой вытаскиваются 5 букв и прикладываются друг к другу слева направо. Найти вероятности событий: A = {случайно сложится слово РАДАР}, B = {случайно сложится слово БАРКА}.

Решение. Находим n - общее число исходов. Всего 11 букв, из них набирается группа в 5 букв, порядок внутри должен учитываться (ибо слово - упорядоченная группа букв). Значит, речь идет о размещении. По формуле (2.2) $n = A_{11}^5 = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 =$ =55440.

Найдем число исходов, благоприятствующих слову РАДАР. В исходном слове АБРАКАДАБРА содержится 2 буквы "Р", 5 букв "А", 1 буква "Д". Поэтому в слове РАДАР первую букву "Р" можно выбрать двумя способами, а вторую - всего лишь одним (одна "Р" уже взята). Первую букву "А" можно выбрать 5 способами, вторую - 4 способами. Букву "Д" - одним способом. По правилу произведения число благоприятствующих исходов равно $k_1 = 2 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 1 = 40$. Следовательно, $P(A) = k_1/n =$ $= 40/55440 = 7{,}22 \cdot 10^{-4}$.

Аналогично число исходов, благоприятствующих слову БАРКА, равно $k_2 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 = 80$. Следовательно, $P(B) = k_2/n = 80/55440 =$ $= 1{,}44 \cdot 10^{-3}$.

Ответ: $7{,}22 \cdot 10^{-4}$; $1{,}44 \cdot 10^{-3}$.

Пример 5. Десять книг, из которых три по математике, случайным образом расставляются на полке. Найти вероятность того, что книги по математике окажутся рядом.

Решение. Общее число исходов равно числу перестановок из 10 книг, т.е. согласно (2.3) $n = P_{10} = 10!$. Чтобы найти число благоприятствующих исходов, рассмотрим одну фиксированную расстановку книг на полке (см. рис. 2.1).

математика			другие книги						
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

Рис. 2.1.

Здесь первые три позиции занимают книги по математике, на 4-10 позициях поставлены остальные семь книг. Сколькими способами можно получить такую расстановку? На первых трех позициях книги по математике можно расставить $k_1 = P_3 = 3!$ способами, на остальных позициях другие книги можно расставить $k_2 = P_7 = 7!$ способами. Поэтому согласно правилу произведения вся расстановка книг, изображенная на рис 2.1, может быть получена $k_3 = k_1 \cdot k_2 = 3! \cdot 7!$ способами. Чтобы получить все требуемые условием задачи расстановки книг, нужно тройку книг по математике переставить с 1-3 позиций на 2-4, 3-5,..,8-10 позиции, не изменяя порядок расположения книг внутри "математической" и "нематематической" групп. Таких "сдвижек" будет 8, и для каждой такой "сдвижки" возможна перестановка книг внутри "математической" и "нематематической" групп k_3 способами. Значит, общее число благоприятствующих исходов равно $k = 8k_3 = 8 \cdot 3! \cdot 7!$. Вероятность события находим по формуле (2.1) и получаем $p = k/n = 8 \cdot 3! \cdot 7!/10! = 1/15 = 0{,}067$.

Ответ: 0,067.

<u>Пример 6.</u> Пять мужчин и десять женщин случайным образом по трое рассаживаются за 5 столиков. Какова вероятность того, что за каждым столиком окажется мужчина?

<u>Решение.</u> Найдем сначала общее число исходов. За первый столик могут сесть любые три человека из 15, такая посадка осуществляется $n_1 = C_{15}^3$ способами. За второй столик может сесть любая тройка из оставшихся 12 человек, такая посадка осуществляется $n_2 = C_{12}^3$ способами. Аналогично посадку за 3,4,5 столики можно осуществить $n_3 = \mathrm{C}_9^3$, $\mathrm{n}_4 = \mathrm{C}_6^3$, $\mathrm{n}_5 = \mathrm{C}_3^3$ способами. Поэтому по правилу произведения общее число исходов равно

$$n = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 \cdot n_5 = C_{15}^3 \cdot C_{12}^3 \cdot C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3 = 15!/6^5.$$

Аналогично одного мужчину и две женщины за первый столик можно посадить $k_1 = 5 \cdot C_{10}^2$ способами, за второй, третий, четвертый, пятый столики - соответственно $k_2 = 4 \cdot C_8^2$, $k_3 = 3 \cdot C_6^2$, $k_3 = 2 \cdot C_4^2$, $k_5 = 1$ способами. Значит, число благоприятствующих исходов равно

$$k = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot k_4 \cdot k_5 = 5! \cdot C_{10}^2 \cdot C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 = 5! \cdot 10!/2^5.$$

Следовательно,

$$p = \frac{k}{n} = \frac{5! \cdot 10!}{2^5} : \frac{15!}{6^5} = \frac{3^5 \cdot 5!}{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11} = 0{,}081.$$

Ответ: 0,081.

2.1. В магазин поступило 30 новых телевизоров, среди которых 5 имеют скрытые дефекты. Найти вероятность того, что купленный телевизор не имеет скрытых дефектов.

2.2. Игральная кость подбрасывается один раз. Найти вероятности событий: A= {число очков на верхней грани равно 6}, B = {число очков кратно 3}, C = {число очков меньше 5}.

2.3. Из колоды в 36 карт наугад вытаскивается одна. Найти вероятности событий: A = {карта имеет масть "пик"}, B = {карта имеет черную масть}, C= {вытащен туз}, D = {вытащен туз "пик"}.

2.4. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 1000 кубиков одинакового размера. Кубики перемешиваются, а затем наугад вытаскивается один из них. Найти вероятности событий: A = {кубик имеет три окрашенные грани}, B = {кубик имеет две окрашенные грани}, C = {кубик имеет одну окрашенную грань}.

2.5. На шахматную доску случайным образом ставят две ладьи: белую и черную. Какова вероятность того, что ладьи не бьют друг друга?

2.6. На 9 карточках написаны цифры от 1 до 9. Определить вероятность того, что число, составленное из двух наугад взятых карточек, делится на 18.

2.7. На 8 карточках написаны числа: 2,4,6,7,8,11,12,13. Из двух наугад взятых карточек составлена дробь. Какова вероятность того, что она сократима?

2.8. Одновременно подбрасывается две кости. Найти вероятности событий: A= {количество очков на верхних гранях одинаково}, B= {на верхних гранях выпадет в сумме 8 очков}, C = {сумма очков четна}, D = {хотя бы на одной кости появится цифра 6}.

2.9. Телефонный номер состоит из 6 цифр. Некто забыл номер телефона, но помнит, что он состоит из нечетных цифр. Какова вероятность того, что номер будет угадан с первой попытки?

2.10. Поезд метро состоит из 6 вагонов. Какова вероятность того, что 3 пассажира сядут в один вагон?

2.11. Зенитная батарея, состоящая из n орудий, производит залп по группе из m самолетов. Каждое орудие выбирает себе цель наудачу независимо от остальных. Найти вероятность того, что все орудия выстрелят по одному самолету.

2.12. Пяти радиостанциям разрешено вести передачи на шести частотах. Каждая радиостанция наудачу выбирает себе частоту. Найти вероятности событий: A = {все радиостанции работают на одной частоте}, B = {хотя бы две радиостанции работают на разных частотах}, C = {все радиостанции работают на разных частотах}.

2.13. Числа 1,2,...,20 написаны на карточках. Карточки тщательно перетасовываются, а затем вытаскиваются две из них. Какова вероятность того, что сумма чисел на вынутых карточках равна 30?

2.14. Цветочница выставила на продажу 15 белых и 10 красных роз. Некто просит подобрать ему букет из 5 роз. Какова вероятность того, что в букете будет 2 белые и 3 красные розы?

2.15. В экзаменационный билет включается два теоретических вопроса. Студент из 60 вопросов программы выучил только 40. Найти вероятности событий: A = {студент знает оба вопроса билета}, B = {студент знает только один вопрос билета}, C = {студент знает хотя бы один вопрос билета}.

2.16. В пачке из 100 лотерейных билетов 10 выигрышных. Некто покупает 5 билетов. Найти вероятности событий: A = {все купленные билеты выигрышные}, B= {два билета выигрывают}, C = {выигрывает хотя бы один билет}.

2.17. Из колоды в 36 карт наудачу извлекаются две карты. Найти вероятности событий: A = {извлечены карты разного цвета}, B = {извлечены карты одной масти}, C= {извлечен ровно один туз}, D = {среди извлеченных карт есть хотя бы один туз}.

2.18. Из колоды в 52 карты наудачу извлекаются три карты. Найти вероятности событий: A= {извлечены тройка, семерка, туз}, B = {извлечены две карты бубновой масти}, C = {извлечены два короля}.

2.19. В партии из 30 изделий 5 бракованных. Для контроля наудачу берутся 3 изделия. Найти вероятности событий: A = {все отобранные изделия бракованы}, B= {два изделия бракованы}, C = {хотя бы одно изделие браковано}.

2.20. В коробке 6 красных и 4 синих карандаша. Наугад вытаскиваются три из них. Найти вероятности событий: A = {вытащены карандаши одного цвета}, B= {вытащены хотя бы два красных карандаша}.

2.21. В коробке 10 красных, 8 синих, 2 зеленых карандаша. Наугад берутся 3 из них. Найти вероятности событий: A = {среди взятых нет синих карандашей}, B= {взяты карандаши разного цвета}, C = {взят хотя бы один зеленый карандаш}.

2.22. В студенческой группе 15 юношей и 10 девушек. Для участия в конференции случайным образом из группы отбирается 6 человек. Найти вероятности событий: A = {среди делегатов одни юноши}, B = {среди делегатов поровну юношей и девушек}, C = {девушки составляют большинство среди делегатов}, D = {среди делегатов хотя бы один юноша}.

2.23. В спортлото "5 из 36" угадываются 5 из 36 чисел. Найти вероятности событий: A = {угаданы все 5 чисел}, B = {угаданы 4 числа}, C = {угаданы только 3 числа}.

2.24. Для уменьшения числа игр 2n футбольных команд, среди которых два призера предыдущего чемпионата, путем жеребьевки разбиваются на две подгруппы по n команд каждая. Какова вероятность того, что команды-призеры попадут в разные подгруппы?

2.25. Из урны, содержащей m_1 белых и m_2 черных шара наугад вытаскивается m шаров ($m < m_1, m_2$). Найти вероятности событий: A = {все вытащенные шары белые}, B = {среди вытащенных хотя бы один шар белый}, C = {вытащено не менее двух белых шаров}.

2.26. В урне m_1 белых, m_2 черных, m_3 красных шара. Какова вероятность того, что три вынутых шара имеют разные цвета?

2.27. На 10 карточках написаны буквы: А, А, А, А, А, А, М, М, М, М. Ребенок наугад вытаскивает одну за другой 4 карточки и прикладывает их друг к другу слева направо. Какова вероятность того, что он случайно сложит слово МАМА?

2.28. Слово МАТЕМАТИКА разрезается на буквы. Буквы перемешиваются и снова складываются слева направо. Найти вероятность того, что снова получится слово МАТЕМАТИКА.

2.29. Числа 1,2,..,9 записываются в случайном порядке. Найти вероятности событий: A = {числа записаны в порядке возрастания}, B = {числа 1 и 2 будут записаны рядом и в порядке возрастания}, C = {числа 3,6,9 будут записаны друг за другом и в произвольном порядке}, D = {на четных местах будут стоять четные числа}, F = {сумма равноотстоящих от концов записи чисел равна 10}.

2.30. На пяти карточках написаны цифры 1, 2, 3, 4, 5. Случайным образом вытаскиваются три карточки и прикладываются в ряд слева направо в порядке поступления. Найти вероятности событий: A = {получается число 123}, B = {число не содержит цифры 3}, C = {число состоит из последовательных цифр}, D = {получилось четное число}.

2.31. В машинном зале 10 компьютеров, из которых 3 с черно-белым экраном. Преподаватель произвольным образом рассаживает 10 студентов за эти компьютеры. Какова вероятность того, что студенты Иванов, Петров, Сидоров окажутся за компьютерами с черно-белым экраном?

2.32. 12 студентов, среди которых Иванов и Петров, случайным образом занимают очередь за учебниками в библиотеку. Какова вероятность, что в образовавшейся очереди между Ивановым и Петровым окажутся ровно 5 человек?

2.33. Восемь человек садятся за круглый стол в произвольном порядке. Какова вероятность того, что два определенных лица будут сидеть рядом?

2.34. Пять юношей и две девушки случайным образом становятся в круг для игры в волейбол. Какова вероятность того, что обе девушки окажутся рядом?

2.35. n мужчин и n женщин случайным образом рассаживаются в ряд на 2n мест. Найти вероятности следующих событий: A = {никакие два мужчины не будут сидеть рядом}, B = {все мужчины будут сидеть рядом}.

2.36. Бросается 10 игральных костей. Найти вероятности следующих событий: A= {хотя бы на одной кости выпадет 6 очков}, B = {ровно на трех костях выпадет 6 очков}.

2.37. Из телефонной книги, в которой все номера семизначные, наугад выбирается номер телефона. Найти вероятности следующих событий: A = {четыре последние цифры номера одинаковы}, B = {все цифры номера различны}.

2.38. Шесть человек вошли в лифт на первом этаже семиэтажного дома. Считая, что любой пассажир может с равной вероятностью выйти на любом этаже, найти вероятности событий: A = {пассажиры выходят, начиная с 5 этажа}, B= {трое пассажиров выйдут на 7 этаже}, C = {на каждом этаже выйдет по одному пассажиру}.

2.39. Бросается 6 игральных костей. Найти вероятности событий: A= {выпадут 3 единицы, 2 тройки, 1 шестерка}, B = {выпадут разные цифры}, C= {выпадут одинаковые цифры}.

2.40. 52 карты раздаются четырем игрокам. Найти вероятности событий: A= {каждый игрок получит туз}, B = {один из игроков получит все 13 карт одной масти}, C = {все тузы попадут к одному из игроков}.

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Существует круг задач, решение которых основано на геометрической интерпретации вероятности. Итак, на прямой выберем отрезок Е и внутри него отрезок (или совокупность отрезков) A (см. рис.3.1). Внутрь отрезка E "бросается" точка. Вероятность ее попадания на A находится по формуле

$$p = l_A / l_E \ , \qquad (3.1)$$

где l_A и l_E - длины A и E соответственно.

Вероятность события A, найденная по формуле (3.1), называется *геометрической вероятностью на прямой*.

Аналогично, если точка "бросается" внутрь квадрата E (см. рис.3.2), то вероятность ее попадания в область A, лежащую внутри E, находится по формуле

$$p = S_A / S_E \ , \qquad (3.2)$$

где S_A и S_E - площади А и Е соответственно.

Вероятность попадания точки внутрь трехмерной области A при ее "бросании" внутрь куба E аналогичным образом находится по формуле $p = V_A / V_E$, где V_A и V_E - объемы A и E соответственно.

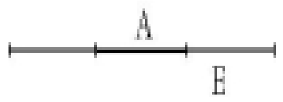


Рис. 3.1.

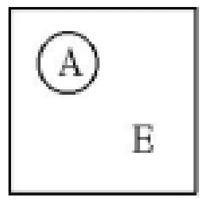


Рис. 3.2.

<u>Пример 1.</u> На прямолинейном участке газопровода длиной 80 км произошел разрыв. Какова вероятность того, что разрыв удален от обоих концов участка на расстояние, большее 30 км?

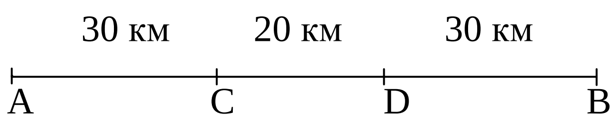


Рис. 3.3.

<u>Решение.</u> Участок газопровода AB разобьем точками C, D на три части, как показано на рис. 3.3. В нашем случае разрыв газопровода должен произойти на участке CD. Значит, вероятность события равна $p = l_{CD}/l_{AB}$ = = 20/80 = 0,25.

Ответ: 0.25.

<u>Пример 2.</u> Быстро вращающийся диск разделен на 6 одинаковых секторов, попеременно окрашенных в красный и белый цвета. По диску произведен выстрел, и пуля попала в диск. Найти вероятность того, что пуля попала в один из красных секторов.

<u>Решение.</u> Пусть R - радиус диска, тогда $S_0 = \pi R^2$ - его площадь, $S = 3\pi R^2/6 = \pi R^2/2$ - суммарная площадь красных секторов. Значит, вероятность попадания в красный сектор равна $p = S / S_0 = 0{,}5$.

Ответ: 0,5.

<u>Пример 3.</u> Наугад берутся два числа из отрезка [0;2]. Найти вероятность того, что их сумма больше 2, а сумма их квадратов меньше 4.

<u>Решение.</u> Пусть x,y- выбранные числа. Выбрать произвольно два числа $x, y \in [0;2]$ означает в нашей задаче бросить наугад точку M(x,y) внутрь квадрата $0 \le x,y \le 2$ (см. рис. 3.4). Указанное в условии задачи событие произойдет, если будут выполнены условия: x+y>2, $x^2+y^2<4$, т.е. если брошенная точка попадет внутрь области A, ограниченной линиями: $x+y=2$; $x^2+y^2=4$ (см. рис. 3.4). Поэтому вероятность события можно найти по формуле $p = S_A/S_0$, где S_0 - площадь квадрата, S_A- площадь области A. Находим $S_0 = 2 \cdot 2 = 4$,

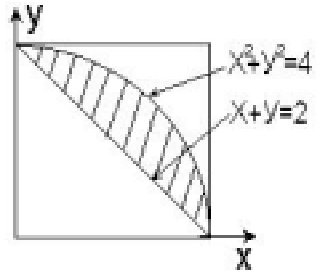


Рис. 3.4.

$$S_A = \int_0^R (\sqrt{4-x^2} - (2-x))dx = \pi - 2.$$

Следовательно, $p = (\pi - 2)/4$.

Ответ: (π-2)/4.

<u>**Пример 4.**</u> Два приятеля договорились о встрече в промежутке времени между 9ч. и 9ч.30мин. Первый пришедший ждет второго 15 минут и уходит. Какова вероятность того, что встреча состоится?

<u>Решение.</u> Выберем 9 часов за начало отсчета. Пусть x и y - моменты прихода первого и второго приятеля соответственно. Согласно условию задачи $0 \le x,y \le 0{,}5$. Встреча состоится, если $|x-y| \le 0{,}25$. Значит, достоверное событие моделируется на плоскости xOy квадратом $[0;0{,}5] \times$ $\times [0;0{,}5]$ (см. рис. 3.5), а событие A = ={встреча состоится} – областью внутри квадрата, задаваемой неравенством $|x-y| \le 0{,}25$, (на рис 3.5 эта область заштрихована). Площадь квадрата S_0= 0,25, площадь фигуры равна

$$S_A = S_0 - 2 \cdot 0{,}5 \cdot (0{,}25)^2 = 0{,}1875.$$

Значит, $P(A) = S_A / S_0 =$ 0,75.

Ответ: 0,75.

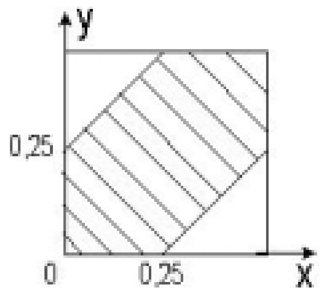


Рис. 3.5.

3.1. В точке C, положение которой на телефонной линии AB длины l_0 равновозможно, произошел разрыв. Определить вероятность того, что C удалена от A на расстояние, большее l.

3.2. На отрезок длины l поставлена точка деления. Определить вероятность того, что меньший отрезок имеет длину больше, чем l/3.

3.3. Луч локатора перемещается в горизонтальной плоскости с постоянной угловой скоростью. Какова вероятность того, что цель будет обнаружена локатором в угловом секторе величины 60°, если появление цели по любому направлению одинаково возможно?

3.4. В окружность вписывается прямоугольник. Какова вероятность, что его высота больше длины основания? При решении задачи использовать понятие геометрической вероятности.

3.5. На оси абсцисс графика функции $y = \sin x$ наугад берется точка. Какова вероятность того, что ордината графика в этой точке больше 0,5?

3.6. Компьютер случайным образом генерирует число x из промежутка $[-\pi;\pi]$. Какова вероятность того, что $\sin x < \cos x$?

3.7. В окружности радиуса R проводятся вертикальные хорды. Какова вероятность того, что длина наудачу взятой хорды окажется меньше радиуса?

3.8. Кусок проволоки длиной 20 см был согнут в наудачу выбранной точке. После этого, перегнув проволоку еще в двух местах (не ломая ее), сделали прямоугольную рамку. Найти вероятность того, что площадь полученной рамки не превосходит $21 см^2$.

3.9. В окружность радиуса R вписан правильный треугольник. Внутрь круга бросается точка. Найти вероятность того, что точка попадет внутрь треугольника.

3.10. Какова вероятность, не целясь, попасть бесконечно малой пулей в прутья квадратной решетки, если толщина прутьев равна d, расстояние между их осями равно $a \quad (d < a)$.

3.11. Монета радиуса $r \quad (2r < a)$ случайным образом бросается на стол, разграфленный на квадраты со стороной a. Найти вероятность того, что монета не пересечет ни одной стороны квадрата.

3.12. Из промежутка [0;2] наугад выбирается два числа. Какова вероятность того, что их произведение больше 2?

3.13. Какова вероятность того, что сумма двух наудачу взятых отрезков, длина каждого из которых не превосходит a, будет больше a?

3.14. В квадрат $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ наугад бросается точка $M(x, y)$. Найти вероятность того, что $\min(x, y) \le a,$ если $a \in (0;1]$.

3.15. Внутри квадрата с вершинами (0;0), (1;0), (1;1), (0;1) наудачу выбирается точка M(x,y). Найти вероятность того, что: а) max (x,y) < a; б) xy < a, если 0 < a ≤ 1.

3.16. Для произвольно взятых чисел $a, b \in [0;2]$ вычисляется определитель $D = \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & b \end{vmatrix}$. Какова вероятность, что $D > 0$?

3.17. Компьютер сгенерировал два числа из промежутка [-1;2]. Какова вероятность, что их сумма больше 1, а произведение меньше 1?

3.18. Параметры a, b могут принимать любые значения из промежутка $[-1;1]$. Найти вероятности следующих событий: A = {корни квадратного трехчлена $x^2 + 2ax + b$ действительны}, B = {корни квадратного трехчлена $x^2 + 2ax + b$ положительны}.

3.19. На отрезке длины a поставили две точки. Какова вероятность того, что расстояние между ними меньше $a/3$?

3.20. Два приятеля договорились встретиться в течение часа. Первый из пришедших ждет 10 минут, а потом уходит. Какова вероятность того, что встреча состоится?

3.21. В любой момент времени из промежутка длительностью Т равновозможны поступления в приемник двух сигналов. Определить вероятность того, что промежуток времени между сигналами будет меньше t.

3.22. В случайные моменты времени из промежутка длительностью Т включаются передатчик и приемник. Длительность переданного сигнала t_1, время работы приемника t_2. Какова вероятность, что переданный сигнал будет обнаружен?

3.23. Два теплохода должны подойти к одному и тому же причалу в течение суток. Определить вероятность того, что одному из теплоходов придется ждать освобождения причала, если время стоянки одного теплохода 1час, другого - 2 часа.

3.24. (задача Бюффона) На плоскость, разграфленную параллельными прямыми линиями, отстоящими друг от друга на расстоянии $2a$, наудачу бросается игла длиной $2b$. Какова вероятность того, что игла пересечет одну из прямых, если $b \le a$?

3.25. Из промежутка [0;3] наугад выбираются три числа. Какова вероятность того, что их сумма меньше 3?

3.26.Стержень длины a произвольным образом разламывается на три части. Найти вероятность того, что из этих частей можно составить треугольник. Замечание: треугольник можно составить из трех отрезков, если сумма длин двух любых из них больше длины третьего, а разность длин - меньше длины третьего.

4. ВЕРОЯТНОСТИ СЛОЖНЫХ СОБЫТИЙ

Для вычисления вероятностей сложных событий используются следующие факты теории вероятностей.

Если события А и В несовместны (т.е. не могут произойти одновременно), то вероятность их суммы равна сумме их вероятностей

$$P(A+B) = P(A) + P(B). \qquad (4.1)$$

Если же события А и В совместны, то

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB). \qquad (4.2)$$

Если события A и B независимы (т.е. вероятность одного из событий не зависит от появления или не появления другого), то вероятность произведения событий равна произведению их вероятностей

$$P(AB) = P(A)P(B). \qquad (4.3)$$

Если же события А и В зависимы, то вместо формулы (4.3) используется формула

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B), \qquad (4.4)$$

где $P(A/B)$ и $P(B/A)$ - условные вероятности событий A и B соответственно.

При этом под условной вероятностью $P(A/B)$ события A понимают вероятность события A, вычисленную при условии, что событие B уже произошло. Аналогично понимается вероятность $P(B/A)$.

Формулы (4.1)-(4.4) легко обобщаются на случай n событий $A_1, A_2, ..., A_n$. Так, если события $A_1, A_2, ..., A_n$ попарно несовместны (т.е. любые два события из группы не могут происходить одновременно), то

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n). \qquad (4.5)$$

Если события $A_1, A_2, ..., A_n$ - независимы в совокупности (т.е. появление одного события не зависит от появления или не появления остальных), то

$$P(A_1 A_2 ... A_n) = P(A_1)P(A_2) \cdot ... \cdot P(A_n). \qquad (4.6)$$

Если же события не являются независимыми в совокупности, то вместо формулы (4.6) используется формула

$$P(A_1 A_2 ... A_n) = P(A_1)P(A_2 / A_1)P(A_3 / A_1 A_2) \cdot ...$$
$$... \cdot P(A_n / A_1 \cdot ... \cdot A_n). \qquad (4.7)$$

Правила сложения и умножения вероятностей (формулы (4.1) - (4.7) редко применяются порознь, обычно они используются вместе. Наиболее типична следующая схема: событие А, вероятность которого надо найти, представляется в виде суммы попарно несовместных событий

$$A = A_1 + A_2 + ... + A_n \qquad (4.8)$$

Далее используется формула (4.1) или (4.5), в результате чего нахождение Р(А) сводится к отысканию суммы вероятностей $P(A_k)$, к=1, 2, ... , n. Для этого каждое слагаемое в формуле (4.8) представляется в виде произведений событий, и для отыскания $P(A_k)$ используется одна из формул (4.3),(4.4),(4.6),(4.7).

Следует помнить, что при отыскании вероятности появления "хотя бы одного события" обычно переходят к противоположному событию "не появилось ни одно событие" и используют формулу

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A), \qquad (4.9)$$

где A - событие, состоящее в том, что появилось хотя бы одно событие из некоторой группы событий $A_1, A_2, ..., A_n$, событие $\overline{A}$ состоит в том, что не появилось ни одного события из этой группы.

Пример 1. Вероятность обнаружения самолета за один обзор локатора равна 0,2. Найти вероятность того, что локатор обнаружит самолет ровно на пятом обзоре.

Решение. Введем события A_k = {локатор обнаруживает самолет на k-м обзоре}, k=1,2,3,4,5; A = {самолет обнаружен}. Тогда имеем $A = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4A_5$. Так как события A_k (к=1,2,3,4,5) независимы в совокупности, то $P(A) = P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)P(\overline{A}_4)P(A_5)$. Но $P(\overline{A}_k) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$, $k = 1,2,3,4$. Поэтому $P(A) = 0{,}8^4 \cdot 0{,}2 = 0{,}082$.

Ответ: 0,082.

Пример 2. По каналу связи передаются три сообщения. Каждое из них независимо от других искажается с вероятностью 0,2. Найти вероятности следующих событий: A= {все сообщения переданы без искажений}, B= {все события искажены}, C= {хотя бы одно сообщение искажено}, D= {ровно одно сообщение передано без искажений}, F = {ровно два сообщения переданы без искажений}.

Решение. Введем в рассмотрение вспомогательные события: A_k= {k-е сообщение передано без искажений}, $\overline{A}_k$ ={k-ое сообщение искажено}, k=1, 2, 3. Согласно условию $P(A_k) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$.

Так как $A = A_1A_2A_3$, и A_1, A_2, A_3 независимы в совокупности, то

$$P(A) = P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = 0{,}8^3 = 0{,}512.$$

Далее, так как $B = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$, то

$$P(B) = P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3) = 0{,}2^3 = 0{,}008.$$

Событие $C = \overline{A}$, поэтому $P(C) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}512 = 0{,}488$.

Событие D можно представить следующим образом

$$D = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3,$$

причем слагаемые $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$, $\overline{A}_1A_2\overline{A}_3$, $\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$ – попарно несовместные события. Поэтому на основании формулы (4.5) получаем

$$P(D) = P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3). \qquad (4.10)$$

Далее по формуле (4.6)

$$P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3) = P(A_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3) = 0{,}8\cdot 0{,}2\cdot 0{,}2 = 0{,}032,$$

$P(\overline{A}_1 A_2\overline{A}_3) = 0{,}2\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2 = 0{,}032$, $P(\overline{A}_1\overline{A}_2 A_3) = 0{,}2\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8 = 0{,}032$.

Подставим найденные значения в формулу (4.10), получим P(D)=0,096. Наконец, событие F представим так

$$F = A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3.$$

Проводя рассуждения, подобные изложенным выше, из последней формулы получим

$$P(F) = 0{,}8\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2 + 0{,}8\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8 + 0{,}2\cdot 0{,}8\cdot 0{,}8 = 0{,}384.$$

Ответ: 0,512; 0,008; 0,488; 0,096; 0,384 .

Пример 3. На рис. 4.1 приведена схема соединения элементов. Считая, что отказы элементов независимы в совокупности, найти вероятность безотказной работы схемы, если вероятности отказов элементов равны соответственно 0,1; 0,2; 0,05.

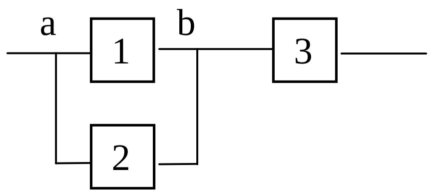


Рис. 4.1.

Решение. Введем в рассмотрение событие: A={схема работает безотказно}, A_k = {к-й блок работает безотказно}, к=1,2,3; B={цепь a-b работает безотказно}. Тогда $\overline{B}$ = {цепь $a-b$ отказала}. Отказ цепи a-b возможен, если только одновременно отказывают элементы 1 и 2, значит, $\overline{B} = \overline{A}_1\overline{A}_2$. Теперь по формуле (4.3)

$$P(\overline{B}) = P(\overline{A}_1\overline{A}_2) = P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2) = 0{,}1\cdot 0{,}2 = 0{,}02.$$

Отсюда по формуле вероятности противоположного события

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0{,}98 = 0{,}02.$$

Схема на рис. 4.1 работает, если одновременно работают цепь a-b и элемент 3, значит, $A = BA_3$. По формуле (4.3)

$$P(A) = P(B)P(A_3) = 0{,}98\cdot(1 - 0{,}05) = 0{,}931.$$

Ответ: 0,931.

Пример 4. Опыт состоит в последовательном подбрасывании монеты два раза. Рассматриваются события: A= {первый раз выпадает герб}, B= {второй раз выпадает герб}, C= {герб выпадает хотя бы один раз}, D= {цифра выпадает хотя бы один раз}. Определить, зависимы или независимы пары событий: A и B, A и D, B и C, C и D.

Решение. Так как $P(B) = P(A/B) = 0{,}5$, то события A и B независимы. Так как $\overline{D}$ ={ни разу не выпадает цифра}, то $\overline{D} = AB$, следовательно,

$$P(\overline{D})=0{,}5\cdot 0{,}5=0{,}25, \qquad P(D)=1-0{,}25=0{,}75.$$

Событие: выпадение цифры хотя бы один раз при условии, что первый раз уже появился герб, возможно только в том случае, если второй раз появится цифра, что может произойти с вероятностью 0,5. Значит, P(D/A)= 0,5. Итак, $P(D/A)\neq P(D)$, поэтому события A и D зависимы.

Так как $\overline{C}$={не выпадает ни одного герба}, то $\overline{C}=\overline{A}\cdot\overline{B}$. Следовательно, $P(\overline{C})=0{,}5\cdot 0{,}5=0{,}25$ и $P(C)=1-0{,}25=0{,}75$. Событие: выпадение хотя бы одного герба при условии, что герб выпадает при втором подбрасывании, происходит всегда. Значит, $P(C/B)=1$. Итак, $P(C/D)\neq P(C)$, поэтому события B и C зависимы.

Произведение событий CD состоит в одновременном появлении хотя бы один раз и герба, и цифры, что возможно только в том случае, если и герб, и цифра выпадают по одному разу, т.е. $CD=A\overline{B}+\overline{A}B.$ Находим $P(CD)=P(A)P(\overline{B})+P(\overline{A})P(B)=0{,}5\cdot 0{,}5+0{,}5\cdot 0{,}5=0{,}5.$ Кроме того, P(C)=0,75, P(D)=0,75. Поэтому согласно (4.4)

$$P(D/C)=P(CD)/P(C)=0{,}5/0{,}75=2/3\neq P(D).$$

Значит, события C и D зависимы.

<u>Пример 5.</u> В урне a белых и b черных шаров. Наугад вынимается два шара. Найти вероятности следующих событий: A = {вынуты шары разного цвета}, B = {вынуты шары одного цвета}.

<u>Решение.</u> Заметим, прежде всего, что эту задачу можно было бы решить на основе классической вероятности (см. раздел 2). Мы же будем решать задачу с помощью теорем сложения и умножения вероятностей. Введем вспомогательные события: A_1 = {первый вынутый шар белый}, A_2 = {второй вынутый шар белый}.

Так как событие A состоит в вынимании одного белого и одного черного шаров, то $A=A_1\overline{A}_2+\overline{A}_1A_2$. По формулам (4.1), (4.4)

$$P(A)=P(A_1)P(\overline{A}_2/A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_2/\overline{A}_1). \qquad (4.11)$$

Находим

$$P(A_1)=\frac{a}{a+b},\quad P(\overline{A}_1)=\frac{b}{a+b},\quad P(\overline{A}_2/A_1)=\frac{b}{a+b-1},$$

$$P(A_2/\overline{A}_1)=\frac{a}{a+b-1}$$

и подставим в формулу (4.11). Получим

$$P(A)=\frac{a}{a+b}\cdot\frac{b}{a+b-1}+\frac{b}{a+b}\cdot\frac{a}{a+b-1}=\frac{2ab}{(a+b)(a+b-1)}.$$

Далее, так как $B=\overline{A}$, то

$$P(B)=1-P(A)=1-\frac{2ab}{(a+b)(a+b-1)}.$$

Ответ: $2ab/((a+b)(a+b-1)),\quad 1-2ab/((a+b)(a+b-1))$.

Пример 6. На 10 карточках написаны буквы: А, А, А, А, А, Р, Р, Р, Д, Д. Наугад берется 5 карточек и прикладывается одна к другой слева направо. Какова вероятность того, что случайно будет сложено слово РАДАР?

Решение. Чтобы сложить слово РАДАР, нужно, чтобы первой была взята буква Р (вероятность ее взять равна 3/10, так как имеются 3 буквы Р из 10), второй – буква А (вероятность ее взять равна 5/9, так как имеются 5 букв А среди оставшихся 9 карточек), третьей - буква Д (вероятность ее взять составляет 2/8, так как имеются 2 буквы Д среди оставшихся 8 карточек), четвертой - снова буква А (с вероятностью 4/7, так как остались 4 буквы А среди оставшихся 7 карточек), пятой - снова буква Р (с вероятностью 2/6, так как остались две буквы Р среди оставшихся 6 карточек). Таким образом,

$$P(A)=\frac{3}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{2}{6}=\frac{1}{126}=0{,}00794.$$

Ответ: 0,00794.

4.1. Производится стрельба в мишень до первого попадания. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,2. Найти вероятность того, что будет произведено 6 выстрелов.

4.2. Ведется пристрелка орудия по цели. Вероятность попадания в цель при первом выстреле равна 0,7, при последующих выстрелах эта вероятность каждый раз увеличивается на 0,05. Какова вероятность того, что цель будет поражена лишь третьим выстрелом?

4.3. Брошены три игральные кости. Найти вероятность следующих событий: A = {на всех костях выпало по 5 очков}, B = {на всех костях выпало одно и то же число очков.}

4.4. В круг, в который вписан квадрат, бросают две точки. Найти вероятность того, что обе они окажутся внутри квадрата.

4.5. Два стрелка, для которых вероятность попадания в цель равна соответственно 0,7 и 0,8, производят по выстрелу. Определить вероятности событий: A ={цель поражена двумя пулями}, B = {цель поражена одной пулей}, C = {цель поражена хотя бы одной пулей}.

4.6. Три студента делают некоторый расчет. Вероятность ошибиться для первого студента составляет 0,1, для второго - 0,15, для третьего - 0,2. Найти вероятности следующих событий: A = {все студенты выполнили расчет верно}, B = {только два студента выполнили верно расчет}, C = {хотя бы один студент допустил ошибку в расчете}.

4.7. По рации передаются три закодированных сообщения. Вероятность ошибки при расшифровке каждого сообщения составляет 0,3. Найти вероятности следующих событий: A = {все сообщения расшифрованы верно}, B = {одно сообщение расшифровано с ошибкой}, C = {с ошибкой расшифровано не менее двух сообщений}.

4.8. ОТК отбирает изделия высшего сорта. Вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется высшего сорта, равна 0,8. Найти вероятность того, что из трех взятых изделий: а) только одно высшего сорта; б) два высшего сорта; в) хотя бы одно высшего сорта.

4.9. Отрезок длины a разделен в отношении 2:1. Внутрь отрезка бросаются две точки. Какова вероятность, что на каждую часть отрезка попадет по точке?

4.10. На участке АВ для гонщика имеется 6 препятствий, вероятность остановки на каждом равна 0,1. Вероятность того, что от В до С гонщик проедет без остановки, равна 0,7. Какова вероятность того, что на АС у гонщика не будет ни одной остановки?

4.11. Наудачу подбрасываются две игральные кости. Найти вероятности следующих событий: A = {сумма выпавших очков четна}, B = {произведение выпавших очков четно}, C = {на одной кости число очков четно, а на другой нечетно}.

4.12. В гирлянду последовательно включено 10 лампочек. Вероятность перегорания лампочки при повышении напряжения составляет 0,1. Определить вероятность безотказной работы гирлянды при повышении напряжения.

4.13. Вероятность выхода из строя каждого двигателя трех моторного самолета равна p. Самолет может продолжать полет, если работает хотя бы один двигатель. Какова вероятность аварии?

4.14. Для изготовления микросхемы требуется n технологических операций; вероятность брака на каждой операции равна p. Какова вероятность изготовления бракованной микросхемы?

4.15. Сколько надо взять игральных костей, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,7, можно было ожидать выпадения 6 очков хотя бы на одной кости?

4.16. Вероятность попадания стрелком в мишень равна p. Сколько нужно сделать выстрелов, чтобы с вероятностью, не меньшей p_1, было зарегистрировано хотя бы одно попадание?

4.17. Самолет терпит аварию, если отказали оба двигателя, или вышла из строя система управления, или вышли из строя системы навигации. Найти вероятность аварии самолета, если вероятность выхода из строя каждого двигателя составляет 0,005, системы управления - 0,001, систем навигации - 0,0002.

4.18 - 4.23. На рисунках 4.2-4.7 приведены схемы соединения элементов, образующих цепь с одним входом и одним выходом. Предполагается, что отказы являются независимыми в совокупности событиями. Надежности 1,2,3,4,5,6 блоков равны соответственно p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6. Найти надежность каждой из приведенных ниже схем.

4.18.

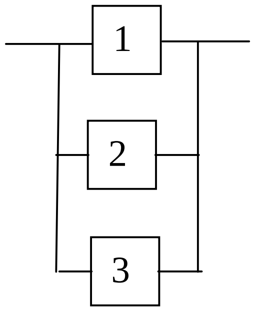


Рис. 4.2.

4.19.

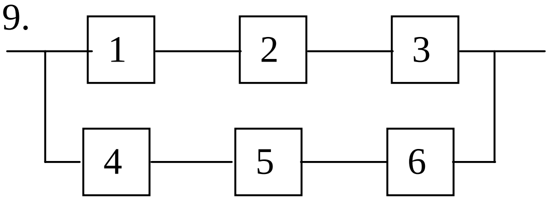


Рис. 4.3.

4.20.

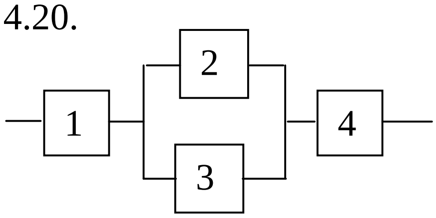


Рис. 4.4.

4.21.

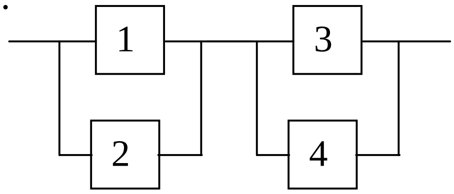


Рис. 4.5.

4.22.

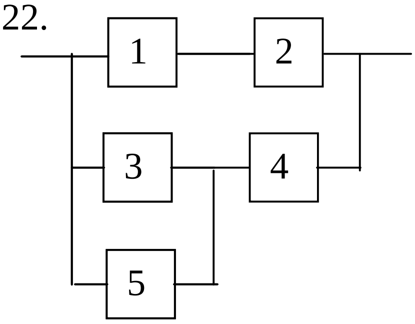


Рис. 4.6.

4.23.

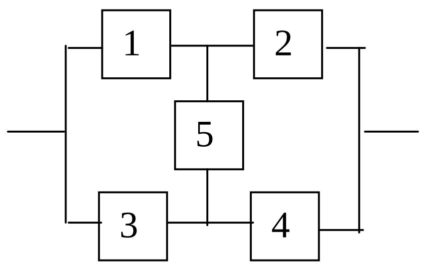


Рис. 4.7.

4.24. По самолету выпущена ракета, самолет может уничтожить ее с вероятностью 0,7. Если самолет не уничтожит ракету, то она поражает самолет с вероятностью 0,9. Какова вероятность поражения самолета ракетой?

4.25. Коля с Мишей по одному разу пробивают футбольный "пенальти", игру начинает Коля. Первый забивший мяч считается выигравшим. Вероятность забить мяч в ворота для обоих мальчиков составляет 0,6. Найти вероятности: а) ничьей; б) выигрыша Коли; в) выигрыша Миши.

4.26. Происходит воздушный бой между двумя самолетами: истребителем и бомбардировщиком. Стрельбу начинает истребитель, он дает очередь по бомбардировщику и сбивает его с вероятностью p_1. Если бомбардировщик этой очередью не сбит, он стреляет по истребителю и сбивает его с вероятностью p_2. Если истребитель не сбит, то он снова стреляет по бомбардировщику и сбивает его с вероятностью p_1. Найти вероятности следующих исходов боя: A = {сбит бомбардировщик}, B = ={сбит истребитель}, C = {ни один из самолетов не оказался сбитым}.

4.27. Два школьника играют в следующую игру: один задумывает некоторое число в пределах от 1 до 9, а другой его угадывает. Какова вероятность того, что число будет угадано с третьей попытки?

4.28. Абонент забыл последнюю цифру телефонного номера и набирает ее наугад. Какова вероятность, что ему придется набирать номер не более трех раз?

4.29. Из урны, содержащей 6 белых и 4 черных шара, наудачу и последовательно извлекают по одному шару до появления черного шара. Найти вероятность того, что придется производить четвертое извлечение, если выборка производится: а) с возвращением; б) без возвращения.

4.30. В ящике лежат 12 красных, 8 зеленых, 10 синих шаров. Наудачу вынимается два шара. Найти вероятность того, что будут вынуты шары разного цвета.

4.31. Студент знает 40 из 60 вопросов программы. Экзаменационный билет состоит из 3 вопросов, отобранных случайным образом. Какова вероятность того, что студент знает не менее двух вопросов билета?

4.32. На 10 карточках написаны буквы: А, А, А, А, А, А, М, М, М, М. Ребенок наугад вытаскивает одну за другой 4 карточки и прикладывает их друг к другу слева направо. Какова вероятность того, что он случайно сложит слово МАМА?

4.33. Слово МАТЕМАТИКА разрезается на буквы. Буквы перемешиваются и снова складываются слева направо. Найти вероятность того, что снова получится слово МАТЕМАТИКА.

4.34. Слово АККЛИМАТИЗАЦИЯ разрезается на буквы, которые тщательно перемешиваются. Вытаскиваются наугад 5 букв и прикладываются одна к другой слева направо. Какова вероятность сложить слова: а) акция; б) клика; в) казак?

4.35. Коля с Мишей вынимают поочередно по одной кости из полного набора домино. Каждый имеет право вынуть не более трех костей.

Выигравшим считается тот, кто первым вынет "дубль". Первым игру начинает Коля. Найти вероятности выигрыша каждого мальчика.

4.36. Покупателю предлагается 50 лотерейных билетов, из которых 4 выигрышных. Покупатель покупает наугад три билета. Найти вероятности следующих событий: A = {куплены все выигрышные билеты}, B = {большая часть купленных билетов не выигрывает}.

4.37. Из колоды в 36 карт наудачу извлекается одна карта. Вводятся события: A = {извлеченная карта является тузом}, B = {извлечена карта черной масти}, C = {извлеченная карта является фигурой (т.е. валетом, дамой, королем, тузом)}. Установить, зависимы или независимы следующие пары событий: А и В, А и С, В и С. Определить, используя формулу вероятности произведения, вероятность события АВС.

4.38. Из 100 студентов, находящихся в аудитории, 50 человек знают английский язык, 40 - французский, 35 - немецкий. Английский и французский языки знают 20 студентов, английский и немецкий 8 человек, французский и немецкий - 10 человек. Все три языка знают 5 человек. Один из студентов вышел из аудитории. Введем события: A= {вышедший знает английский язык}, B= {вышедший знает французский язык}, C = {вышедший знает немецкий язык}. Указать все пары независимых событий. Установить, являются ли события A, B, C независимыми в совокупности.

4.39. Коля с Мишей поочередно бросают монету, выигрывает тот, у кого раньше появится герб. Найти вероятности выигрыша каждого игрока, считая, что бросание монеты может продолжаться бесконечно долго, а Коля бросает первым.

4.40. Два стрелка поочередно стреляют по цели, вероятности их попадания равны соответственно 0,8 и 0,6. Соревнования продолжаются до первого попадания в мишень какого-либо стрелка. Найти вероятность выигрыша для каждого стрелка.

5. ФОРМУЛЫ ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ И БАЙЕСА

Допустим, производится эксперимент (опыт), об условиях которого можно сделать n взаимно исключающих друг друга предположений (гипотез): $H_1, H_2, ..., H_n$. Каждая гипотеза представляет из себя некоторое событие; все они попарно несовместны и образуют полную группу (т.е. в результате эксперимента может реализоваться ровно одна из гипотез). Вероятности гипотез должны быть предварительно найдены; пусть они равны $P(H_1), P(H_2), ..., P(H_n)$. Отметим, что если при решении задачи гипотезы введены правильно, и их вероятности найдены верно, то справедливо равенство

$$P(H_1) + P(H_2) + ... + P(H_n) = 1.$$

Если равенство не выполняется, это говорит о том, что либо система гипотез введена неверно, либо имеются ошибки в вычислении вероятностей гипотез.

Далее рассматривается некоторое событие A, вероятность которого нужно определить. При этом сначала находятся условные вероятности $P(A/H_1), P(A/H_2), ..., P(A/H_n)$. Затем вероятность события A находится по следующей формуле полной вероятности

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A/H_i). \qquad (5.1)$$

Вероятности $P(H_i)$, i=1, 2, ..., n, вычисляются до проведения эксперимента. В зависимости от появления или непоявления события A в результате эксперимента вероятности гипотез могут быть уточнены. Условные вероятности гипотез $P(H_k / A)$ могут быть найдены с помощью формулы Байеса (или Бейеса)

$$P(H_k / A) = \frac{P(H_k) P(A/H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A/H_i)}, \quad \mathrm{k} = 1, 2, ..., \mathrm{n}. \qquad (5.2)$$

<u>Пример 1.</u> В сборочный цех поступают детали с трех поточных линий. Производительности этих линий относятся как 5:3:2. Вероятность брака для первой линии составляет 0,01; для второй линии - 0,02; для третьей линии - 0,03. Найти вероятность того, что наугад взятая деталь бракована.

<u>Решение.</u> Пусть A = {взятая деталь бракована}. Введем систему гипотез: H_k={деталь изготовлена на k-й линии} , k=1, 2, 3. Находим вероятности гипотез

$$P(H_1) = \frac{5}{5+3+2} = 0{,}5; \quad \mathrm{P(H_2)} = \frac{3}{5+3+2} = 0{,}3; \quad \mathrm{P(H_3)} = \frac{2}{5+3+2} = 0{,}2.$$

Согласно условию задачи условные вероятности события A равны

$$P(A/H_1) = 0{,}01; \quad \mathrm{P(A/H_2)} = 0{,}02; \quad \mathrm{P(A/H_3)} = 0{,}03.$$

Применим формулу полной вероятности (5.2).

$$P(A) = P(H_1)\, P(A/H_1) + P(H_2)\, P(A/H_2) + P(H_3)\, P(A/H_3) =$$

$$= 0{,}5 \cdot 0{,}01 + 0{,}3 \cdot 0{,}02 + 0{,}2 \cdot 0{,}03 = 0{,}017.$$

Ответ: 0,017.

<u>Пример 2.</u> На уничтожение цели противника вылетело два самолета разных типов. Самолет первого типа может уничтожить цель с вероятностью 0,9, второго типа - с вероятностью 0,8. Однако противовоздушная оборона противника может сбить самолет первого типа с вероятностью

0,95, самолет второго типа - с вероятностью 0,85. Какова вероятность уничтожения цели?

Решение. Пусть A = {цель уничтожена}. Введем систему гипотез:
H_0 = {оба самолета не прорвались к цели};
H_1 = {только самолет первого типа прорвался к цели};
H_2 = {только самолет второго типа прорвался к цели};
H_3 = {оба самолета прорвались к цели}.
Находим вероятности гипотез
$P(H_0) = 0{,}95 \cdot 0{,}85 = 0{,}8075;\quad \mathrm{P(H_1)} = 0{,}05 \cdot 0{,}85 = 0{,}0425;$
$P(H_2) = 0{,}95 \cdot 0{,}15 = 0{,}1425;\quad \mathrm{P(H_3)} = 0{,}05 \cdot 0{,}15 = 0{,}0075.$
Находим условные вероятности события А.

$$P(A/H_0) = 0;\quad \mathrm{P(A/H_1)} = 0{,}9;\quad \mathrm{P(A/H_2)} = 0{,}8;$$
$$P(A/H_3) = 0{,}9 + 0{,}8 + 0{,}9 \cdot 0{,}8 = 0{,}98.$$

Теперь по формуле (5.2)
$P(A) = 0{,}8075 \cdot 0 + 0{,}0425 \cdot 0{,}9 + 0{,}1425 \cdot 0{,}8 + 0{,}0075 \cdot 0{,}98 = 0{,}1596.$

Ответ: 0,1596.

Пример 3. Партия микросхем, среди которых 10% неисправных, поступила на проверку. Используется упрощенный тест проверки, по которому с вероятностью 0,95 дефектная микросхема признается дефектной и с вероятностью 0,03 исправная микросхема признается дефектной. Наудачу протестированная микросхема признана дефектной. Какова вероятность того, что на самом деле микросхема является исправной?

Решение. Пусть A = {наудачу протестированная микросхема признана дефектной}. Введем систему гипотез: H_1 = {тестируется дефектная микросхема}, H_2 = {тестируется исправная микросхема}. Находим вероятности гипотез $P(H_1) = 0{,}1;$ $P(H_2) = 0{,}9$. Условные вероятности события равны $P(A/H_1) = 0{,}95;$ $P(A/H_2) = 0{,}03$. По формуле Байеса (5.2) находим

$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2)\,\mathrm{P(A/H_2)}}{P(H_1)\,\mathrm{P(A/H_1)} + P(H_2)\,\mathrm{P(A/H_2)}} =$$

$$= \frac{0{,}9 \cdot 0{,}03}{0{,}1 \cdot 0{,}95 + 0{,}9 \cdot 0{,}03} = \frac{0{,}027}{0{,}122} = 0{,}221.$$

Ответ: 0,221.

Пример 4. В группе из 10 студентов, пришедших на экзамен, 3 студента подготовлены отлично, 4 - хорошо, 2 - удовлетворительно и 1 - плохо. В экзаменационных билетах имеется 20 вопросов. Отлично подготовленный студент может ответить на все 20 вопросов, хорошо подготовленный - на 16, удовлетворительно подготовленный - на 10, плохо подготовленный - на 5. Вызванный наугад студент ответил на все три заданных преподавателем вопроса. Найти вероятность того, что этот студент: а) подготовлен отлично; б) подготовлен плохо.

Решение. Пусть событие А={студент ответил все три вопроса}. Введем систему гипотез:

H_1={студент подготовлен отлично};

H_2={студент подготовлен хорошо};

H_3={студент подготовлен удовлетворительно};

H_4={студент подготовлен плохо}.

Находим вероятности гипотез.

$$P(H_1)=0{,}3;\quad P(H_2)=0{,}4;\quad P(H_3)=0{,}2;\quad P(H_4)=0{,}1.$$

Находим условные вероятности события А.

$$P(A/H_1)=1;\quad P(A/H_2)=16/20\cdot 15/19\cdot 14/18=0{,}491;$$

$$P(A/H_3)=\frac{10}{20}\cdot\frac{9}{19}\cdot\frac{8}{18}=0{,}105;\quad P(A/H_4)=\frac{5}{20}\cdot\frac{4}{19}\cdot\frac{3}{18}=0{,}009.$$

По формуле Байеса (5.2) находим

$$P(H_1/A)=\frac{0{,}3\cdot 1}{0{,}3\cdot 1+0{,}4\cdot 0{,}491+0{,}2\cdot 0{,}105+0{,}1\cdot 0{,}09}=0{,}58;$$

$$P(H_4/A)=\frac{0{,}1\cdot 0{,}09}{0{,}3\cdot 1+0{,}4\cdot 0{,}491+0{,}2\cdot 0{,}105+0{,}1\cdot 0{,}09}=0{,}002.$$

Ответ: 0,58; 0,002.

5.1. В цехе 14 установок с автоматическим контролем и 6 с ручным. Вероятность изготовления некондиционной продукции для установок с автоматическим контролем составляет 0,001, с ручным контролем - 0,002. Какова вероятность того, что взятая на лабораторный анализ продукция цеха оказалась кондиционной?

5.2. На конвейер поступают детали с двух станков с ЧПУ. Производительность первого станка в 2 раза больше производительности второго. Вероятность брака на первом станке 0,01, на втором станке 0,02. Найти вероятность того, что наудачу взятая деталь стандартна.

5.3. В продажу поступают телевизоры трех заводов. Продукция первого завода содержит 20% телевизоров со скрытым дефектом, второго - 10%, третьего 5%. Какова вероятность приобрести исправный телевизор, если в магазин поступило 30 телевизоров первого завода, 20 второго, 50 третьего.

5.4. В бригаде 8 рабочих и 2 ученика. Вероятность изготовить бракованное изделие для рабочего составляет 0,05, для ученика 0,2. Производительность рабочего в два раза выше, чем у ученика. Какова вероятность, что некоторое изделие, изготовленное бригадой, окажется бракованным?

5.5. В студенческой группе 3 отличника, 5 хорошо успевающих, 12 слабо успевающих студента. Отличник с равной вероятностью может получить на экзамене 5 или 4; хорошо успевающий студент - с равной вероятностью 5 или 4, или 3; слабо успевающий - с равной вероятностью 3 или 2. Какова вероятность, что наугад вызванный сдавать экзамен студент получит оценку 4?

5.6. Вероятность попадания в танк при одном выстреле составляет 0,2. При одном попадании танк загорается с вероятностью 0,3, при двух - с вероятностью 0,5, при трех - с вероятностью 0,9. По танку сделано три выстрела. Какова вероятность его загорания?

5.7. Производится n независимых выстрелов по резервуару с горючим. Каждый снаряд попадает в резервуар с вероятностью p. Если в резервуар попал один снаряд, то горючее воспламеняется с вероятностью p_1, если два и более, то с вероятностью 1. Найти вероятность того, что при n выстрелах горючее воспламенится.

5.8. Имеется 15 экзаменационных билетов, каждый из которых содержит по 2 вопроса. Студент Иванов знает ответ только на 15 вопросов. Определить вероятность того, что он сдаст экзамен, если для этого нужно ответить либо на оба вопроса, либо на один вопрос билета и один дополнительный вопрос.

5.9. Студент Иванов знает только 10 экзаменационных билетов из 25. В каком случае шансы Иванова сдать экзамены выше: когда он берет билет первым или вторым?

5.10. В первой урне лежат 8 белых и 12 черных шаров, во второй урне - 4 белых и 15 черных шаров. Из первой урны во вторую перекладывается один шар, затем из второй урны извлекается шар. Какова вероятность того, что извлеченный шар белый?

5.11. В первой урне находится 3 белых и 7 черных шаров, во второй урне- 5 белых и 3 черных шара. Из первой урны во вторую перекладываются 2 шара, а затем из второй урны извлекается шар. Какова вероятность того, что он белый?

5.12. В ящике лежат 15 новых и 5 игранных теннисных мячей. Для игры наудачу выбираются два мяча, и после игры возвращаются обратно. Затем для второй игры также наудачу отбираются еще два мяча. Какова вероятность того, что вторая игра будет проводиться новыми мячами?

5.13. В первой урне лежат 8 белых и 12 черных шаров, во второй урне - 4 белых и 16 черных шара. Из каждой урны берется по шару и перекладывается в третью урну, затем из третьей урны вытаскивается шар. Какова вероятность того, что вытащен белый шар?

5.14. Для поиска пропавшего самолета выделено 10 вертолетов, каждый из которых может быть использован в одном из двух районов, где самолет может находиться с вероятностями 0,8 и 0,2. Как следует распределить вертолеты, чтобы вероятность обнаружения самолета была наибольшей. Найти вероятность обнаружения самолета при оптимальной процедуре поиска. Считается, что каждый вертолет обнаруживает находящийся в районе самолет с вероятностью 0,2, и поиски осуществляются каждым вертолетом независимо от других.

5.15. В пирамиде 10 винтовок с оптическим прицелом и 20 без оптического прицела. Вероятность попадания в мишень из винтовки с оптическим прицелом равна 0,9 , из винтовки без оптического прицела - 0,6. Наугад берется винтовка, и из нее делается выстрел; при этом мишень оказывается пораженной. Найти вероятность того, что выстрел сделан: а) из винтовки с оптическим прицелом; б) из винтовки без оптического прицела.

5.16. На вход радиолокационного устройства с вероятностью 0,8 поступает смесь полезного сигнала с помехой, а с вероятностью 0,2 - только помеха. Если поступает полезный сигнал с помехой, то устройство регистрирует наличие сигнала с вероятностью 0,7, если только помеха, то с вероятностью 0,3. Известно, что устройство зарегистрировало наличие сигнала. Найти вероятность того, что в его составе есть полезный сигнал.

5.17. Однотипные приборы выпускаются тремя заводами в количественном отношении: $n_1 : n_2 : n_3$; вероятности брака для этих заводов соответственно равны p_1, p_2, p_3. Прибор, купленный лабораторией, оказался бракованным. Какова вероятность того, что этот прибор изготовлен первым заводом?

5.18. В урне лежит шар неизвестного цвета: с равной вероятностью белый или черный. В урну опускается белый шар и после тщательного перемешивания один шар извлекается. Он оказался белым. Какова вероятность того, что в урне остался белый шар?

5.19. Прибор состоит из двух последовательно включенных узлов. Надежность первого узла равна 0,9, второго - 0,8. За время испытания прибора зарегистрирован его отказ. Найти вероятности следующих событий: а) отказал только первый узел; б) отказали оба узла.

5.20. В условиях задачи 5.5 студент получил на экзамене оценку 4. Какова вероятность, что он хорошо учился в семестре?

5.21. Три стрелка стреляют по мишени, которая оказывается пораженной одной пулей. Найти вероятность того, что попал первый стрелок, если вероятности попадания стрелков равны соответственно 0,6, 0,7, 0,8.

5.22. Батарея из трех орудий произвела залп, причем два снаряда попали в цель. Найти вероятность того, что первое орудие попало в цель, если вероятности попадания для орудий равны соответственно 0,4, 0,3, 0,5.

5.23. Вероятности попадания при каждом выстреле для трех стрелков равны соответственно 4/5, 3/4, 2/3. При одновременном выстреле всех трех стрелков имеется два попадания. Определить вероятность того, что промахнулся первый стрелок.

5.24. Трое охотников одновременно выстрелили по вепрю, который был убит одной пулей. Определить вероятности того, что вепрь убит первым, вторым, третьим охотником, если вероятности попадания для них равны соответственно 0,2, 0,4, 0,6.

6. ФОРМУЛА БЕРНУЛЛИ

Опыты называются *независимыми*, если вероятность исхода каждого опыта не зависит от того, какие исходы имели предшествующие опыты. Если производится n независимых опытов в одинаковых условиях, причем в каждом из них событие А появляется с вероятностью p, то вероятность появления в этих опытах события А ровно k раз находится по следующей формуле Бернулли

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0,1,\ldots,n. \tag{6.1}$$

Число k_0 появления события называется *наивероятнейшим*, если вероятность появления события k раз при n испытаниях превышает (или, по крайней мере, не меньше) вероятности остальных возможных исходов испытаний. Наивероятнейшее число k_0 определяется из двойного неравенства

$$(n+1)p - 1 \le k_0 \le (n+1)p. \tag{6.2}$$

В том случае, когда вероятность появления события изменяется от опыта к опыту, формула Бернулли (6.1) оказывается неприменимой; в этом случае используется так называемая *производящая функция*

$$G_n(z) = (p_1 z + q_1)(p_2 z + q_2)\ldots(p_n z + q_n), \tag{6.3}$$

где p_1 - вероятность появления события А в первом опыте, p_2 - во втором опыте,..., p_n - в n-ом опыте, $q_1 = 1 - p_1$, $q_2 = 1 - p_2$,..., $q_n = 1 - p_n$. Тогда вероятность $P_n(k)$ появления события А ровно k раз равна коэффициенту при z^k в разложении производящей функции $G_n(z)$ по степеням z.

Если же результатом каждого опыта является не два исхода $A, \overline{A}$, а несколько взаимно исключающих друг друга исходов: $A_1, A_2, \ldots, A_s$, которые в результате опыта могут появиться с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_s$ соответственно, то вероятность того, что в n опытах событие A_1 появится k_1 раз, событие A_2 – k_2 раз, ... , событие A_s – k_s раз находится по формуле

$$P_n(k_1, k_2, ..., k_s) = \frac{n!}{k_1!k_2!...k_n!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdot ... \cdot p_s^{k_s}. \qquad (6.4)$$

Отметим, что формула Бернулли (6.1) является частным случаем формулы (6.4) при s=2.

Пример 1. Вероятность выигрыша лотерейного билета составляет 0,1. Некто покупает 5 лотерейных билетов. Найти вероятности следующих событий: A = {ровно два билета выигрывают}, B = {большая часть билетов выигрывает}, C={выигрывает хотя бы два билета}.

Решение. Согласно условию задачи p= 0,1. По формуле (6.1)

$$P(A) = P_5(2) = C_5^2 \cdot 0{,}1^2 \cdot (1 - 0{,}1)^3 = 0{,}0729.$$

Так как событие B означает, что выигрывают 3, 4 или все 5 билетов, то

$$P(B) = P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) = C_5^{3\cdot} \cdot 0{,}1^3 \cdot 0{,}9^2 + C_5^4 \cdot 0{,}1^4 \cdot 0{,}9 +$$

$$+ C_5^5 \cdot 0{,}1^5 \cdot 0{,}9^0 = 0{,}0081 + 0{,}00045 + 0{,}00001 = 0{,}00856.$$

Для вычисления P(C) перейдем к противоположному событию $\overline{C}$ $\overline{C}$={выигрывает менее двух билетов}. Так как событие $\overline{C}$ означает, что выигрывает либо 0, либо 1 билет, то

$$P(\overline{C}) = P_5(0) + P_5(1) = C_5^0 \cdot 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^5 + C_5^1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^4 =$$

$$= 0{,}59049 + 0{,}32805 = 0{,}91845.$$

Тогда $P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 0{,}08146.$

Ответ: 0,0729; 0,00856; 0,08146.

Пример 2. На отрезок MN длины a наудачу брошено 5 точек. Найти вероятность того, что две точки будут находиться от точки M на расстоянии, меньшем x, а три другие - на расстоянии, большем x. Считаем, что $x \in (0; a)$.

Решение. Введем в рассмотрение событие A={брошенная точка находится от точки M на расстоянии, меньшем x}; тогда $p = P(A) = x / a$. Брошено 5 точек - значит, эксперимент повторен 5 раз. Поэтому вероятность искомого события равна согласно (6.1)

$$P_5(2) = C_5^2 p^2 (1 - p)^3 = 10x^2 (1 - x / a)^3 / a^2.$$

Ответ: $10x^2 (1 - x / a)^3 / a^2$.

Пример 3. Испытывается каждый из 15 элементов некоторого устройства. Вероятность выдержать испытание для каждого элемента составляет 0,9. Найти наивероятнейшее число выдержавших испытание элементов и его вероятность.

Решение. Так как $n=15$, $p=0{,}9$, то по формуле (6.2) имеем $16\cdot 0{,}9-1\le k_0 \le 16\cdot 0{,}9$, откуда $k_0=14$.

Далее находим $P_{15}(14)=C_{15}^{14}\cdot 0.9^{14}0{,}1=0{,}343$.

Ответ: 14; 0,343.

Пример 4. Устройство состоит из трех независимо работающих блоков. Вероятности безотказной работы блоков за время t равны соответственно $p_1=0{,}7$, $p_2=0{,}8$, $p_3=0{,}9$. Найти вероятности того, что за время t будут работать безотказно: а) все три элемента; б) два элемента; в) один элемент.

Решение. Вероятности отказов блоков равны соответственно $q_1=0{,}3$, $q_2=0{,}2$, $q_3=0{,}1$. Производящая функция (6.3) для нашей задачи имеет вид

$$G_3(z)=(p_1z+q_1)(p_2z+q_2)(p_3z+q_3)=(0{,}7z+0{,}3)(0{,}8z+0{,}2)\cdot$$

$$\cdot(0{,}9z+0{,}1)=0{,}504z^3+0{,}398z^2+0{,}092z+0{,}006.$$

Вероятность безотказной работы всех трех элементов равна коэффициенту при z^3, значит, $P_3(3)=0{,}504$. б) Вероятность безотказной работы двух элементов равна коэффициенту при z^2, значит, $P_3(2)=0{,}398$. Вероятность безотказной работы одного элемента равна коэффициенту при z, значит, $P_3(1)=0{,}092$.

Ответ: 0,504; 0,398; 0,092.

Пример 5. В цех по ремонту радиоаппаратуры поступают резисторы с трех заводов в отношении 2:3:5. Мастер для ремонта прибора взял наугад 6 резисторов. Какова вероятность того, что взят 1 резистор первого завода, 2 резистора второго завода, 3 резистора третьего завода?

Решение. Вероятности взять резисторы первого, второго, третьего заводов равны соответственно 0,2 , 0,3 , 0,5. Используем формулу (6.4), в которой полагаем $n=6$, $k_1=1$, $k_2=2$, $k_3=3$, $p_1=0{,}2$, $p_2=0{,}3$, $p_3=0{,}5$. Получаем

$$p=P_6(1,2,3)=\frac{6!}{1!\cdot 2!\cdot 3!}0{,}2\cdot 0{,}3^2\cdot 0{,}5^3=0{,}135.$$

Ответ: 0,135.

6.1. Монета бросается 5 раз. Найти вероятность того, что герб появится: а) 1 раз; б) 2 раза; в) 3 раза.

6.2. Игральная кость бросается 5 раз. Найти вероятность того, что 2 раза появится число очков, кратное трем.

6.3. На цель сбрасывается 6 бомб, вероятность попадания каждой в цель составляет 0,3. Найти вероятность поражения цели: а) 4 бомбами; б) 3 бомбами.

6.4. Вероятность попадания бомбы в цель составляет 0,25. Сбрасывается 8 бомб. Найти вероятность того, что будет: а) не менее 7 попаданий; б) не менее 1 попадания.

6.5. Вероятность попадания стрелком в мишень при каждом выстреле не зависит от результатов предыдущих выстрелов и равна 0,8. Стрелок сделал 5 выстрелов. Найти вероятности следующих событий: а) мишень поражена одной пулей; б) мишень поражена двумя пулями; в) зарегистрировано хотя бы одно попадание; г) зарегистрировано не менее трех попаданий.

6.6. В семье 5 детей; вероятность рождения мальчика равна 0,51. Найти вероятности событий: A = {в семье два мальчика}, B= {в семье не более двух мальчиков}, C = {в семье более двух мальчиков}, D = {в семье не менее 2 и не более 3 мальчиков}.

6.7. Играют две равносильные команды в футбол. В ходе матча забито 4 мяча. Какова вероятность того, что счет будет равным?

6.8. Два равносильных противника играют в шахматы. Что вероятнее: а) выиграть одну партию из двух или две из четырех? б) выиграть не менее двух партий из четырех или не менее трех из пяти? Ничьи во внимание не принимаются.

6.9. При вращении антенны локатора за время облучения самолета успевают отразиться 8 импульсов. Найти вероятность обнаружения цели за один оборот антенны, если для этого необходимо прохождение через приемник не менее 5 импульсов, а вероятность подавления импульса помехой равна 0,1.

6.10. В круг радиуса R вписан правильный шестиугольник. Внутрь круга брошены наудачу четыре точки. Найти вероятность того, что три из них попадут внутрь шестиугольника.

6.11. Отрезок AB точкой C разделен в отношении 2:1, считая от точки A. На этот отрезок наудачу брошены четыре точки. Найти вероятность того, что две из них окажутся левее точки C и две правее.

6.12. Отрезок AB разделен точкой C в отношении 2:3, считая от точки A. На этот отрезок брошено 6 точек. Найти вероятность того, что не менее трех точек окажутся левее C.

6.13. При раздаче колоды в 52 карты четырем игрокам один из них три раза подряд не получал тузов. Есть ли у него основания жаловаться на невезение?

6.14. ОТК проверяет партию изделий из 10 деталей. Вероятность того, что деталь стандартна, равна 0,75. Найти наивероятнейшее число деталей, которые будут признаны стандартными.

6.15. Игральная кость подбрасывается 16 раз. Найти наивероятнейшее число выпадений очков, кратных 3.

6.16. На цель противника сбрасывается 10 бомб, вероятность попадания в цель для каждой составляет 0,2. Найти: а) наиболее вероятное число попаданий и соответствующую вероятность; б) вероятность того, что число попаданий колеблется в пределах от 2 до 4.

6.17. Технологический процесс контролируется по 14 параметрам. Вероятность выхода каждого параметра за границы технических допусков составляет 0,2. Найти: а) наивероятнейшее число параметров, выходящих за границы технических допусков и соответствующую вероятность; б) вероятность выхода за границы технических не менее 4 параметров.

6.18. Из трех орудий произведен залп по цели. Вероятность попадания в цель для первого орудия равна 0,8, для второго - 0,85, для третьего - 0,9. Найти вероятность того, что в цель попали: а) все три орудия; б) два орудия; в) одно орудие; г) ни одного орудия.

6.19. Ведется пристрелка орудия по цели. Вероятность попадания в цель при первом выстреле равна 0,6, при последующих выстрелах эта вероятность увеличивается каждый раз на 0,1. Какова вероятность того, что при 4 выстрелах орудие попадает в цель: а) все 4 раза; б) ровно 3 раза; в) не более двух раз.

6.20. На трассе гонок имеется 4 препятствия. Первое препятствие гонщик успешно преодолевает с вероятностью 0,9, второе - с вероятностью 0,95, третье - с вероятностью 0,8, четвертое - с вероятностью 0,85. Найти вероятность того, что гонщик успешно преодолеет: а) все 4 препятствия; б) ровно два препятствия; в) не менее двух препятствий из четырех.

6.21. Экспериментально установлено, что при подбрасывании спичечного коробка количества его падений на меньшую, среднюю и большую грани относятся как 1:4:15. Какова вероятность того, что при 6 подбрасываниях коробка он 1 раз упадет на меньшую грань, 1 раз - на среднюю, 4 раза - на большую?

6.22. Отрезок разделен на три равные части. На отрезок наудачу бросаются три точки. Найти вероятность того, что на каждую из трех частей отрезка попадет по одной точки.

6.23. Отрезок разделен на 4 равные части. На отрезок наудачу бросаются 8 точек. Найти вероятность того, что на каждую из четырех частей отрезка попадет ровно по две точки.

6.24. В квадрат со стороной a вписана окружность, в которую вписан правильный треугольник. Внутрь квадрата бросается 5 точек. Найти вероятность того, что три точки попадут внутрь круга, причем две из них - внутрь треугольника, а две остальные вообще не попадут в круг.

6.25. Для новогодних подарков школой закуплено 8 кг яблочной, 20 кг вишневой, 12 кг сливовой и 10 кг апельсиновой карамели. Все конфеты перемешаны, и в каждый подарочный пакет кладется по 6 карамелек. Какова вероятность того, что школьник Ваня обнаружит в своем пакете две вишневых, две сливовых и по одной яблочной и апельсиновой карамельке.

7. ФОРМУЛЫ ПУАССОНА И МУАВРА-ЛАПЛАСА

Если в схеме независимых опытов число опытов n велико, пользоваться формулой Бернулли (6.1) не рекомендуется, так как в этом случае требуются значительные по объему вычисления. При больших значениях n (порядка десятков, сотен) вместо формулы Бернулли используются приближенные формулы Пуассона и Муавра-Лапласа.

Так, если вероятность p появления события A в каждом опыте мала ($p < 0{,}01$), то обычно используется формула Пуассона

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0,1,2,... \qquad (7.1)$$

где $\lambda = np$ - параметр Пуассона. При этом считается, что 0!=1.

Если же вероятности p и $q = 1 - p$ не очень малы $(p, q > 0{,}01)$, то используется локальная формула Муавра-Лапласа

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right), \quad k = 0,1,2,..., \qquad (7.2)$$

где $\varphi(x) = 1/\sqrt{2\pi} \cdot \exp(-x^2/2)$.

Для сокращения объема вычислений при использовании формулы (7.2) в каждом руководстве по теории вероятностей имеется таблица значений функции $\varphi(x)$ (в нашем пособии это таблица прил. 1). Следует помнить, что $\varphi(x)$ - четная функция, т.е. $\varphi(-x) = \varphi(x)$, и $\varphi(x) = 0$ при $x > 4$. Поэтому в большинстве таблиц значения функции приведены только для значений аргумента $x \in [0;4]$.

Если требуется найти вероятность того, что при n опытах событие A появляется не менее k_1 раз и не более k_2 раз, можно использовать формулу

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) = \sum_{k=k1}^{k2} P_n(k),$$

в которой $P_n(k)$ находится по формулам (7.1) или (7.2). Однако, в случае $p, q > 0{,}01$, для отыскания вероятности этого события удобнее использовать интегральную формулу Муавра-Лапласа

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) = \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right), \qquad (7.3)$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp(-t^2/2)dt.$$

Функция $\Phi(x)$ называется *функцией Лапласа*, она тоже затабулирована. В нашем пособии значения функции Ф(х) приведены в таблице прил. 2. Следует помнить, что функция Ф(х) нечетна, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, и $\Phi(x) \approx 0{,}5$ при $x > 5$. Поэтому в большинстве таких таблиц значения функции $\Phi(x)$ приведены только для значений аргумента $x \in [0;5]$.

Пример 1. Вероятность набора абонентом телефонного номера с ошибкой равна 0,001. Определить вероятность того, что среди 500 произведенных заказов не более 2 телефонных номеров были набраны с ошибкой.

Решение. Искомая вероятность равна $P_n(0) + P_n(1) + P_n(2)$. Согласно условию $n = 500$, $p = 0{,}001$. Так как p мало, для вычисления вероятностей используем формулу Пуассона (7.1). Находим $\lambda = np = 500 \cdot 0{,}001 = 0{,}5$. Следовательно, искомая вероятность равна

$$\frac{0{,}5^0}{0!}e^{-0{,}5} + \frac{0{,}5}{1!}e^{-0{,}5} + \frac{0{,}5^2}{2!}e^{-0{,}5} = 0{,}9856.$$

Ответ: 0,9856.

Пример 2. При установившемся технологическом процессе происходит в среднем 10 обрывов нити на 100 веретен в час. Определить вероятность того, что в течение часа на 80 веретенах произойдет 7 обрывов нити.

Решение. Находим вероятность обрыва нити на веретене $p = 10/100 = 0{,}1$; тогда $q = 1 - p = 0{,}9$. Так как $n = 80$ сравнительно велико, и $p, q > 0{,}01$, то для вычисления искомой вероятности можно использовать локальную формулу Муавра-Лапласа (7.2)

$$P_{80}(7) = \frac{1}{\sqrt{80 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9}} \cdot \varphi\left(\frac{7 - 80 \cdot 0{,}1}{\sqrt{80 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9}}\right) = \frac{1}{2{,}6833} \cdot \varphi(-0{,}37).$$

Находим по таблице прил. 1 $\varphi(-0{,}37) = \varphi(0{,}37) = 0{,}3726$. Значит, $P_{80}(7) = 0{,}3726 / 2{,}6833 = 0{,}139$.

Ответ: 0,139.

Пример 3. Передается закодированное сообщение из 1100 символов. Вероятность ошибки при декодировании каждого символа составляет 0,01. Считая декодирование каждого символа независимым от других, найти вероятность того, что число ошибок в принятом сообщении не превышает 20.

Решение. Применим интегральную формулу Муавра-Лапласа (7.3), в которой положим $p = 0{,}01$, $q = 1 - 0{,}01 = 0{,}99$, $k_1 = 0$, $k_2 = 20$. Получим

$$P_{1100}(0 \le k \le 20) = \Phi\left(\frac{20 - 1100 \cdot 0{,}01}{\sqrt{1100 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}99}}\right) - \Phi\left(\frac{0 - 1100 \cdot 0{,}01}{\sqrt{1100 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}99}}\right) =$$
$$= \Phi(2{,}73) - \Phi(-3{,}33) = \Phi(2{,}73) + \Phi(3{,}33).$$

При этом мы учли нечетность функции Лапласа. Далее по таблице прил.2 находим $\Phi(2{,}73) = 0{,}4958$, $\Phi(3{,}33) = 0{,}4995$. Значит, искомая вероятность равна 0,4968+0,4995=0,9963.

Ответ: 0,9963.

Пример 4. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,2. Найти наименьшее число испытаний, при котором с вероятностью 0,99 можно ожидать, что относительная частота появления события отклоняется от его вероятности по модулю не более чем на 0,04.

Решение. Проведем следующие преобразования

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = P\left(-\varepsilon \le \frac{k}{n} - p \le \varepsilon\right) = P((p - \varepsilon)n \le k \le (p + \varepsilon)n).$$

Отсюда согласно интегральной формуле Муавра-Лапласа (7.3) получаем

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = \Phi\left(\frac{(p + \varepsilon)n - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{(p - \varepsilon)n - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Таким образом, будем иметь

$$P(|\, k/n - p \,| \le \varepsilon) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \qquad (7.4)$$

В нашей задаче $p = 0{,}2$, $q = 0{,}8$, $\varepsilon = 0{,}04$, $P(|\, k/n - p \,| \le \varepsilon) = 0{,}99.$

Поэтому на основании формулы (7.4) получаем

$$2\Phi\left(0{,}04\sqrt{\frac{n}{0{,}2 \cdot 0{,}8}}\right) = 0{,}99 \quad \text{или} \quad \Phi(0{,}1\sqrt{n}) = 0{,}495.$$

По таблице прил. 2 находим $\Phi(2{,}573) = 0{,}495.$ Значит, $0{,}1\sqrt{n} = 2{,}573$, т.е. n= 662,033. Округляем результат до ближайшего целого, получаем n=663.

Ответ: 663.

7.1. Вероятность выпуска сверла повышенной хрупкости (брак) равна 0,002. Сверла укладываются в коробки по 100 штук. Найти вероятность того, что: а) в коробке не окажется бракованных сверл; б) число бракованных сверл окажется не более 3.

7.2. Магазин получил 1000 стеклянных бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка будет разбита, равна 0,003. Найти вероятность того, что при перевозке будут разбиты: а) ровно две бутылки; б) не более двух бутылок; в) не менее двух бутылок; г) хотя бы одна бутылка.

7.3. Если левши составляют в среднем 1% населения, каковы шансы на то, что среди 200 человек: а) окажутся ровно четверо левшей; б) окажутся не менее четырех левшей.

7.4. Известно, что в среднем 5% студентов носят очки. Какова вероятность того, что из 200 студентов, сидящих в аудитории, не менее 5 носят очки?

7.5. Система связи состоит из 1000 элементов, каждый из которых независимо от остальных выходит из строя за время Т с вероятностью 0,0005. Найти вероятности следующих событий: А= {за время Т откажет хотя бы один элемент}, В= {за время Т откажут ровно 3 элемента}, С={за время Т откажут не более 3 элементов}.

7.6. Корректура в 500 страниц содержит 1300 опечаток. Найти наиболее вероятное число опечаток на одной странице текста и вероятность этого числа опечаток.

7.7. На факультете 500 студентов. Найти наиболее вероятное число студентов, родившихся 1 сентября, и вероятность этого числа рождений. Вероятность рождения 1 сентября принять равной 0,0027.

7.8. Вероятность изготовления консервной банки с недостаточной герметизацией равна 0,002. Среди скольких банок, отобранных случайно, можно с вероятностью 0,9 ожидать отсутствие бракованных?

7.9. На АТС поступают в среднем 12 заказов в минуту. Найти вероятность того, что за 20 с поступят: а) ровно 2 заказа; б) не менее 2 заказов.

7.10. Среднее число заказов, поступающих на АТС в минуту, равно 120. Найти вероятности следующих событий: А={за 2 с на АТС не поступит ни одного заказа}, В={за 2 с на АТС поступят менее 2 заказов}, С={за 1 сек. на АТС поступит хотя бы один вызов}, D={за 3 сек. на АТС поступят не менее 6 заказов}.

7.11. С нагретого катода электронной лампы в течение 1 секунды вылетает a электронов. Найти вероятность того, что за t секунд: а) вылетит ровно m электронов; б) не менее m электронов.

7.12. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена ровно 75 раз.

7.13. Школа принимает в первые классы 200 детей. Определить вероятность того, что среди них одинаковое количество мальчиков и девочек, если вероятность рождения мальчика равна 0,515.

7.14. Вероятность изготовления обуви первого сорта равна 0,4. Какова вероятность того, что среди 600 пар обуви, поступивших на контроль, количество пар первосортной обуви колеблется в пределах от 228 до 252?

7.15. Орудия обстреливают ДОТ. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,2. ДОТ окажется пораженным, если в него попадут не менее 30 снарядов. Какова вероятность поражения ДОТа, если по нему выпущены 100 снарядов?

7.16. Вероятность пошива костюма 1 сорта равна 0,8. В магазин поступили 400 костюмов. Найти вероятности следующих событий: А={число первосортных костюмов равно 310}, В={число первосортных костюмов не превысит 310}.

7.17. Вероятность изготовления на заводе первосортного холодильника составляет 0,9. В магазин поступили 100 холодильников. Какова вероятность, что среди них: а) ровно 92 первосортных; б) число первосортных холодильников колеблется в пределах от 80 до 90.

7.18. Лабораторным путем установлена всхожесть зерен в 80%. Чему равна вероятность того, что среди отобранных 1000 зерен прорастут: а) не менее 800 зерен; б) от 820 до 840 зерен; в) от 880 до 920 зерен? Определить вероятность того, что среди отобранных 1000 зерен число проросших отличается от наиболее вероятного числа их не более чем на 30 зерен в ту или другую сторону.

7.19. В некоторой местности в среднем на каждые 100 выращенных арбузов приходится один весом не менее 10 кг. Найти вероятность того, что в партии арбузов из этой местности, содержащей 400 штук, будут: а) ровно 3 арбуза весом не менее 10 кг каждый; б) не менее трех таких арбузов.

7.20. Французский естествоиспытатель Бюффон подбросил монету 4040 раз, причем герб появился 2048 раз. Найти вероятность того, что при повторении опыта Бюффона относительная частота появления герба отклонится по модулю от вероятности его появления не более чем в опыте Бюффона.

7.21. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,5. Найти число испытаний, при котором с вероятностью 0,7698 можно ожидать, что относительная частота появления события отклонится по модулю от его вероятности не более чем на 0,02.

7.22. В урне содержатся черные и белые шары в отношении 4:1. После извлечения шара регистрируется его цвет, и шар возвращается в урну. Чему равно наименьшее число извлечений, при котором с вероятностью 0,95 можно ожидать, что абсолютная величина отклонения относительной частоты появления белого шара от его вероятности будет не более чем 0,01?

7.23. Вероятность появления события в каждом из 400 независимых испытаний равна 0,8. Найти такое положительное число ε, чтобы с вероятностью 0,99 абсолютная величина отклонения относительной частоты появления события от его вероятности не превышала ε.

7.24. ОТК проверяет на стандартность 900 деталей. Вероятность того, что деталь стандартна, равна 0,9. Найти с вероятностью 0,95 границы, в которых будет заключено число стандартных деталей среди проверенных.

7.25. Игральную кость бросают 80 раз. Найти с вероятностью 0,99 границы, в которых будет заключено число выпадений шести очков.

8. СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА

Величина X называется *случайной*, если она принимает то или иное свое значение лишь в результате опыта. Возможные значения случайной величины обозначаются через x, x_1, x_2, x_3,... Случайные величины делятся на *два класса: дискретные и недискретные*. Случайная величина X называется *дискретной*, если все ее значения можно перенумеровать, т.е. множество ее значений состоит из отдельных изолированных точек. Все остальные случайные величины называются *недискретными*. Среди недискретных случайных величин выделяют важный подкласс - непрерывные случайные величины, которые мы определим позже.

Любая случайная величина задается своим законом распределения. *Закон распределения случайной величины X* - это любое правило (таблица, функция), позволяющее находить вероятности всевозможных событий, связанных со случайной величиной X.

Для задания закона распределения дискретной случайной величины достаточно указать все возможные значения случайной величины и вероятности, с которыми эти значения принимаются. Обычно такой закон записывают в виде таблицы, первая строка которой содержит значения x_i, а вторая - вероятности p_i (i=1,2,...), причем $\sum p_i = 1$. Такая таблица называется *рядом распределения дискретной случайной величины*. Закон распределения дискретной случайной величины можно изобразить графически в виде ломаной с изломами в точках $M_1(x_1, p_1)$, $M_2(x_2, p_2)$,..., $M_n(x_n, p_n)$,... Такая ломаная называется *полигоном (многоугольником) распределения дискретной случайной величины*.

Наиболее общей формой закона распределения, пригодной для всех случайных величин (как дискретных, так и недискретных), является функция распределения $F(x)$. *Функцией распределения $F(x)$ случайной величины X* называется вероятность того, что X примет значение, меньшее, чем заданное x: $F(x) = P(X < x)$. Доказывается, что функция распределения дискретной случайной величины является кусочнопостоянной функцией со скачками в точках, являющихся значениями случайной величины; величины скачков равны вероятностям, с которыми эти значения принимаются.

Для любой случайной величины функция распределения обладает свойствами:

а) F(x)- неубывающая функция, т.е. $F(x_1) \le F(x_2)$ при $x_1 < x_2$;
б) $0 \le F(x) \le 1$; $F(-\infty) = 0$; $F(+\infty) = 1$.

Если известна функция распределения $F(x)$, то *вероятность попадания случайной величины X в полуоткрытый промежуток* $[a,b)$ находится по формуле

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a). \qquad (8.1)$$

Случайная величина X называется *непрерывной*, если ее функция распределения $F(x)$ непрерывна на всей числовой оси и всюду, за исключением конечного числа точек, дифференцируема. При этом функция $f(x) = F'(x)$ называется *плотностью распределения случайной величины X*. Доказывается, что между функциями $f(x)$ и $F(x)$ помимо дифференциальной существует следующая интегральная связь

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx. \qquad (8.2)$$

Отметим два основных свойства плотности распределения:

а) $f(x) \ge 0$;

б) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$

Если известна плотность распределения $f(x)$, то *вероятность попадания случайной величины X в промежуток* $[a;b)$ помимо формулы (8.1) может быть вычислена также по формуле

$$P(\alpha \le X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx. \qquad (8.3)$$

Заметим, что в левой части формулы (8.3) можно брать как строгие, так и ослабленные неравенства: $\alpha < X$, $\alpha \le X$, $X < \beta$, $X \le \beta$; формула (8.3) остается справедливой в любом случае.

Во многих практических задачах нет надобности в полном описании случайной величины с помощью ее закона распределения; зачастую бывает достаточно указать только отдельные числовые параметры, характеризующие наиболее существенные черты распределения. К важнейшим числовым характеристикам случайной величины X относятся, прежде всего, математическое ожидание $M[X]$ (или m_X), дисперсия D[X] (или D_X) и среднее квадратическое отклонение σ[X] (или σ_X).

Если случайная величина X дискретна, то ее *математическое ожидание* равно сумме произведений всех возможных ее значений на вероятности этих значений

$$M[X]=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i. \tag{8.4}$$

В этой формуле n - конечно или $n=\infty$.

Если случайная величина X непрерывна с плотностью распределения $f(x)$, то ее *математическое ожидание* равно следующему интегралу

$$M[X]=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx. \tag{8.5}$$

Отметим, что, несмотря на различие формул, математическое ожидание случайной величины всегда определяет одну и ту же ее характеристику - некоторое "среднее" значение, около которого группируются возможные значения случайной величины.

Величинами, характеризующими степень разброса значений случайной величины относительно своего математического ожидания, являются дисперсия и среднее квадратическое отклонение. *Дисперсия* - это математическое ожидание квадрата центрированной случайной величины $D[X]=M[(X-m_X)^2]$. *Среднее квадратическое отклонение* - это квадратный корень из дисперсии $\sigma[X]=\sqrt{D[X]}$. Обычно для вычисления дисперсии используется следующая расчетная формула

$$D[X]=M[X^2]-(m_X)^2, \tag{8.6}$$

в которой m_X находится либо по формуле (8.4), либо по формуле (8.5). Величина $M[X^2]$ находится по одной из формул

$$M[X^2]=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i, \qquad M[X^2]=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx \tag{8.7}$$

в зависимости от того: дискретна или непрерывна случайная величина X.

Математическое ожидание - не единственная характеристика расположения случайной величины на числовой оси; в теории вероятности применяют и другие характеристики положения: *моду и медиану*.

Модой d_X случайной величины X называется наиболее вероятное ее значение, т.е. то значение, для которого вероятность p_i или плотность распределения $f(x)$ максимальна.

Медианой h_X случайной величины X называют такое значение случайной величины, для которого

$$P(X<h_X)=P(X\geq h_X)=0{,}5. \tag{8.8}$$

Для характеристики случайной величины используются также *квантиль, коэффициент асимметрии, коэффициент эксцесса. Квантилью* порядка р случайной величины X называется такое число t_p, для которого

$$P(X < t_p) = p. \qquad (8.9)$$

Коэффициентом асимметрии A[X] и коэффициентом эксцесса E[X] называются следующие величины

$$A[X] = \frac{1}{\sigma^3[X]}\mu_3[X], \qquad E[X] = \frac{1}{\sigma^4[X]}\mu_4[X] - 3, \qquad (8.10)$$

где $\sigma[X]$ - среднее квадратическое отклонение, $\mu_k[X]$, $k = 3{,}4$ – центральный момент k-го порядка, который находится по одной из формул:

$$\mu_k[X] = \sum_{i=1}^{n}(x_i - m_X)^k p_i, \quad \mu_k[X] = \int_{-\infty}^{\infty}(x - m_X)^k f(x)dx \qquad (8.11)$$

в зависимости от того, дискретна или непрерывна случайная величина X.

<u>Пример 1.</u> Два орудия стреляют по цели; вероятности попадания в цель при одном выстреле для них равны соответственно 0,7 и 0,8. Для случайной величины X (числа попаданий в мишень при одном залпе) составить ряд распределения, построить полигон распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание.

<u>Решение.</u> Случайная величина X (X- число попаданий в цель) может принимать лишь три значения: 0, 1, 2. Найдем вероятности, с которыми эти значения принимаются. Случайная величина X принимает значение 0, если оба орудия не попали в цель. Значит,

P(X=0) = (1-0,7)(1-0,8)= 0,06.

Случайная величина X принимает значение 1, если в цель попало ровно одно орудие. Значит,

$P(X = 1) = 0{,}7 \cdot (1 - 0{,}8) + (1 - 0{,}7) \cdot 0{,}8 = 0{,}14 + 0{,}24 = 0{,}38.$ Наконец, X=2, если только оба орудия попали в цель. Значит, P(X=2)= 0,7·0,8 = 0,56. Составляем ряд распределения.

X	0	1	2
p	0,06	0,38	0,56

Полигон распределения строим на рис. 8.1. Находим функцию распределения $F(x)$. Согласно теории $F(x) = 0$ при $x \le 0$; $F(x) = 0{,}06$ при $x \in (0;1]$; $F(x) = 0{,}06 + 0{,}38 = 0{,}44$ при $x \in (1;2]$; $F(x) = 0{,}44 + 0{,}56 = 1$ при x>1. График F(x) изображен на рис. 8.2.

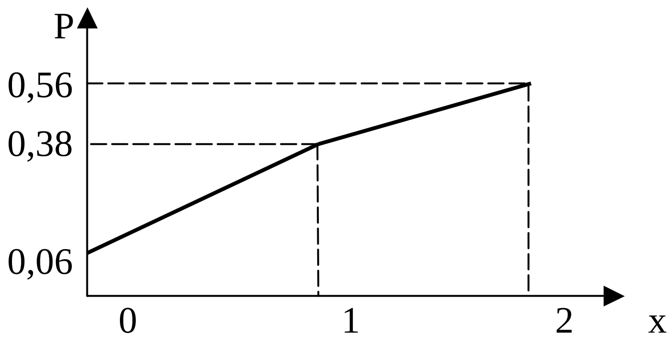


Рис. 8.1.

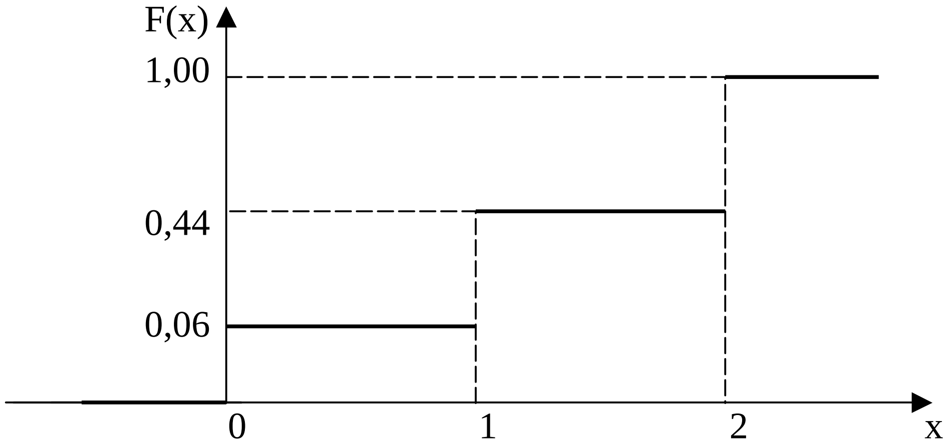


Рис. 8.2.

Математическое ожидание M[X] находим по формуле (8.4), используя полученный ряд распределения.
M[X] = 0·0,06 + 1·0,38 + 2·0,56 = 1,5.

Ответ: $m_X = 1{,}5$.

Пример 2. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 2, \\ 0{,}5x - 1 & \text{при } 2 < x \le 4, \\ 1 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

Найти вероятности того, что в результате испытания X примет значение: а) меньше 3; б) не меньше 3; в) из промежутка [0; 2, 6); г) из промежутка [3; 5).

Решение. По определению F(x) имеем F(X<3)= F(3)= 0,5 3 -1 = 0,5. Далее, так как события X<3 и X> 3 противоположны, то

P(X> 3) = 1- P(X< 3) = 1-0,5= 0,5.

Две последние вероятности находим с помощью формулы (8.1). Имеем

$$P(0 \le X < 2{,}6) = F(2{,}6) - F(0) = 0{,}5 \cdot 2{,}6 - 1 = 0{,}3;$$

$$P(3 \le X < 5) = F(5) - F(3) = 1 - 0{,}5 \cdot 3 = 0{,}5.$$

Ответ: 0,5; 0,5; 0,3; 0,5.

Пример 3. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)=1{,}5\sin 3x$ в интервале $(0;\pi/3)$ и $f(x)=0$ вне этого интервала. Найти вероятность того, что при трех опытах X дважды попадет в интервал $(\pi/6;\pi/4)$.

Решение. Введем событие $A=$ {при опыте случайная величина X попадет в интервал $(\pi/6;\pi/4)$}. Согласно формуле (8.3) имеем

$$P(A)=P(\pi/6<X<\pi/3)=\int_{\pi/6}^{\pi/4}1{,}5\cdot\sin 3x dx=-0{,}5\cdot\cos 3x\,|_{\pi/6}^{\pi/4}=$$

$$=-0{,}5(\cos\frac{3\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{2})=\frac{\sqrt{2}}{4}=0{,}354.$$

Далее искомая вероятность находится по формуле Бернулли (6.1)

$$P_3(2)=C_3^2\cdot(0{,}354)^2\cdot(1-0{,}354)=0{,}243.$$

Ответ: 0,243.

Пример 4. Случайная величина X задана плотностью распределения: $f(x)=2\cos 2x$ при $x\in[0;\pi/4]$; $f(x)=0$ при $x\notin[0;\pi/4]$. Найти моду, медиану, квантиль порядка 0,8.

Решение. Функция $f(x)=2\cos 2x$ не имеет точек максимума в промежутке $x\notin[0;\pi/4]$, значит, X не имеет моды.

Чтобы найти медиану и квантиль, сначала найдем по формуле (8.3) следующую вероятность

$$P(X<t)=\int_0^t 2\cos 2x dx=\sin 2t,\quad t\in[0;\pi/4]. \qquad (8.11)$$

Тогда согласно (8.11) уравнение (8.8) для определения медианы примет вид: $\sin 2h_X=0{,}5$, откуда $2h_X=\arcsin 0{,}5=\pi/6$, т.е. медиана $h_X=\pi/12=0{,}262$.

Согласно (8.11) уравнение (8.9) для определения квантили порядка 0,8 имеет вид: $\sin 2t=0{,}8$, откуда $2t=\arcsin 0{,}8=0{,}9273$, т.е. квантиль $t_{0,8}=0{,}464$.

Ответ: d_X - не существует; $h_X=0{,}262$; $t_{0,8}=0{,}464$.

Пример 5. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)=ax^2+4{,}5x-6$ при $x\in[2;4]$; $f(x)=0$ при $x\notin[2;4]$. Найти параметр a, моду, медиану, математическое ожидание.

Решение. Для отыскания параметра a используем следующее свойство плотности

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=1. \qquad (8.12)$$

Вычисляем интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_2^4 (ax^2 + 4{,}5x - 6)dx = (ax^3/3 + 9x^2/4 - 6x)\Big|_2^4 = 56a/3 + 15.$$

Тогда формула (8.12) примет вид $56a/3 + 15 = 1$, откуда $a = -0{,}75$.

Для отыскания моды d_X находим точки максимума $f(x)$. Имеем для $x \in (2;4)$: $f'(x) = 2ax + 4{,}5 = -1{,}5x + 4{,}5$. Производная $f'(x) = 0$ только при x=3. Так как знак $f'(x)$ меняется с "+" на "-" при переходе через точку x=3, то x=3 - точка максимума. Значит, мода равна $d_X = 3$.

Чтобы найти медиану, решим уравнение

$$P(X < t) = 0{,}5. \qquad (8.13)$$

Для этого предварительно вычислим вероятность

$$P(X < t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx = \int_2^t (-0{,}75x^2 + 4{,}5x - 6)dx =$$

$$= (-0{,}25x^3 + 2{,}25x^2 - 6x)\Big|_2^t = -0{,}25t^3 + 2{,}25t^2 - 6t + 5.$$

Уравнение (8.13) примет вид: $-0{,}25t^3 + 2{,}25t^2 - 6t + 5 = 0{,}5$, что равносильно $t^3 - 9t^2 + 24t - 18 = 0$. Методом подбора найдем корень уравнения t=3, тогда уравнение можно представить в виде $(t-3)(t^2 - 6t + 6) = 0$. Квадратный трехчлен $t^2 - 6t + 6$ не имеет корней в промежутке [2;4], поэтому исходное уравнение (8.12) имеет единственный корень t=3. Значит медиана $d_X = 3$.

Математическое ожидание находим по формуле (8.5).

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_2^4 x(-0{,}75x^2 + 4{,}5x - 6)dx =$$

$$= (-\frac{3}{16}x^4 + 1{,}5x^3 - 3x^2)\Big|_2^4 = 3.$$

Ответ: $a = -0{,}75$; $d_X = 3$; $h_X = 3$; $m_X = 3$.

<u>Пример 6.</u> Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение случайной величины X, заданной законом распределения

X	- 5	2	3	4
p	0,4	0,3	0,1	0,2

<u>Решение.</u> Математическое ожидание случайной величины X находим по формуле (8.4)

$$M[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = -5 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}2 = -0{,}3.$$

Математическое ожидание случайной величины X^2 находим по первой формуле (8.7)

$$M[X^2] = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i = (-5)^2 \cdot 0{,}4 + 2^2 \cdot 0{,}3 + 3^2 \cdot 0{,}1 + 4^2 \cdot 0{,}2 = 15{,}3.$$

Теперь находим дисперсию по формуле (8.6)

$$D[X] = M[X^2] - (m_X)^2 = 15{,}3 - (-0{,}3)^2 = 15{,}21.$$

Находим среднее квадратическое отклонение

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]} = \sqrt{15{,}21} = 3{,}9.$$

Ответ: $m_X = -0{,}3;\quad D_X = 15{,}3;\quad \sigma_X = 3{,}9.$

<u>Пример 7.</u> Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 1 - 0{,}5\cos x, & 0 < x < \pi, \\ 1, & x \ge \pi. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

<u>Решение.</u> Сначала найдем плотность распределения $f(x)$ по формуле $f(x) = F'(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}5\sin x, & x \in (0;\pi), \\ 0, & x \notin (0;\pi). \end{cases}$$

Математическое ожидание находим по формуле (8.5)

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = 0{,}5\int_{0}^{\pi} x\sin x dx = \pi/2.$$

При этом для нахождения интеграла используем формулу интегрирования по частям. Далее находим математическое ожидание X^2 по второй формуле (8.7)

$$M[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = 0{,}5\int_{0}^{\pi} x^2 \sin x dx = 0{,}5(\pi^2 - 4).$$

При вычислении интеграла дважды использовалась формула интегрирования по частям. Теперь находим дисперсию по формуле (8.6)

$$D[X] = M[X^2] - (m_X)^2 = 0{,}5(\pi^2 - 4) - \pi^2/4 = \pi^2/4 - 2.$$

Значит, $\sigma[X] = \sqrt{D[X]} = \sqrt{\pi^2 - 8}.$

Ответ: $m_X = \pi/2;\quad D_X = 0{,}25(\pi^2 - 8);\quad \sigma_X = 0{,}5\sqrt{\pi^2 - 8}.$

<u>Пример 8.</u> Непрерывная случайная величина X распределена по закону Лапласа

$$f(x) = b \cdot \exp(-|x|).$$

Найти коэффициент b, коэффициент асимметрии, коэффициент эксцесса.

Решение. Для нахождения b воспользуемся свойством (8.12) плотности распределения.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} b \cdot \exp(-|x|)dx = 2b\int_{0}^{\infty} \exp(-x) = 2b = 1.$$

Отсюда b=0,5. Математическое ожидание

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx = 0,5 \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \exp(-|x|)dx = 0,$$

потому что подынтегральная функция нечетна. Дисперсия равна

$$D[X] = m[X^2] - (m_X)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = 0,5 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \exp(-|x|)dx.$$

Так как подынтегральная функция четна, то

$$D[X] = 2 \cdot 0,5\int_{0}^{\infty} x^2 \cdot \exp(-|x|)dx = 2.$$

При этом используется двукратное интегрирование по частям. Тогда

$$\sigma[X] = \sqrt{D[x]} = \sqrt{2}.$$

Находим центральный момент третьего порядка по формуле

$$\mu_3[X] = M[(X - m_X)^3] = \int_{-\infty}^{\infty} x^3 f(x)dx = 0,5 \int_{-\infty}^{\infty} x^3 \exp(-|x|)dx = 0.$$

Последний интеграл равен 0, потому что подынтегральная функция нечетна. Значит, коэффициент асимметрии

$$A[x] = \mu_3[X] / \sigma_X^3 = 0.$$

Находим центральный момент четвертого порядка по формуле

$$\mu_4[X] = M[(X - m_X)^4) = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 f(x)dx = 0,5 \int_{-\infty}^{\infty} x^4 \cdot \exp(-|x|)dx =$$

$$= 2 \cdot 0,5\int_{0}^{\infty} x^4 \cdot \exp(-|x|)dx.$$

К последнему интегралу применим четырежды формулу интегрирования по частям и получим $\mu_4[X] = 24$. Значит,

$$E[X] = \mu_4[X] : \sigma_X^4 - 3 = 24/4 - 3 = 3.$$

Ответ: $b = 0,5$; $A[X] = 0$; $E[X] = 3$.

8.1. Составить закон распределения случайной величины X - числа появления герба при двух бросаниях монеты.

8.2. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента при включении равна 0,1. Составить закон распределения числа элементов, отказавших при включении.

8.3. Три стрелка стреляют по одной мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,2, для второго - 0,4, для третьего - 0,5. Пусть X - число попаданий в мишень при одном залпе. Составить закон распределения X, записать функцию распределения F(x).

8.4. В партии из 6 деталей стандартны 4 детали. Наудачу отобраны 3 детали. Составить закон распределения случайной величины X - числа стандартных деталей среди отобранных.

8.5. Вероятность того, что стрелок попадет в мишень при одном выстреле, равна 0,8. Стрелку выдаются патроны до тех пор, пока он не промахнется. Составить закон распределения X - числа патронов, выданных стрелку.

8.6. Испытывается 5 однотипных приборов; вероятность отказа каждого не зависит от отказов остальных и составляет 0,2. Пусть X - число отказавших за время испытаний приборов. Составить закон распределения X, найти моду, вычислить вероятности событий: $а)\, X = 0$; $б)\, X < 3$; $в)\, X \ge 4$.

8.7. Случайная величина X задана на всей числовой оси функцией распределения F(x)= 0,5+ 1/π·arctg x. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение: а) заключенное в промежутке [0; 1); б) заключенное в промежутке [-1; $\sqrt{3}$).

8.8. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2, \\ 0{,}5 + \dfrac{1}{\pi}\arcsin\dfrac{x}{2}, & -2 < x < 2, \\ 1, & x \ge 2. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение: а) из промежутка [-1; 1); б) из промежутка [0; 5); в) из промежутка [-3; 1).

8.9. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x^2, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате четырех испытаний:
а) X ровно три раза примет значение из промежутка [0,25; 0,75);
б) X ровно два раза примет значение из промежутка [-0,5; 0,5).

8.10. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины: $f(x) = x - 0{,}5$ при $x \in [1;2]$; $f(x) = 0$ при $x \notin [1;2]$.

Найти функцию распределения F(x).

8.11. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<\pi/6,\\ 3\sin 3x, & \pi/6\le x\le \pi/3,\\ 0, & x>\pi/3.\end{cases}$$

Найти функцию распределения F(x).

8.12. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения: $f(x)=0$ при $x\in(-\infty;0)$; $f(x)=\exp(-x)$ при $x\in[0;\infty)$. Найти вероятность того, что X примет значение: а) принадлежащее интервалу (1; 2); б) принадлежащее интервалу (-1; 1).

8.13. Плотность распределения непрерывной случайной величины X задана формулой

$$f(x)=\frac{2c}{1+x^2}.$$

Найти параметр C. Найти вероятность того, что X примет значение из интервала (-1; 1).

8.14. Случайная величина X распределена по закону Коши, определяемому функцией распределения

$$F(x)=b+c\cdot arctg(x/a), \qquad x\in(-\infty;\infty).$$

Выбрать параметры a, b, c так, чтобы данное распределение было непрерывным. Найти плотность распределения, моду, медиану, квантиль порядка 0,75.

8.15. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\cos^2 x, & x\in[-\pi/2;\pi/2],\\ 0, & x\notin[-\pi/2;\pi/2].\end{cases}$$

Найти вероятность того, что в трех независимых испытаниях случайная величина X примет ровно два раза значение из интервала (0; π/4).

8.16. Найти моду и математическое ожидание дискретной случайной величины, заданной законом распределения

X	- 4	6	10
p	0,2	0,3	0,5

8.17. Дискретная случайная величина X принимает три возможных значения: $x_1=4$ с вероятностью 0,5, $x_2=6$ с вероятностью 0,3 и x_3 с вероятностью p_3. Зная, что $m_X=8$, найти x_3, p_3.

8.18. Дан перечень возможных значений дискретной случайной величины X: $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ \ x_3 = 3,$ а также известны M[X]=2,3 и M[X]=5,9. Найти вероятности, соответствующие возможным значениям X.

8.19. В новогодней лотерее на каждые 100 билетов 10 билетов выигрывают по 1 руб., 5 билетов - по 3 руб., 2 билета - по 5 руб., 1 билет - 10 рублей. Найти среднюю величину выигрыша на один билет.

8.20. В коробке 7 белых и 3 черных шара. Наудачу извлекаются два шара. Найти математическое ожидание числа шаров черного цвета среди вытащенных.

8.21. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, заданной рядом распределения

X	0	1	2
p	0,4	0,5	0,1

8.22. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, заданной рядом распределения

X	4,3	5,1	10,6
p	0,2	0,3	0,5

8.23. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, заданной рядом распределения

X	0	1	2	3
p	0,4	0,3	0,2	0,1

8.24. Дискретная случайная величина X может принимать только два значения x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Зная, что $P(X = x_1) = 0{,}6,\ \ M[X] = $ $= 1{,}4,\ \ D[X] = 0{,}24,$ найти закон распределения X.

8.25. Дискретная случайная величина X может принимать только два значения x_1 и x_2, причем, $x_1 < x_2$. Зная, что $P(X = x_1) = 0{,}2,\ M[X] = 2{,}6,\ \ \sigma[X] = 0{,}8,$ найти закон распределения X.

8.26. Дискретная случайная величина X может принимать только три возможных значения: $x_1 = 1, x_2, x_3,$ причем, $x_1 < x_2 < x_3$. Зная, что $P(X = x_1) = 0{,}3,\ P(X = x_2) = 0{,}2,\ M[X] = 2{,}2,\ D[X] = 0{,}76,$ найти закон распределения X.

8.27. В техническом устройстве работают независимо два блока. Вероятность безотказной работы первого блока равна 0,4, второго - 0,7. Пусть X - число работающих блоков. Найти M[X], D[X], σ[X].

8.28. Из урны, содержащей 4 белых и 6 черных шаров, случайным образом и без возвращения извлекаются 3 шара. Пусть X - число белых шаров в выборке. Найти моду, математическое ожидание и дисперсию X.

8.29. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = ax\cos x$ при $x \in [0;\pi/2]$; $f(x) = 0$ при $x \notin [0;\pi/2]$. Найти параметр a и математическое ожидание.

8.30. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \text{ при } x \in (-1;1); \quad f(x) = 0 \text{ при } x \notin (-1;1).$$

Найти моду, медиану, математическое ожидание, дисперсию.

8.31. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x) = 0$ при $x \in (-\infty;0]$; $F(x) = ax^2$ при $x \in (0;5)$; $F(x) = 1$ при $x \in [5;\infty)$. Найти параметр a. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

8.32. Случайная величина X распределена по закону:

$$f(x) = (a - |x|)/a^2, \text{ если } |x| \le a; \quad f(x) = 0, \text{ если } |x| > a.$$

Найти моду, медиану, математическое ожидание, дисперсию, коэффициенты асимметрии и эксцесса, квантиль порядка 0,82.

8.33. Случайная величина X подчиняется *закону арксинуса* с плотностью распределения

$$f(x) = \tfrac{1}{\pi}/\sqrt{a^2 - x^2} \text{ при } x \in (-a;a); \quad f(x) = 0 \text{ при } x \notin (-a;a),$$

где $a > 0$ - параметр распределения. Найти функцию распределения, вычислить моду, медиану, квантиль порядка 0,75, а также математическое ожидание и дисперсию.

8.34. Случайная величина X подчиняется *закону Релея* с плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sigma^2}\exp\left(-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\right), & x \ge 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

где $\sigma > 0$ - параметр распределения. Найти функцию распределения, вычислить моду, медиану, квантиль порядка 0,8, а также математическое ожидание и дисперсию.

9. ОСНОВНЫЕ ТИПЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Непрерывная случайная величина X называется *распределенной равномерно на отрезке* [a; b], если ее плотность распределения постоянна на данном отрезке и равна 0 вне его, т.е.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{при } x \in [a;b], \\ 0 & \text{при } x \notin [a;b]. \end{cases} \tag{9.1}$$

Известно, что для равномерно распределенной случайной величины ее математическое ожидание $m_X = (b-a)/2$, дисперсия $D_X = (b-a)^2/12$. Вероятность попадания равномерно распределенной случайной величины в интервал может быть найдена либо по формуле (8.1), либо по формуле (8.3).

Непрерывная случайная величина X называется *нормально распределенной (распределенной по закону Гаусса)*, если плотность ее распределения имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-(x-a)^2/\sigma^2). \qquad (9.2)$$

При этом параметры a, σ имеют определенный вероятностный смысл: $a = m_X$ является математическим ожиданием, $\sigma = \sqrt{D[X]}$ - средним квадратическим отклонением X. Для нормально распределенной случайной величины X вероятность ее попадания в интервал (α; β) находится по формуле

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right), \qquad (9.3)$$

где Ф(х)- функция Лапласа. (Более подробно о Ф(х) см. в п.7.)

Непрерывная случайная величина X называется *распределенной по показательному (экспоненциальному) закону*, если плотность ее распределения имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x < 0, \\ \lambda \cdot \exp(-\lambda x) & при \quad x \ge 0, \end{cases}$$

где $\lambda>0$ - параметр распределения. Для показательного распределения $m_X = 1/\lambda$, $D_X = 1/\lambda^2$.

Показательное распределение широко используется для расчета надежности различных систем (радиотехнических, электрических, механических и т.п.). Под надежностью понимается способность системы не отказывать в работе. Оказывается, время безотказной работы системы со случайными отказами имеет показательный закон распределения. Количественной характеристикой надежности является *функция надежности* $R(t)$, равная вероятности безотказной работы системы за время от 0 до t. Известно, что если в системе происходят только случайные отказы, то функция надежности имеет вид

$$R(t) = \exp(-\lambda t), \qquad (9.4)$$

где $\lambda = 1/t_{cp}$, t_{cp} – среднее время безотказной работы системы.

Пример 1. Известно, что передатчик может начать работу в любой момент времени между 12 и 14 часами. Какова вероятность того, что начало передачи придется ждать не более 15 минут?

Решение. Пусть Х(ч) - время начала работы передатчика. Поскольку передача может начаться в любой момент между 12 и 14 часами и все моменты равновозможны, следует считать, что Х - случайная величина, равномерно распределенная в промежутке [12; 14]. Тогда ее плотность распределения согласно (9.1) примет вид: $f(x)=0{,}5$ при $x\in[12;14]$; $f(x)=0$ при $x\notin[12;14]$.

Искомую вероятность находим по формуле (8.3).

$$P(12<X<12{,}25)=\int_{12}^{12{,}25}0{,}5dx=0{,}125.$$

При этом учтено, что 15 мин. = 0,25 ч.

Ответ: 0,125.

Пример 2. Средняя квадратическая ошибка высотомера составляет 15 м. Какова вероятность того, что самолет уклонится от расчетной высоты не более чем на 20 м?

Решение. Пусть Х(м) - ошибка высотомера. Известно, что ошибки измерений подчиняются нормальному закону, поэтому Х имеет нормальный закон распределения с плотностью распределения (9.2), где а=0 м, σ=15 м. Согласно условию нам следует определить вероятность события –20 м<Х<20 м; вероятность этого события находим по формуле (9.3). Получаем

$$P(-20м<X<20м)=\Phi(20/15)-\Phi(-20/15)=2\Phi(1{,}33)=0{,}816.$$

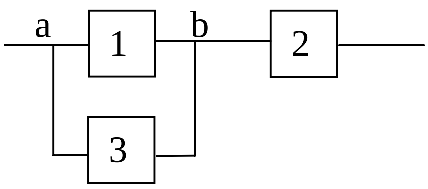
Ответ: 0,816.

Пример 3. Устройство состоит из трех независимо работающих блоков; его функциональная схема изображена на рис. 9.1. Зная, что среднее время безотказной работы для 1,2,3 блоков составляет соответственно 100 ч, 200 ч, 150 ч, найти вероятность безотказной работы устройства в течение 100 часов.

Решение. Найдем функции надежности для каждого блока. Учитывая, что $t_{ср1}=100ч$, $t_{ср2}=200ч$, $t_{ср3}=150ч$, имеем согласно (9.4)

$R_1(t)=\exp(-t/t_{ср1})=\exp(-t/100)$, $R_2(t)=\exp(-t/t_{ср2})=\exp(-t/200)$,

$R_3(t)=\exp(-t/t_{ср3})=\exp(-t/150)$. Находим вероятности безотказной работы каждого блока в течение 100 часов. Получаем



$$p_1=R_1(100)=e^{-1}=0{,}368,$$
$$p_2=R_2(100)=e^{-0{,}5}=0{,}607,$$
$$p_3=R_3(100)=e^{-2/3}=0{,}513.$$

Рис. 9.1.

Далее, так как вероятность отказа цепи a - b составляет (1-0,368)(1-0,513) = 0,308, то вероятность ее работы равна 1-0,308 = 0,692. Значит, вероятность работы всего устройства равна $0{,}692 \cdot 0{,}607 = 0{,}42$.

Ответ: 0,42.

9.1. Для равномерно распределенной на [a; b] случайной величины X найти функцию распределения.

9.2. Автобусы маршрута № 5 идут строго по расписанию. Интервал движения 5 минут. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус менее 3 минут.

9.3. Минутная стрелка электрических часов перемещается скачком в конце каждой минуты. Найти вероятность того, что в данное мгновение часы покажут время, которое отличается от истинного не более чем на 20 с.

9.4. Цена деления шкалы амперметра равна 0,1 А. Показания округляются до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка, превышающая по модулю 0,02А.

9.5. Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,2. Показания прибора округляются до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана абсолютная ошибка: а) меньшая 0,04; б) большая 0,05.

9.6. Из банки, содержащей 2 л воды, отлили произвольное ее количество. Какова вероятность того, что в банке останется не более 0,5 л воды?

9.7. Написать плотность распределения нормально распределенной случайной величины X, зная, что M[X] = 3, D[X] = 16.

9.8. Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины равно 5, дисперсия равна 4. Записать ее плотность распределения и функцию распределения. Определить квантили порядков 0,7 и 0,99.

9.9. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины X соответственно равны 10 и 2. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервал (12, 14).

9.10. Процент содержания золы в угле является нормально распределенной случайной величиной с математическим ожиданием 16% и средним квадратическим отклонением 4%. Определить вероятность того, что в наудачу взятой пробе угля будет от 12 до 24% золы.

9.11. Производится измерение диаметра вала двигателя без систематических ошибок. Случайные ошибки измерения X подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением, равным 10 мкм. Найти вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 15 мкм.

9.12. Бомбардировщик, пролетевший вдоль моста, длина которого

30 м, сбросил бомбу. Случайная величина X (расстояние от центра моста до места падения бомбы) распределена нормально с математическим ожиданием, равным нулю, и средним квадратическим отклонением, равным 6 м. Найти вероятность попадания бомбы в мост. Считается, что мост имеет ширину, достаточную для попадания в него бомбы.

9.13. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием 25. Вероятность попадания X в интервал (10; 15) равна 0,2. Найти вероятность попадания X в интервал (35; 40).

9.14. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием 10 и средним квадратическим отклонением 5. Найти интервал, симметричный относительно математического ожидания, в который с вероятностью 0,9973 попадет в результате эксперимента величина X.

9.15. Станок-автомат изготовляет шарики для подшипников, причем контролируется их диаметр X. Считая X нормально распределенной случайной величиной с математическим ожиданием 10 мм и средним квадратическим отклонением 0,1 мм, найти интервал, симметричный относительно математического ожидания, в котором с вероятностью 0,9973 будут заключены диаметры изготовленных шариков.

9.16. Математическое ожидание и дисперсия нормально распределенной случайной величины X соответственно равны 10 и 9. Найти вероятности того, что в результате трех испытаний: а) X трижды попадет в интервал (9; 12); б) X дважды попадет в интервал (7; 19).

9.17. Плотность распределения случайной величины X имеет вид $f(x)=\gamma\exp(-x^2+2x-3)$. Установить тип распределения, найти параметр γ, математическое ожидание и дисперсию, вероятность выполнения неравенства: $-1/3 < X < 4/3$.

9.18. Найти плотность и функцию распределения показательного распределения, если его математическое ожидание равно 0,2. Для данного распределения найти квантили порядка 0,7 и 0,85.

9.19. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону, заданному плотностью распределения

$$f(x)=0{,}04\exp(-0{,}04x) \text{ при } x\ge 0; \quad f(x)=0 \text{ при } x<0.$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X попадет в интервал (1; 2).

9.20. Время ожидания в очереди имеет показательный закон распределения со средним временем ожидания 20 мин. Какова вероятность того, что покупатель потратит на покупку не менее 10 и не более 15 мин?

9.21. Время исполнения заказа на ремонт радиоаппаратуры имеет показательный закон распределения со средним временем исполнения в 5 суток. Какова вероятность того, что сданный Вами в мастерскую магнитофон починят не ранее чем через 4 суток?

9.22. Длительность времени безотказной работы элемента имеет показательное распределение $F(t)=1-\exp(-0{,}01t)$, $t>0-$ время в часах. Найти вероятность того, что за время длительностью 50 ч: а) элемент откажет; б) элемент не откажет.

9.23. Испытываются два независимо работающих элемента. Длительность времени безотказной работы первого элемента имеет показательное распределение $F_1(t)=1-\exp(-0{,}02t)$, второго $F_2(t)=1-\exp(-0{,}05t)$, $t-$время в часах. Найти вероятность того, что за 6 часов: а) оба элемента откажут; б) оба элемента не откажут; в) только один элемент откажет; г) хотя бы один элемент откажет.

9.24. Устройство состоит из трех независимо работающих блоков; его функциональная схема изображена на рис. 9.2. Зная, что среднее время безотказной работы 1, 2, 3 блоков соответственно равны 500 ч,
800 ч, 1000 ч, найти вероятность безотказной работы устройства в течение 1500 часов.

9.25. Устройство состоит из четырех независимо работающих блоков; его функциональная схема изображена на рис. 9.3. Зная, что среднее время безотказной работы 1, 2, 3, 4 блоков соответственно равны 100 ч, 200 ч, 300 ч, 50 ч, найти вероятность безотказной работы устройства в течение 120 часов.

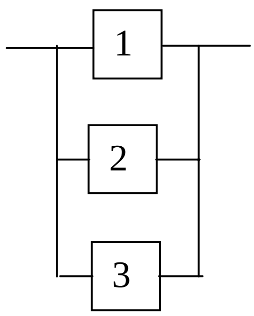


Рис. 9.2.

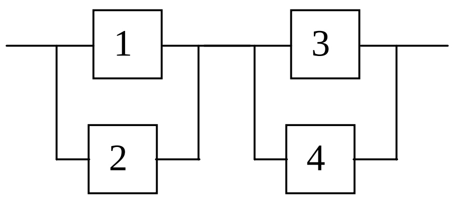


Рис. 9.3.

10. ФУНКЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Если каждому возможному значению случайной величины X соответствует единственное значение случайной величины Y, то Y называют функцией случайного аргумента X и записывают Y=φ(X). При этом функция y=φ(x) является обычной числовой функцией, определенной на множестве возможных значений случайной величины X.

Если X - дискретная случайная величина и функция Y=φ(X) монотонна, то различным значениям X соответствуют различные значения Y, вычисляемые по формуле

$$y_i = \varphi(x_i), \ \ i = 1,2,3,..., \qquad (10.1)$$

а вероятности принятия соответствующих значений: $X = x_i$ и $Y = y_i$ одинаковы.

Если же Y=φ(X) - немонотонная функция, то различным значениям X могут соответствовать одинаковые значения Y. В этом случае для отыскания вероятностей возможных значений Y следует сложить вероятности тех возможных значений X, при которых Y принимает одинаковые значения.

Если X - непрерывная случайная величина с плотностью распределения $f(x)$ и если $y = \varphi(x)$ - дифференцируема и строго монотонна, то плотность распределения $g(y)$ случайной величины Y находится по формуле

$$g(y) = f(\psi(y))\,|\,\psi'(y)\,|, \qquad (10.2)$$

где $x = \psi(y)$ - функция, обратная к y= φ(x).

Если функция Y=φ(X) немонотонна в интервале возможных значений X, то следует разбить этот интервал на такие интервалы, в которых функция φ(x) монотонна, а затем представить плотность g(y) в виде суммы:

$$g(y) = \sum_{i=1}^{k} f(\psi_i(y))\left|\psi'_i(y)\right|, \qquad (10.3)$$

где k - число интервалов монотонности, $x = \psi_i(y)$ - функция, обратная к y= φ (x) на i-ом интервале монотонности (i=1,2,...,k).

Известно, что если X - дискретная случайная величина с рядом распределения

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
p	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n

то математическое ожидание и дисперсия случайной величины Y= φ(X) находятся соответственно по формулам

$$M[\varphi(X)] = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\,p_i, \qquad (10.4)$$

$$D[\varphi(X)] = \sum_{i=1}^{n} \varphi^2(x_i)\cdot p_i - (M[\varphi(X)])^2. \qquad (10.5)$$

Если же X - непрерывная случайная величина с плотностью распределения f(x), то математическое ожидание и дисперсия Y= φ(X) находится соответственно по формулам

$$M[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\cdot f(x)dx\ , \qquad (10.6)$$

$$D[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(x) \cdot f(x)dx - (M[\varphi(X)]^2 \qquad (10.7)$$

<u>Пример 1.</u> Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	1	3	5
p	0,4	0,1	0,5

Найти закон распределения случайной величины Y= 3X.

<u>Решение.</u> По формуле (10.1) находим возможные значения случайной величины Y=3X. Получаем:

$y_1 = 3x_1 = 3 \cdot 1 = 3;\ y_2 = 3x_2 = 3 \cdot 3 = 9; \quad y_3 = 3 \cdot 5 = 15.$

Так как функция y = 3x монотонна, то вероятности, с которыми Y принимает свои значения: 3, 9, 15, равны вероятностям, с которыми X принимает свои значения: 1, 3, 5 соответственно. Значит, $p_1 = 0{,}4,\ p_2 = 0{,}1,\ p_3 = 0{,}1.$ Выписываем закон распределения для Y.

Ответ:

	3	9	15
P	0,4	0,1	0,5

<u>Пример 2.</u> Дискретная случайная величина X задана законом распределения

	-1	-2	1	2
P	0,3	0,1	0,2	0,4

Найти закон распределения случайной величины $Y = X^2$.

<u>Решение.</u> Найдем возможные значения случайной величины Y:

$$y_1 = x_1^2 = (-1)^2 = 1; \quad y_2 = x_2^2 = (-2)^2 = 4;$$

$$y_3 = x_3^2 = 1^2 = 1; \qquad y_4 = x_4^2 = 2^2 = 4.$$

Итак, различным значениям случайной величины X соответствуют одинаковые значения случайной величины Y. Найдем вероятности возможных значений случайной величины Y.

P(Y=1) = P(X= -1) + P(X=1) = 0,3 + 0,2 = 0,5;

P(Y=4) = P(X= -2) + P(X=2) = 0,1 + 0,4 = 0,5.

Запишем искомый закон распределения величины Y:

Y	1	4
p	0,5	0,5

<u>Пример 3.</u> Случайная величина X распределена равномерно в интервале (3; 5). Найти закон распределения случайной величины $Y = 2X - 8$.

<u>Решение.</u> Выписываем плотность распределения случайной величины X

$$f(x) = 0{,}5 \text{ при } x \in (3;5); \quad f(x) = 0 \text{ при } x \notin (3;5). \qquad (10.8)$$

Далее используем формулу (10.2). Так как y=2x+8, то x=(y+8)/2. Значит, $\psi(y) = (y+8)/2$, $\psi'(y) = 1/2$, и формула (10.2) в нашем случае примет вид

$$g(y) = f((y+8)/2) \cdot 0{,}5. \qquad (10.9)$$

Условие: (y+8)/2 $\in$ (3; 5) равносильно условию: y$\in$(-2; 2). Значит, с учетом формулы (10.8) f((y+8)/2)= 0,5 при y$\in$(-2; 2), f((y+8)/2)= 0 при y$\notin$(-2; 2), и формула (10.9) примет вид: g(y)= 1/4 при y$\in$(-2; 2), g(y)= 0 при y$\notin$(-2; 2).

Ответ: g(y)= 1/4 при y$\in$(-2; 2), g(y)= 0 при y$\notin$(-2; 2).

<u>Пример 4.</u> Случайная величина X распределена равномерно в интервале $(0;2\pi)$. Найти плотность распределения случайной величины $Y = \cos X$.

<u>Решение.</u> Выписываем плотность распределения случайной величины X

$$f(x) = 0{,}5/\pi \text{ при } x \in (0;2\pi); \quad f(x) = 0 \text{ при } x \notin (0;2\pi).$$

Из уравнения $y = \cos x$ найдем обратную функцию x=ψ(y). Так как в интервале $(0;\ 2\pi)$ функция $y = \cos x$ не монотонна, разобьем этот интервал на интервалы $(0;\ \pi)$ и $(\pi;\ 2\pi)$, в которых функция $y = \cos x$ монотонна. В интервале $(0;\ \pi)$ обратная функция имеет вид $\psi_1(y) = \arccos y$, в интервале $(\pi;\ 2\pi)$ $\psi_2(y) = 2\pi - \arccos y$. Искомая плотность распределения g(y) в соответствии с (10.3) находится по формуле

$$g(y) = f(\psi_1(y))\,|\psi'_1(y)| + f(\psi_2(y))\,|\psi'_2(y)|. \qquad (10.10)$$

Учитывая, что $f(x) = 0{,}5/\pi$, находим $f(\psi_1) = 0{,}5/\pi$, $f(\psi_2(y)) = 0{,}5/\pi$. Далее находим

$$\psi'_1(y) = (\arccos y)' = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \quad \psi'_2(y) = (2\pi - \arccos y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}},$$

$$|\psi'_1(y)| = |\psi'_2(y)| = 1/\sqrt{1-y^2}.$$

Условия: $\psi_1(y) \in (0;\pi)$, $\psi_2(y) \in (\pi;2\pi)$ равносильны условию y$\in$(-1; 1). Подставляем все данные в формулу (10.10), получаем для y ∈ (-1; 1)

$$g(y)=\frac{0{,}5}{\pi\sqrt{1-y^2}}+\frac{0{,}5}{\pi\sqrt{1-y^2}}=\frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}.$$

Если же y∉ (-1; 1), то $g(y)=0$.

Ответ: $g(y)=\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}$ при $y\in(-1;1)$; $g(y)=0$ при $y\notin(-1;1)$.

<u>Пример 5.</u> Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y=X^2-3$, если X имеет закон распределения

X	-3	-1	0	1	2	3
P	0,1	0,15	0,3	0,2	0,15	0,1

<u>Решение.</u> Поскольку X - дискретная случайная величина, для нахождения математического ожидания и дисперсии случайной величины φ(X) используем формулы (10.4) и (10.5). В нашем случае $\varphi(x)=x^2-3$, поэтому

$$\varphi(-3)=6,\ \varphi(-1)=-2,\ \varphi(0)=-3,\ \varphi(1)=-2,\ \varphi(2)=1,\ \varphi(3)=6.$$

Теперь по формуле (10.4) находим

$$M[\varphi(X)]=6\cdot 0{,}1-2\cdot 0{,}15-3\cdot 0{,}3-2\cdot 0{,}2+1\cdot 0{,}15+6\cdot 0{,}1=-0{,}25.$$

По формуле (10.5) находим

$$D[\varphi(X)]=6^{2\cdot}\cdot 0{,}1+(-2)^2\cdot 0{,}15+(-3)^{2\cdot}\cdot 0{,}3+(-2)^2\cdot 0{,}2+1^{2\cdot}\cdot 0{,}15+$$
$$+6^2\cdot 0{,}1-(-0{,}25)^2=11{,}39.$$

Ответ: -0,25; 11,39.

<u>Пример 6.</u> Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y=\exp(X)$, если X имеет закон распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ x^2 & \text{при } 0<x<1,\\ 1 & \text{при } x\ge 1.\end{cases}$$

<u>Решение.</u> Поскольку X - непрерывная случайная величина, для нахождения математического ожидания и дисперсии используем формулы (10.6), (10.7). Предварительно найдем плотность распределения $f(x)=F'(x)$. Имеем:

$$f(x)=2x \text{ при } x\in(0;1);\quad f(x)=0 \text{ при } x\notin(0;1).$$

Тогда по формуле (10.6)

$$M[\varphi(X)]=\int_{-\infty}^{\infty}e^x f(x)dx=\int_0^1 e^x 2xdx=2.$$

По формуле (10.7) находим

$$D[\varphi(X)] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{2x} f(x)dx - (M[\varphi(X)])^2 = \int\limits_0^1 e^{2x} 2xdx - 4 = (e^2 - 7)/2.$$

Ответ: 2; $(e^2 - 7)/2$.

10.1. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения

X	3	6	8
p	0,2	0,1	0,7

Найти закон распределения случайной величины Y=2X+1.

10.2. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения

X	-3	-1	0	3
p	0,1	0,3	0,4	0,2

Найти закон распределения случайной величины $Y = X^4 - X^2$.

10.3. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения

X	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
p	0,15	0,10	0,10	0,15	0,15	0,10	0,05	0,10	0,10

Найти закон распределения случайной величины Y = sin X.

10.4. Случайная величина распределена по закону Коши

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}.$$

Найти плотность распределения случайной величины Y=X^3.

10.5. Случайная величина X имеет равномерный закон распределения в интервале (1; 5). Найти закон распределения случайной величины Y=1/X.

10.6. Известна функция распределения случайной величины X:

$$F(x) = 1 - e^{-3(x-2)} \text{ при } x > 0; \quad F(x) = 0 \text{ при } x < 2.$$

Найти плотность распределения случайной величины $Y = -3/X$.

10.7. Случайная величина X равномерно распределена в интервале (1; 3). Найти плотность распределения случайной величины Y = ln X.

10.8. Случайная величина X равномерно распределена в интервале (-π/2; π/2). Найти плотность распределения случайной величины Y= sin X.

10.9. Известна функция распределения случайной величины X

$$F(x)=\begin{cases}0, & x \le 0,\\ x^3, & 0 < x < 1,\\ 1, & x \ge 1.\end{cases}$$

Найти плотность распределения случайной величины $Y = e^X$.

10.10. Случайная величина X имеет нормальный закон распределения с математическим ожиданием $m_X = 5$ и дисперсией $D[X] = 4$. Найти закон распределения случайной величины $Y = 2X - 3$.

10.11. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = 0{,}5 + \frac{1}{\pi} arctgx.$$

Найти закон распределения случайной величины $Y = e^X$.

10.12. Случайная величина X имеет нормальный закон распределения с параметрами $a = 0$, $\sigma = 1$. Найти плотность распределения случайной величины $Y = X^2$.

10.13. Случайная величина X равномерно распределена в интервале $(-\pi/2; 3\pi/2)$. Найти закон распределения случайной величины $Y = \sin X$.

10.14. Случайная величина X задана функцией распределения

$F(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$ при $x \ge 0$; $F(x) = 0$ при $x < 0$.

Найти закон распределения случайной величины $Y = X^2$.

10.15. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = 3X - 4$, если X имеет закон распределения

X	-1	2	3	4
p	0,4	0,3	0,2	0,1

10.16. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = X^2 - 2X$, если X имеет закон распределения

X	-1	0	2	3
p	0,2	0,5	0,2	0,1

10.17. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = 0{,}5\sin x$ при $x \in (0;\pi)$; $f(x) = 0$ при $x \notin (0;\pi)$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = X^2$.

10.18. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины Y=1/X, если X равномерно распределена в интервале (1; 5).

10.19. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины Y= exp(X), если X имеет показательный закон распределения с математическим ожиданием $m_X = 0{,}2$.

11. СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Совокупность двух случайных величин (X; Y), рассматриваемых совместно, называется *системой двух случайных величин или двумерным случайным вектором*. Систему двух случайных величин можно рассматривать как случайную точку M(X, Y) на плоскости xOy. Дискретной называют систему случайных величин, составляющие которой дискретны. Непрерывной называют ту систему, составляющие которой непрерывны.

Функцией совместного распределения $F(x,y)$ системы двух случайных величин (X,Y) называется вероятность одновременного выполнения двух неравенств: $X<x,\ Y<y,$ т. е.

$$F(X<x, Y<y)=P(X<x,\ Y<y).$$

Если функция совместного распределения $F(x,y)$ имеет вторую смешанную производную по $x,y,$ то эту производную называют *плотностью совместного распределения* и обозначают $f(x,y).$ Таким образом,

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}. \qquad (11.1)$$

Плотность совместного распределения f(x, y) обладает следующими свойствами:

1) $f(x,y)>0;$

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=1.$

Зная плотность распределения, можно найти функцию распределения по формуле

$$F(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy.$$

Вероятность попадания случайной точки (X,Y) в произвольную область D находится по формуле

$$P((X,Y)\in D)=\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy.$$

Плотности распределения компонент X, Y, входящих в систему (X, Y), выражаются через плотность совместного распределения системы формулами

$$f_1(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy; \qquad \mathrm{f}_2(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx.$$

Условным законом распределения случайной величины, входящей в систему, называется ее закон распределения, вычисленный при условии, что другая случайная величина приняла определенное значение. Условные плотности распределения случайных величин X и Y, входящих в систему, обозначаются через $f_1(x/y)$ и $f_2(y/x)$. Случайные величины X и Y называются *независимыми*, если закон распределения одной из них не зависит от того, какое значение примет другая. Условные плотности распределения связаны с плотностью совместного распределения следующими соотношениями:

$$f(x,y)=f_1(x)\,f_2(y/x)=f_2(y)\,f_1(x/y),$$

откуда

$$f_1(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)} \quad \text{при} \quad f_2(y)\neq 0,$$

$$f_2(y/x)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)} \quad \text{при} \quad f_1(x)\neq 0.$$

Для независимых случайных величин $f_1(x/y)=f_1(x)$, $f_2(y/x)=f_2(y)$, поэтому $f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$.

Аналогично для системы независимых случайных величин их функция совместного распределения $F(x,y)$ и функции распределения компонент $F_1(x)$, $F_2(y)$ связаны соотношением

$$F(x,y)=F_1(x)\cdot F_2(y). \tag{11.2}$$

Корреляционным моментом K_{XY} системы (X, Y) называется величина

$$K_{XY}=M[(X-m_X)(Y-m_Y)].$$

Коэффициентом корреляции r_{XY} системы (X, Y) называется величина $r_{XY}=\dfrac{K_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}$, в которой $\sigma_X=\sqrt{D[X]}$, $\sigma_Y=\sqrt{D[Y]}$. Коэффициент корреляции характеризует степень тесноты зависимости между случайными величинами. Для любых двух случайных величин $|r_{XY}|<1$. Если случайные величины независимы, то $r_{XY}=0$; если случайные величины связаны линейной зависимостью, то $r_{XY}=\pm 1$.

<u>Пример 1.</u> Задано совместное распределение системы случайных величин (X, Y)

Y \ X	3	10	12
4	0,17	0,13	0,25
5	0,10	0,30	0,05

Найти законы распределения компонент X и Y.

<u>Решение.</u> Сложив вероятности "по столбцам" в исходной таблице, получим вероятности возможных значений X:

P(X=3) = 0,17 + 0,10 = 0,27;
P(X=10) = 0,13 + 0,30 = 0,43;
P(X=12) = 0,25 + 0,05 = 0,30.

Напишем закон распределения составляющей X:

X	3	10	12
p	0,27	0,43	0,30

Сложив вероятности "по строкам", аналогично найдем распределение составляющей Y:

Y	4	5
p	0,55	0,45

Ответ:

X	3	10	12
p	0,27	0,43	0,30

Y	4	5
p	0,55	0,45

<u>Пример 2.</u> Два стрелка независимо друг от друга производят по одному выстрелу, каждый по своей мишени. Случайная величина X - число попаданий первого стрелка, Y - второго стрелка. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка $p_1 = 0{,}8$, для второго $p_2 = 0{,}9$. Построить функцию распределения системы случайных величин (X, Y).

<u>Решение.</u> Так как случайные величины X и Y по условию задачи независимы, то согласно (11.2) $F(x, y) = F_1(x) F_2(y)$. Случайные величины X и Y дискретны и могут принимать только два значения: 0, если стрелок промахнулся, и 1, если он попал в мишень. Для каждой случайной величины X, Y строим функцию распределения так, как в примере 1 из раздела 8. Получаем:

$F_1(x) = 0$ при $x < 0$, $F_1(x) = 0{,}2$ при $0 < x < 1$, $F_1(x) = 1$ при $x > 1$;

$F_2(y) = 0$ при $y < 0$, $F_2(y) = 0$ при $0 < y < 1$, $F_2(y) = 1$ при $y > 1$. Находим значения функции $F(x, y)$ по формуле (11.2) и сводим их в следующую таблицу

Y \ X	x < 0	0 <x< 1	x>1
y < 0	0	0	0
0 <y< 1	0	0,04	0,1
y>1	0	0,2	1

Пример 3. Задана функция совместного распределения системы двух случайных величин
$F(x,y)=1-3^{-x}-3^{-y}+3^{-x-y}$ при $x\geq 0,\ y\geq 0$; $F(x,y)=0$ в остальных случаях. Найти $f(x,y)$.

Решение. Используем формулу (11.1). Найдем частные производные: $F'_x=(3^{-x}-3^{-x-y})\cdot\ln 3$, $F''_{xy}=3^{-x-y}\ln^2 3$. Итак, искомая плотность распределения имеет вид $f(x,y)=3^{-x-y}\cdot\ln^2 3$ при $x\geq 0, y\geq 0;$ $f(x,y)=0$ в остальных случаях.

Ответ: $f(x,y)=3^{-x-y}\cdot\ln^2 3$ при $x\geq 0, y\geq 0;$ $f(x,y)=0$ в остальных случаях.

11.1. Задан закон совместного распределения системы дискретных случайных величин (X, Y):

Y \ X	26	30	41	50
2,3	0,05	0,12	0,08	0,04
2,7	0,09	0,30	0,11	0,21

Найти законы распределения составляющих X и Y.

11.2. Найти закон совместного распределения системы независимых случайных величин (X, Y), если компоненты X и Y имеют законы распределения

X	-1	3	5
p	0,5	0,3	0,2

Y	2	4
p	0,6	0,4

11.3. По мишени производится один выстрел. Вероятность попадания равна p. Рассматриваются две случайных величины: X – число попаданий; Y – число промахов. Построить функцию распределения данной системы.

11.4. Задана функция совместного распределения системы случайных величин:

$F(x,y)=(1-e^{-4x})\cdot(1-e^{-2y})$ при $x\geq 0,\ y\geq 0$; $F(x,y)=0$ в остальных случаях. Найти плотность совместного распределения системы.

11.5. Задана плотность совместного распределения системы случайных величин

$$f(x,y)=\frac{20}{\pi^2(16+x^2)(25+y^2)}.$$

Найти $F(x,y)$.

11.6. Задана двумерная плотность вероятности системы $f(x,y)=C(R-\sqrt{x^2+y^2})$ для $x^2+y^2 \le R^2$; $f(x,y)=0$ для $x^2+y^2 > R^2$. Найти: а) постоянную С; б) вероятность попадания случайной точки (X, Y) в круг радиуса $r=0{,}5R$ с центром в начале координат.

11.7. Задана двумерная плотность вероятности системы случайных величин

$$f(x,y)=\frac{C}{(9+x^2)(16+y^2)}.$$

Найти постоянную С.

11.8. Имеются две независимые случайные величины X и Y, подчиненные каждая показательному закону:

$$f_1(x)=ae^{-ax} \text{ при } x\ge 0, \quad f_1(x)=0 \text{ при } x<0;$$

$$f_2(y)=be^{-by} \text{ при } y\ge 0, \quad f_2(y)=0 \text{ при } y<0.$$

Написать выражения: а) плотности распределения системы (X, Y);
б) функции распределения системы (X, Y).

11.9. Система случайных величин распределена по закону

$$f(x,y)=\frac{a}{1+x^2+y^2+x^2y^2}.$$

а) Найти коэффициент a. б) Установить, являются ли величины X и Y зависимыми. в) Найти $f_1(x)$, $f_2(y)$. г) Найти вероятность попадания случайной точки в пределы квадрата: $-1\le x\le 1$, $-1\le y\le 1$.

11.10. Имеются независимые случайные величины X и Y. Случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами: $m_X=0$, $\sigma_X=1/\sqrt{2}$. Случайная величина Y распределена равномерно на интервале (0; 1). Написать выражение для плотности совместного распределения $f(x,y)$.

11.11. Имеется система случайных величин X и Y. Случайная величина X распределена по показательному закону

$$f_1(x)=ae^{-\alpha x} \text{ при } x\ge 0, \quad f_1(x)=0 \text{ при } x<0.$$

Случайная величина Y имеет условный закон распределения

$$f_2(y/x)=xe^{-xy} \text{ при } y\ge 0, \quad f_2(y/x)=0 \text{ при } y<0.$$

а) Написать плотность распределения $f(x,y)$ системы. б) Найти плотность распределения $f_2(y)$ случайной величины Y. Найти условную плотность $f_1(x/y)$.

11.12. Определить корреляционный момент и коэффициент корреляции случайных величин X и Y, заданных законом совместного распределения

X / Y	-2	2
0	0,1	0
1	0,5	0,4

11.13. Определить корреляционный момент и коэффициент корреляции случайных величин X и Y, заданных законом совместного распределения

X / Y	0	1	3
2	0,3	0,2	0,1
5	0,1	0,1	0,2

12. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ НАБЛЮДЕНИЙ

Статистическое исследование начинается со сбора данных. Для этого производится n опытов (наблюдений) и регистрируются их результаты. Если x_i - значение исследуемой случайной величины X, полученное i-м опыте, то последовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ называют *выборкой*. Число опытов n называется *объемом выборки*. Выборка является исходным материалом для всех дальнейших статистических выводов о случайной величине X.

Если элементы выборки записать в порядке их возрастания, то полученная последовательность будет называться *вариационным рядом*. Разность между максимальным и минимальным элементами выборки называют *размахом выборки*.

Если в выборке объема n элемент x_i встречается n_i раз, то число n_i называют частотой элемента x_i, а последовательность пар (x_i, n_i) - *статистическим рядом*. Обычно статистический ряд записывают в виде таблицы, первая строка которой содержит элементы x_i, а вторая - их частоты n_i.

При большом объеме выборки ее элементы объединяют в группы (разряды), представляя результаты опытов в виде *группированной выборки*. Для этого весь интервал значений выборки разбивают на k частичных интервалов или разрядов; в зависимости от объема выборки число интервалов k берется от 6 до 20. Затем для каждого интервала $[a_i; a_{i+1})$ подсчитывают число m_i значений выборки, попавших в этот интервал. Очередное значение x_i относится к i-му интервалу, если $a_i \le x_i < a_{i+1}$.

Числа m_i называются *частотами*. Результат этой группировки сводится в таблицу (см. табл. 12.1). Первые три колонки этой таблицы и представляют группированную выборку.

Наряду с частотами одновременно подсчитываются и заносятся в таблицу *представители интервалов*, в качестве которых обычно берут середины интервалов $z_i = (a_i + a_{i+1})/2$, *относительные частоты* $p_i{*} = m_i / n$ и *плотности относительных частот* $f_i{*} = \dfrac{m_i}{n(a_{i+1} - a_i)}$. Для контроля правильности вычислений следует проверить равенства $m_1 + m_2 + ... + m_k = n$ и $p_1{*} + p_2{*} + \quad + ... + p_n{*} = 1$.

Статистической или эмпирической функцией распределения случайной величины X по имеющейся выборке называется функция $F*(x)$, равная относительной частоте события {X <x} , то есть $F*(x) = n_x / n$, где n_x - число значений в выборке, меньших x; $n -$ объём выборки.

Гистограммой называется совокупность прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы, а высоты равны соответствующим плотностям относительных частот. Если середины верхних сторон прямоугольников соединить ломаной линией, то полученная ломанная называется *полигоном*. Гистограмма и полигон могут служить некоторым приближением графика неизвестной плотности распределения $f(x)$ случайной величины X. Точность приближения возрастает с ростом объема выборки и количества частичных интервалов.

Таблица 12.1

Группированная выборка

Номер ин-терва-ла	Грани-цы ин-тервала a_i - a_{i+1}	Частота m_i	Предста-витель интер-вала z_i	Относи-тельная-частота $p_i{*}$	Плот-ность от-носи-тельной частоты $f_i{*}$
1.	$a_1 - a_2$	m_1	z_1	$p_1{*}$	$f_1{*}$
2.	$a_2 - a_3$	m_2	z_2	$p_2{*}$	$f_2{*}$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
k.	$a_k - a_{k+1}$	m_k	z_k	$p_k{*}$	$f_k{*}$

В некоторых случаях строят полигон абсолютных частот, представляющий собой ломаную, отрезки которой соединяют точки $(x_1, n_1), (x_2, n_2), ..., (x_k, n_k)$, где x_i - варианты выборки а n_i - соответствующие им частоты. Он так же позволяет судить о предполагаемом законе распределения случайной величины X.

<u>Пример 1.</u> Записать в виде вариационного и статистического рядов выборку 5, 3, 7, 10, 5, 5, 2, 10, 7, 2, 7, 7, 4, 2, 4.

<u>Решение.</u> Объем выборки n = 15. Упорядочив элементы выборки по величине, получим вариационный ряд

2, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 7, 7, 7, 7, 10, 10 .

Статистический ряд записывается в виде таблицы

x_i	2	3	4	5	7	10
n_i	3	1	2	3	4	2

<u>Пример 2.</u> Представить выборку из 55 наблюдений в виде группированной выборки, используя 7 интервалов равной длины. Построить гистограмму и полигон. Выборка:

17 19 23 18 21 15 16 13 20 18 15
20 14 20 16 14 20 19 15 19 16 19
15 22 21 12 10 21 18 14 14 17 16
13 19 18 20 24 16 20 19 17 18 18
21 17 19 17 13 17 11 18 19 19 17 .

<u>Решение.</u> Размах выборки 24 - 10= 14. Длина интервала 14/7=2. Результаты группировки сводим в табл.12.2.

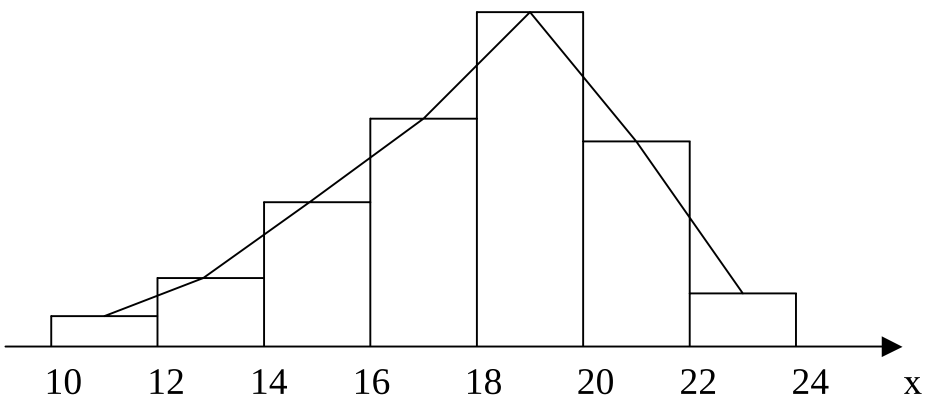


Рис. 12.1. Полигон и гистограмма выборки

Таблица 12.2

Группированная выборка

Номер интер-вала	Грани-цы ин-тервала a_i - a_{i+1}	Частота m_i	Предста-витель интер-вала z_i	Относи-тельная частота p_i *	Плот-ность от-носи-тельной частоты f_i *
1.	10 – 12	2	11	0,0364	0,0182
2.	12 – 14	4	13	0,0727	0,0364
3.	14 – 16	8	15	0,1455	0,0728
4.	16 – 18	12	17	0,2182	0,1091
5.	18 – 20	16	19	0,2909	0,1456
6.	20 – 22	10	21	0,1818	0,0909
7.	20 – 24	3	23	0,0545	0,0273

12.1. Записать эмпирическую функцию распределения для выборки, представленной статистическим рядом.

а)

x_i	15	16	17	18	19
n_i	1	4	5	4	2

б)

x_i	2	3	4	5	6	7	8
n_i	1	3	4	6	5	2	1

12.2. Построить полигон и гистограмму для группированной выборки:

а)

Границы интервалов	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
Частоты m_i	1	2	7	18	12	8	2

б)

Границы интервалов	5-7	7-9	9-11	11-13	13-15	15-17
Частоты m_i	8	14	40	26	6	4

12.3. Время решения контрольной работы студентами (в минутах):

38 60 41 51 33 42 45 21 53 60
68 52 47 46 49 49 14 57 54 59
77 47 28 48 58 32 42 58 61 30
61 35 47 72 41 45 44 55 30 40
67 65 39 48 43 60 54 42 59 50

Найти размах выборки, число и длину равных интервалов, если первый интервал 14 - 23. Составить группированную выборку, построить гистограмму и полигон.

12.4. Время работы компьютерного класса в день (в часах):

13,4 14,7 15,2 15,1 13,0 8,8 14,0 17,9 15,1 16,5 16,6
14,2 16,3 14,6 11,7 16,4 15,1 17,6 14,1 18,8 11,6 13,9
18,0 12,4 17,2 14,5 16,3 13,7 15,5 16,2 8,4 14,7 15,4
11,3 10,7 16,9 15,8 16,1 12,3 14,0 17,7 14,7 16,2 17,1

Построить статистическую функцию распределения группированной выборки, если ее первый интервал 8,4 - 10,4 и все интервалы равны.

12.5. Построить полигон частот по данному распределению выборки:

а)

x_i	2	3	5	6
n_i	10	15	5	20

б)

x_i	15	20	25	30	35
n_i	10	15	30	20	25

13. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ

Случайная величина X характеризуется целым рядом числовых параметров: математическим ожиданием, дисперсией, модой, медианой и т.д. Эти параметры называют *параметрами генеральной совокупности*. Их приближенные значения можно вычислить на основе выборочных данных. Приближенное значение параметра, вычисленное на основе выборочных данных, называется его *статистической оценкой*. Оценка параметра обычно обозначается символом *тильдой* (~) наверху.

Для оценки математического ожидания применяется *выборочное среднее* $\tilde{m}_X$

$$\tilde{m}_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \,. \qquad (13.1)$$

Для группированной выборки вместо (13.1) используется следующая формула

$$\tilde{m}_X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} z_i m_i \,, \qquad (13.2)$$

которую можно получить из предыдущей, если считать все m_i значений выборки, попавших в i-й интервал, равными представителю z_i этого интервала (k - число интервалов).

Для *оценки дисперсии* по выборке используется формула

$$\tilde{D}[\,X\,] = \frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\tilde{m}_X)^2\right). \qquad (13.3)$$

В случае группированной выборки используется оценка

$$\tilde{D}[\,X\,] = \frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} z_i^2 m_i - (\tilde{m}_X)^2\right). \qquad (13.4)$$

Отметим, что при больших n коэффициент *n/(n-1)* в выражениях (13.3) и (13.4) близок к единице, и его можно опустить.

В качестве *оценки среднеквадратического отклонения* используется $\tilde{\sigma}_X = \sqrt{\tilde{D}[X]}$.

Оценкой моды d_X унимодального (одновершинного) распределения является элемент выборки, встречающийся с наибольшей частотой.

Оценкой медианы h_X называют число, которое делит вариационный ряд на две части, содержащие равное число элементов. Если объем выборки n - нечетное число (т.е. $n = 2k+1$), то $\tilde{h}_X = x_{k+1}$, т.е. является элементом вариационного ряда со средним номером. Если же $n = 2k$, то $\tilde{h}_X = 0{,}5(x_k + x_{k+1})$.

Оценки начальных и центральных моментов l-го порядка вычисляются по формулам

$$\tilde{\alpha}_l = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^l, \qquad \tilde{\mu}_l = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \tilde{m}_X)^l, \quad l = 1,2,3,...$$

По группированной выборке оценки моментов вычисляются по формулам

$$\tilde{\alpha}_l = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} z_i^l m_i, \quad \tilde{\mu}_l = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \tilde{m}_x)^l m_i, \quad l = 1,2,3,...$$

Форма распределения случайной величины X характеризуется коэффициентами асимметрии и эксцесса, оценки которых вычисляются по формулам

$$\tilde{A}_X = \frac{\tilde{\mu}_3}{\tilde{\sigma}_X^3}, \qquad \tilde{E}_X = \frac{\tilde{\mu}_4}{\tilde{\sigma}_X^4} - 3 .$$

<u>Пример 1.</u> Определить выборочные среднее, дисперсию, моду и медиану для выборки: 5, 6, 8, 2, 3, 1, 4, 1 .

<u>Решение.</u> Представим данные в виде вариационного ряда: 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8. Выборочное среднее находим по формуле (13.1).

$$\tilde{m}_X = 1/8\ (1+1+2+3+4+5+6+8) = 3{,}75.$$

Для расчета выборочной дисперсии воспользуемся формулой (13.3).

$$\tilde{D}[X] = \frac{8}{7}(\ 1/8\ (1+1+4+9+16+25+36+64) - 3{,}75^2\ ) = 6{,}21\ .$$

Все элементы входят в выборку по одному разу, кроме 1, следовательно, выборочная мода $\tilde{d}_X = 1$. Так как $n = 8$, то медиана $\tilde{h}_X = 0{,}57\ (3+4) = {=}3{,}5$.

Ответ: $\tilde{m}_X = 3{,}75;\ \ \tilde{D}[X] = 6{,}21;\ \ \tilde{d}_X = 1;\ \ \tilde{h}_X = 3{,}5.$

<u>Пример 2.</u> Найти выборочные среднее и дисперсию для группированной выборки:

Границы интервалов	34-36	36-38	38-40	40-42	42-44	44-46
Частоты m_i	2	3	30	40	20	5

<u>Решение.</u> Объем выборки равен 100. По формуле (13.2) находим

$$\tilde{m}_X = \frac{1}{100}(35\cdot 2 + 37\cdot 3 + 39\cdot 30 + 41\cdot 40 + 43\cdot 20 + 45\cdot 5) = 40{,}76.$$

Для вычисления выборочной дисперсии воспользуемся уже формулой (13.4)

$$\tilde{D}_X = \frac{100}{99}\left(\frac{1}{100}(35^2 \cdot 2 + 37^2 \cdot 3 + 39^2 \cdot 30 + 41^2 \cdot 40 + 43^2 \cdot 20 + 45^2 \cdot 5) - 40{,}76^2\right) = 4{,}0.$$

Ответ: $\tilde{m}_x = 40{,}76$; $\tilde{D}[X] = 4{,}0$.

В задачах 13.1-13.3 вычислить выборочные среднее, дисперсию, моду и медиану выборок.

13.1. 1; 2; 3; 4; 5; 5; 9.

13.2. 7; 3; 3; 6; 4; 5; 1; 2; 1; 3.

13.3. 3,1; 3,0; 1,5; 1,8; 2,5; 3,1; 2,4; 2,8; 1,3.

Вычислить выборочные средние и дисперсии группированных выборок:

13.4.

Границы интервалов	5-7	7-9	9-11	11-13	13-15	15-17
Частоты m_i	8	14	40	26	6	4

13.5.

Границы интервалов	10-14	14-18	18-22	22-26	26-30	30-34
Частоты m_i	1	5	10	20	18	3

13.6.

Границы интервалов	2-4	4-6	6-8	8-10	10-12	12-14
Частоты m_i	10	20	10	8	4	1

13.7. Как изменятся выборочные среднее, мода и дисперсия выборки, если каждый член выборки:

а) увеличить (уменьшить) на число d;

б) увеличить (уменьшить) в k раз.

13.8. Студентам был предложен тест из 24 вопросов. По числу правильных ответов студенты распределились следующим образом:

Количество верных ответов	10-12	12-14	14-16	16-18	18-20	20-22	22-24
Количество студентов	2	4	8	12	16	10	3

Вычислить выборочные коэффициенты асимметрии и эксцесса данного распределения.

13.9. На одном из участков шоссе было проведено измерение средней скорости движения автомобилей. Результаты были сведены в следующую таблицу:

Скорость	61-65	65-69	69-73	73-77	77-81
Количество автомобилей	1	4	5	8	14

Вычислить выборочные коэффициенты асимметрии и эксцесса распределения.

14. ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

Статистической называют гипотезу о виде неизвестного распределения или о параметрах известного распределения. Та гипотеза, которая проверяется на основе статистического материала, называется *нулевой или основной* и обозначается через H_O. Любая несовместная с H_O гипотеза называется *альтернативной или конкурирующей* и обозначается через H_1. Выбор конкурирующей гипотезы определяется конкретной формулировкой решаемой задачи. Правило, по которому принимается решение - принять или отвергнуть основную гипотезу H_O - называется *критерием*; критерий всегда задается некоторой случайной величиной К.

В итоге проверки гипотезы могут быть допущены *ошибки двух родов*. *Ошибка первого рода* состоит в том, что будет отвергнута правильная нулевая гипотеза. Вероятность ошибки первого рода называют *уровнем значимости* и обозначают через α. *Ошибка второго рода* состоит в том, что будет принята неправильная нулевая гипотеза. Вероятность ошибки второго рода обозначают через β.

Пусть D - множество возможных значений критерия K. При заданном уровне значимости α множество D разбивается на две части: область *допустимых значений* D_O и *критическую область* D_1. По выборочным данным с учетом выдвинутой гипотезы H_O вычисляется значение критерия *К*, которое называется *наблюдаемым значением критерия* и обозначается через K_H. Далее проверяют принадлежность значения K_H области допустимых значений. Если $K_н$ принадлежит области допустимых значений D_O, то гипотеза H_O принимается. Если K_H принадлежит критической области D_1, то гипотеза H_O отвергается.

Для проверки гипотезы о виде распределения изучаемой случайной величины обычно используется *критерий Пирсона*. С этой целью числовую ось $(-\infty;\infty)$ разбивают на s промежутков (разрядов)

$$(a_1;a_2),\ \ [a_2;a_3),...,[a_s;a_{s+1}), \qquad (14.1)$$

где $a_1=-\infty,\ a_{s+1}=\infty$. На основе выдвинутой гипотезы H_O о виде изучаемого распределения (оно называется теоретическим) находят параметры этого распределения, а затем вероятности $p_1,p_2,...,p_s$ попадания теоретического распределения в промежутки (14.1). В качестве критерия Пирсона используется случайная величина $K=\chi^2$, наблюдаемое значение χ^2_H которой находится по формуле

$$\chi^2_H=\sum_{i=1}^{s}(m_i-n_i^*)^2/n_i^*. \qquad (14.2)$$

В этой формуле m_i - *экспериментальные частоты* попадания в промежуток $[a_i;a_{i+1})$, $n_i^*=np_i$ - *теоретические частоты* в этот же промежуток, n - объем выборки.

Случайная величина χ^2 распределена по закону Пирсона с *параметром* $\nu=s-r-1$, где r - число параметров теоретического распределения, найденных на основе выборочных данных, s - число промежутков в системе (14.1). Известно, что в критерии Пирсона область принятия решения $D_O=(-\infty;\chi^2_{кр})$, критическая область $D_1=[\chi^2_{кр};\infty)$, где $\chi^2_{кр}$ - критическая точка распределения Пирсона, которая находится по таблице прил. 3. Поэтому по заданному уровню значимости α и вычисленному значению параметра $\nu=s-r-1$ находим по таблице прил.3 критическое значение параметра $\chi^2_{кр}$, затем по формуле (14.2) наблюдаемое значение параметра $\chi^2_н$. Если $\chi^2_н<\chi^2_{кр}$, то гипотеза H_O о виде распределения X принимается; если же $\chi^2_н\ge\chi^2_{кр}$, гипотеза H_O отвергается.

Для проверки гипотезы о равенстве дисперсии нормально распределенной случайной величины некоторому гипотетическому значению D_0 (т.е. гипотезы $H_0: D[X]=D_0$) используется в качестве критерия случайная величина $K=\chi^2$, наблюдаемое значение которой находится по формуле

$$\chi_н^2=\frac{(n-1)\widetilde{D}}{D_0}. \qquad (14.3)$$

При этом n – объем выборки, $\widetilde{D}$ – исправленная выборочная дисперсия, вычисляемая по формулам (13.3), (13.4). Случайная величина $K=\chi^2$ распределена по закону Пирсона с параметром $\nu=n-1$. Вид критической области (а значит, и области принятия решения) зависит от вида конкурирующей гипотезы H_1. Возможны три случая.

Случай 1. Если выбрана конкурирующая гипотеза $H_1: D[X]>D_0$, то гипотеза H_0 принимается при выполнении условия $\chi_н^2<\chi_{кр}^2$, где $\chi_{кр}^2$ – критическая точка распределения Пирсона при $\nu=n-1$ и уровне значимости α.

Случай 2. Если выбрана конкурирующая гипотеза $H_1: D[X]<D_0$, то гипотеза H_0 принимается при выполнении условия $\chi_н^2>\chi_{кр}^2$, где $\chi_{кр}^2$ – критическая точка распределения Пирсона при $\nu=n-1$ и уровне значимости $1-\alpha$.

Случай 3. При конкурирующей гипотезе $H_1: D[X]\neq D_0$ находят две критические точки $\chi_{лев,кр}^2$ и $\chi_{пр,кр}^2$ как критические точки распределения Пирсона при уровнях значимости $1-\alpha/2$ и $\alpha/2$ соответственно. Гипотеза H_0 принимается, если выполняется неравенство $\chi_{лев,кр}^2<\chi_н^2<\chi_{пр,кр}^2$; в противном случае гипотеза H_0 отвергается.

Пример 1. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости α= 0,05 установить, случайно или значимо расхождение между эмпирическими m_i и теоретическими n_i^* частотами, которые вычислены из гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности:

m_i	5	10	20	8	7
n_i^*	6	14	18	7	5

Решение. По формуле (14.2) находим наблюдаемое значение критерия Пирсона

$$\chi_н^2=\frac{(5-6)^2}{6}+\frac{(10-14)^2}{14}+\frac{(20-18)^2}{18}+\frac{(8-7)^2}{7}+\frac{(7-5)^2}{5}=2{,}47.$$

В нашем случае число групп (число столбцов) $s=5$. Так как нормальный закон имеет два параметра а и σ, которые находятся по выборочным данным, то r =2. Значит, $\nu=5-2-1=2$. По таблице прил.3 для α = 0,05,

$\nu = 2$ находим $\chi^2_{кр} = 6{,}0$. Так как $\chi^2_н < \chi^2_{кр}$, расхождения между эмпирическими и теоретическими частотами случайны, и гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности следует принять.

Ответ: случайно.

Пример 2. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости 0,05 проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности X с эмпирическим распределением выборки объемом $n = 200$:

x_i	5	7	9	11	13	15	17	19	21
m_i	15	26	25	30	26	21	24	20	13

Решение. По формулам (13.1) и (13.3) находим параметры нормального закона $a = \tilde{m}_X = 12{,}63$ и $\sigma = \tilde{\sigma}_X = 4{,}695$. Далее, поскольку выдвинута гипотеза о нормальном распределении, то теоретические частоты n_i^* для каждого x_i можно находить по формуле $n_i^* = n\dfrac{h}{\sigma} f(\dfrac{x_i - np}{\sigma})$, в которой $f(x)-$ плотность стандартного нормального распределения (т.е. с параметрами a=0, σ=1), n - объем выборки, h - разность между соседними значениями x_i. Найденные значения n_i^* записываем под соответствующими значениями m_i, получаем следующую таблицу:

x_i	5	7	9	11	13	15	17	19	21
m_i	15	26	25	30	26	21	24	20	13
n_i^*	9,1	16,5	25,2	32,0	33,9	29,8	22,0	13,5	7,0

Дальнейшее решение повторяет решение примера 1. По формуле (14.2) находим наблюдаемое значение критерия Пирсона

$$\chi^2_н = (15-9{,}1)^2/9{,}1 + (26-16{,}5)^2/16{,}5 + (25-25{,}2)^2/25{,}2 +$$
$$+(30-32{,}0)^2/32{,}0 + (26-33{,}9)^2/33{,}9 + (21-29{,}8)^2/29{,}8 +$$
$$+(24-22{,}0)^2/22{,}0 + (20-13{,}5)^2/13{,}5 + (13-7{,}0)^2/7{,}0 = 22{,}2.$$

В нашем случае число групп (число слагаемых) $s = 9$. Так как нормальный закон имеет два параметра a и σ, которые находятся по выборочным данным, то r=2. Значит, ν=9-2-1=6. По таблице прил.3 для α=0,05, ν=6 находим $\chi^2_{кр} = 12{,}6$. Так как $\chi^2_н > \chi^2_{кр}$, гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности не согласуется с эмпирическими данными, и ее следует отвергнуть.

Ответ: не согласуется.

Пример 3. Точность работы станка-автомата проверяется по дисперсии контролируемого размера изделий, которая не должна превышать

0,1. Взята проба из 25 случайно отобранных изделий; результаты сведены в таблицу:

Контролируемый размер	3,0	3,5	3,8	4,4	4,5
Частота	2	6	9	7	1

При уровне значимости 0,05 проверить, обеспечивает ли станок требуемую точность.

Решение. Выдвигаем нулевую гипотезу $H_0 : D[X] = 0{,}01.$ Согласно условию задачи в качестве конкурирующей гипотезы нужно принять $H_1 : D[X] > 0{,}01.$ Находим исправленную дисперсию; для этого предварительно находим по формуле (13.3) выборочное среднее $\tilde{m}_X$. Так как объем выборки $n = 2 + 6 + 9 + 7 + 1 = 25,$ то

$$m_X = \frac{1}{25}(3{,}0 \cdot 2 + 3{,}5 \cdot 6 + 3{,}8 \cdot 9 + 4{,}4 \cdot 7 + 4{,}5 \cdot 1) = 3{,}86.$$

Исправленную дисперсию $\tilde{D}$ находим по формуле (13.4)

$$\tilde{D} = \frac{25}{24}\left(\frac{1}{25}(3{,}0^2 \cdot 2 + 3{,}5^2 \cdot 6 + 3{,}8^2 \cdot 9 + 4{,}4^2 \cdot 7 + 4{,}5^2 \cdot 1) - 3{,}86^2\right) = 0{,}20.$$

Находим наблюдаемое значение критерия по формуле (14.3): $\chi^2_н = (25 - 1) \cdot 0{,}20 / 0{,}1 = 48.$ По виду конкурирующей гипотезы (имеем случай 1) определяем $\chi^2_{кр}$ при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ и $\nu = 25 - 1 = 24;$ получаем $\chi^2_{кр} = 36{,}4.$ Итак, $\chi^2_н > \chi^2_{кр}$, значит, гипотезу H_0 отвергаем.

Ответ: станок не обеспечивает нужную точность.

14.1. При уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности, если известны эмпирические и теоретические частоты

m_i	6	8	13	15	20	16	10	7	5
n^*_i	5	9	14	16	18	16	9	6	7

14.2. При уровне значимости 0,025 проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности, если известны эмпирические и теоретические частоты

m_i	14	18	32	70	20	36	10
n^*_i	10	24	34	80	18	22	12

14.3. При уровне значимости 0,01 проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности, если известны эмпирические и теоретические частоты

m_i	5	7	15	14	21	16	9	7	6
n^*_i	6	6	14	15	22	15	8	8	6

14.4. При уровне значимости 0,025 проверить гипотезу о показательном распределении генеральной совокупности, если известны эмпирические и теоретические частоты

m_i	35	13	6	4	2
n^*_i	38	14	5	2	1

14.5. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости 0,05 проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности X с эмпирическим распределением выборки объемом n = 200:

x_i	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9	2,1	2,3
n_i	6	9	26	25	30	26	21	24	20	8	5

14.6. В результате испытаний 200 элементов двигателя получено эмпирическое распределение (границы интервалов в тыс. часов):

Границы интервала	0-5	5-10	10-15	15-30
Частоты m_i	133	45	15	7

Требуется, при уровне значимости 0,05, проверить гипотезу о том, что время работы элементов распределено по показательному закону.

14.7. В итоге испытаний 1000 ламп было получено статистическое распределение длительности их горения (границы интервалов в тысячах часов):

Границы интервала	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
Частоты m_i	65	45	50	00	0	5	5

Требуется, при уровне значимости 0,01, проверить гипотезу о том, что время работы ламп распределено по показательному закону.

14.8. Из нормальной генеральной совокупности извлечена выборка объема $n=21$ и по ней найдена исправленная выборочная дисперсия $\tilde{D}=16{,}2$. При уровне значимости 0,01 проверить гипотезу $H_0 : D=15$, приняв в качестве конкурирующей гипотезы $H_1 : D>15$.

14.9. Из нормальной генеральной совокупности извлечена выборка объема $n=31$:

x_i	10,1	10,3	10,6	11,2	11,5	11,8	12,0
n_i	1	3	7	10	6	3	1

Проверить при уровне при уровне значимости 0,05 нулевую гипотезу $H_0 : D=0{,}18$, приняв в качестве конкурирующей гипотезы $H_1 : D>0{,}18$.

14.10. Из нормальной генеральной совокупности извлечена выборка объема $n=20$:

x_i	56	58	60	62	64
n_i	1	4	10	3	2

Проверить при уровне значимости 0,05 нулевую гипотезу $H_0 : D=2$, приняв в качестве конкурирующей гипотезы $H_1 : D\neq 2$.

15. ОТВЕТЫ

15.1. Ответы к разделу 1

1.1. $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_6\}$, где ω_k - выпало k очков, k=1,2,...,6; $A=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\}$, B= $\{\omega_3,\omega_6\}$. **1.2.** Ω = {ГГ, ГЦ, ЦГ, ЦЦ}, A = {ГЦ, ЦГ}, B = {ГГ}, где Г - герб, Ц - цифра. **1.3.** Ω= {БК, БП, БЧ, КП, КЧ, ПЧ}, A = {КП}, B = {БК, БП, КЧ}, где Б, К, П, Ч - тузы "бубен", "крести", "пики", "червы" соответственно. **1.4.** Ω = {ГГГ, ЦГГ, ГЦГ, ГГЦ, ГЦЦ, ЦГЦ, ЦЦГ, ЦЦЦ}; A = {ГЦГ, ЦГЦ, ЦЦГ}; B = {ГГГ}; C= {ГГГ, ЦГГ, ГЦГ, ГГЦ}; D = {ГГГ, ЦГГ, ГГЦ}. **1.5.** $A+B=E$; $AB=\varnothing$; $A\overline{B}=A$; $A\backslash B=A$; **1.6.** $\varnothing$, ничья, B, E. **1.7.** AB = {вытащен туз "бубен" или туз "черви"}, AC = {вытащен туз "пик"}, $BC=\varnothing$, $A\backslash B$ = {вытащен туз черной масти}, $B\backslash C=B$, $B\backslash A$ = {вытащена карта красной масти, не являющаяся тузом}, $B\overline{C}=B$, $B+C$ = {вытащенная карта не имеет масть "треф"}. **1.8.** $\overline{A}$= {гербов выпало не больше, чем цифр}, $\overline{B}$ = {среди выпадений есть и цифры}, $A\backslash B$ = {выпадает ровно три герба}, $A+B=A$, $AB=B$, $A\backslash C$ = {выпадает 1 или 2 герба}, $\bar{A}C=C$,

$\overline{C} \setminus A$ = {выпадает 1 или 2 герба}. **1.9.** При двух извлечениях сначала появится черный, затем белый шар; при четырех извлечениях черный шар появится только последним; при четырех извлечениях цвет шаров меняется попеременно. **1.10.** $A_1A_2 + B$ и $(\overline{A}_1 + \overline{A}_2)\overline{B}$.

1.11. $\Omega = \{A_1A_2, \overline{A}_1A_2, A_1\overline{A}_2, \overline{A}_1\overline{A}_2\}$, $A = A_1A_2$, $B = \overline{A}_1\overline{A}_2$, $C = A_1A_2 + \overline{A}_1\overline{A}_2$, $D = A_1\overline{A}_2 + \overline{A}_1A_2$. **1.12.** $\Omega = \{A_1A_2, \overline{A}_1A_2, A_1\overline{A}_2, \overline{A}_1\overline{A}_2\}$, $A = A_1\overline{A}_2 + \overline{A}_1A_2$, $B = \overline{A}_1\overline{A}_2$, $C = A_1 + A_2$, $D = \overline{A}_1 + \overline{A}_2$.

1.13. $\Omega = \{A_1A_2A_3, \overline{A}_1A_2A_3, A_1\overline{A}_2A_3, A_1A_2\overline{A}_3, \overline{A}_1\overline{A}_2A_3, \overline{A}_1A_2\overline{A}_3, A_1\overline{A}_2\overline{A}_3, \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\}$, $A = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$, $B = A_1 + A_2 + A_3$, $C = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$, $D = \overline{A}_1A_2A_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + A_1A_2\overline{A}_3 + A_1A_2A_3$, $F = \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$. **1.14.** $A = \overline{A}_1\overline{A}_2A_3 + A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3$, $B = A_1 + A_2 + A_3$, $C = \overline{A}_1A_2A_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + A_1A_2\overline{A}_3$, $D = C + A_1A_2A_3$, $F = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$, $G = D$. **1.15.** $B = A_1A_3 + A_2A_3$. **1.16.** $B = (A_1 + A_2)A_4 + A_3A_5$.

15.2. Ответы к разделу 2

2.1. 5/6. **2.2.** 1/6; 1/3; 2/3. **2.3.** 1/4; 1/2; 1/9; 1/36. **2.4.** 0,008; 0,096; 0,384. **2.5.** 7/9. **2.6.** 1/18. **2.7.** 5/14. **2.8.** 1/6; 5/36; 1/2; 11/36. **2.9.** $1/5^5$; **2.10.** 1/36. **2.11.** $1/m^{n-1}$. **2.12.** $1/6^4$; $1-1/6^4$; $5!/6^4$. **2.13.** 1/38. **2.14.** 0,237. **2.15.** 0,441; 0,452; 0,893. **2.16.** $3{,}4\ 10^{-5}$; 0,075; 0,416. **2.17.** 0,514; 0,229; 0,203; 0,213. **2.18.** 0,0029; 0,138; 0,013. **2.19.** 0,00246; 0,0616; 0,443. **2.20.** 0,2; 0,667. **2.21.** 0,193; 0,140; 0,284. **2.22.** 0,028; 0,308; 0,147; 0,999. **2.23.** $2{,}7\ 10^{-5}$; $4{,}1\ 10^{-4}$; 0,0123. **2.24.** $n/(2n-1)$.

2.25. $C^m_{m_1}/C^m_{m_1+m_2}$; $1 - C^m_{m_2}/C^m_{m_1+m_2}$; $1 - (C^m_{m_2} + m_1 \cdot C^{m-1}_{m_2})/C^m_{m_1+m_2}$.

2.26. $m_1m_2m_3/C^3_{m_1+m_2+m_3}$. **2.27.** 1/14. **2.28.** 24/10!. **2.29.** 1/9!; 1/9; 1/12; 1/126; 1/945. **2.30.** 0,0167; 0,4; 0,05; 0,4. **2.31.** 1/120. **2.32.** 1/11. **2.33**. 2/7. **2.34.** 1/3. **2.35.** $2(n!)^2/(2n)!$; $(n+1)(n!)^2/(2n)!$. **2.36.** 0,838; 0,155. **2.37.** 0,001; 0,061. **2.38.** 1/216; 5/48; 5/234. **2.39.** 0,0013; 0,0154; 0,00013. **2.40.** 0,106; $8{,}4\ 10^{-12}$; 0,0106.

15.3. Ответы к разделу 3

3.1. $1 - l/l_0$. **3.2.** 1/3. **3.3.** 1/6. **3.4.** 0,5. **3.5** 1/3. **3.6.** 0,5. **3.7.** $(2-\sqrt{3})/2$. **3.8.** 0,6. **3.9.** 0,413. **3.10.** $(2 - d/a)d/a$. **3.11**. $(1-2r/a)^2$. **3.12.** 0,153. **3.13.** 0,5. **3.14.** $a(2-a)$. **3.15.** a^2; $a(1-\ln a)$. **3.16.** $\sqrt{2}/3$. **3.17.** 0,321. **3.18.** 2/3; 1/12. **3.19.** 5/9. **3.20.** 11/36. **3.21.** $2t/T - (t/T)^2$.

3.22. $1-0{,}5(1-t_1/T)^2-0{,}5(1-t_2/T)^2$. **3.23.** 0,121. **3.24.** $2b/(a\pi)$. **3.25.** 1/6; **3.26.** 0,25.

15.4. Ответы к разделу 4

4.1. 0,06554. **4.2.** 0,06. **4.3.** 1/216; 1/36. **4.4.** 0,405. **4.5.** 0,56; 0,38; 0,94. **4.6.** 0,612; 0,329; 0,388. **4.7.** 0,343; 0,441; 0,216. **4.8.** 0,096; 0,384; 0,992. **4.9.** 0,444. **4.10.** 0,372; **4.11.** 0,50; 0,75; 0,50. **4.12.** 0,349. **4.13.** $1-p^3$. **4.14.** $1-(1-p)^n$. **4.15.** $n\geq 7$. **4.16.** $n\geq \ln(1-p_1)/\ln(1-p)$. **4.17.** 0,00122. **4.18.** $1-q_1q_2q_3$. **4.19.** $1-(1-p_1p_2p_3)(1-p_4p_5p_6)$. **4.20.** $p_1p_4(1-q_1q_3)$. **4.21.** $(1-q_1q_2)(1-q_3q_4)$. **4.22.** $1-(1-p_1p_2)(q_4+p_4q_3q_5)$. **4.23.** $p_5(1-q_1q_2)(1-q_3q_4)+q_5(p_1p_3+p_2p_4-p_1p_2p_3p_4)$. **4.24.** 0,27. **4.25.** 0,16; 0,6; 0,24. **4.26.** $p_1+p_1q_1q_2$; q_1q_2; $q_1^2q_2$. **4.27.** 1/9. **4.28.** 0,1. **4.29.** 0,086; 0,095. **4.30.** 0,320. **4.31.** 0,745. **4.32.** 0,0714. **4.33.** 6,2 10^{-5}. **4.34.** 7,49 10^{-5}; $7{,}497\cdot 10^{-5}$; $5\cdot 10^{-5}$. **4.35.** 0,485; 0,371. **4.36.** 0,0002; 0,986. **4.37.** A и B, B и C - независимы, A и C - зависимы; 1/18. **4.38.** A и B; не являются. **4.39.** 2/3; 1/3. **4.40.** 0,87; 0,13. **Замечание.** В ответах $q_k=1-p_k$, $k=1,2,...$

15.5. Ответы к разделу 5

5.1. 0,9987. **5.2.** 0,987. **5.3.** 0,895. **5.4.** 0,067. **5.5.** 0,158. **5.6.** 0,1704. **5.7.** $1-npq_1q^{n-1}-q^n$, где $q=1-p$, $q_1=1-p_1$. **5.8.** 0,5. **5.9.** Одинаковы. **5.10.** 0,22. **5.11.** 0,56. **5.12.** 0,445. **5.13.** 0,3. **5.14.** 8 вертолетов в первый район; 0,74. **5.15.** 0,429; 0,571. **5.16.** 0,903.
5.17. $n_1p_1/(n_1p_1+n_2p_2+n_3p_3)$. **5.18.** 0,667. **5.19.** 0,286; 0,0714 **5.20.** 0,526. **5.21.** 9/47. **5.22.** 20/29. **5.23.** 3/13. **5.24.** 0,103; 0,277; 0,620.

15.6. Ответы к разделу 6

6.1. 5/32; 5/16; 5/16. **6.2.** 80/243. **6.3.** 0,060; 0,185. **6.4.** 0,00038; 0,8999. **6.5.** 0,0064; 0,0512; 0,99968; 0,942. **6.6.** 0,31; 0,48; 0,52; 0,62. **6.7.** 0,375. **6.8.** Выиграть одну партию из двух; выиграть не менее двух партий из четырех. **6.9.** 0,995. **6.10.** 0,391. **6.11.** 8/27. **6.12.** 0,456. **6.13.** Есть. **6.14.** 8. **6.15.** 5. **6.16.** 2 и 0,302; 0,591. **6.17.** 2 или 3 и 0,25; 0,302. **6.18.** 0,612; 0,329; 0,056; 0,003. **6.19.** 0,302; 0,440; 0,257. **6.20.** 0,581; 0,0696; 0,994. **6.21.** 0,0949. **6.22.** 2/9. **6.23.** 0,0385. **6.24.** 0,067. **6.25.** 0,053.

15.7. Ответы к разделу 7

7.1. 0,819; 0,999. **7.2.** 0,224; 0,423; 0,801; 0,950. **7.3.** 0,09; 0,143 **7.4.** 0,971. **7.5.** 0,394; 0,013; 0,998. **7.6.** 2; 0.251. **7.7.** 1; 0,3481. **7.8.** 53. **7.9.** 0,146; 0,908. **7.10.** 0,018; 0,092. 0,865; 0,554.

7.11. $(at)^m \exp(-at)/m!; \quad 1-\exp(-at)\sum_{k=0}^{m-1}(at)^k/k!$. **7.12.** 0,0456.

7.13. 0,052. **7.14.** 0,683. **7.15.** 0,0062. **7.16.** 0,023; 0,106. **7.17.** 0,106; 0,4995. **7.18.** 0,5; 0,0564; 0; 0,9822. **7.19.** 0,177; 0,692. **7.20.** 0,6212. **7.21.** 900. **7.22.** 900. **7.23.** 0,05. **7.24.** $792 \le k \le 828$. **7.25.** $4 \le k \le 22$.

15.8. Ответы к разделу 8

8.1.

X	0	1	2
P	1/4	1/2	1/4

8.2.

X	0	1	2	3
P	0,729	0,243	0,027	0,001

8.3.

X	0	1	2	3
P	0,24	0,46	0,26	0,04

$$F(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x<0, \\ 0{,}24 \text{ при } 0<x<1 \\ 0{,}70 \text{ при } 1<x<2 \\ 0{,}96 \text{ при } 2<x<3 \\ 1 \text{ при } x>3 \end{cases}$$

8.4.

X	0	1	2	3
P	0	1/5	3/5	1/5

8.5.

X	1	2	…	k	...
P	0,2	0,16		$0{,}2\cdot 0{,}8^{k-1}$	

8.6.

X	0	1	2	3	4	5
P	0,3276	0,4096	0,2048	0,0512	0,0064	0,00032

P(X=0*)*= 0,32768; *P(X*<3*)*= 0,9421; *P(X*≥4*)*= 0,0067. **8.7.** 0,25; 0,583. **8.8.** 0,333; 0,5; 0,667. **8.9.** 0,25; 0,211. **8.10.** *F(x)*=0 при $x \le 1$, $F(x)=0{,}5(x^2-x)$ при $1<x\le 2$, *F(x)*=1 при *x*>2. **8.11.** *F(x)*=0 при $x<\pi/6$, $F(x)=-\cos 3x$ при $\pi/6 \le x \le \pi/3$, $F(x)=1$ при $x>\pi/3$. **8.12.** 0,2327; 0,6321. **8.13.** $c=0{,}5/\pi$; 0,5. **8.14.** *a*>0; *b*=0,5; $c=1/\pi$; $f(x)=a/(\pi(x^2+a^2))$; $d_X=h_X=0$; $t_{0,75}=a$. **8.15.** 0,297. **8.16.** $d_X=10$; $m_X=6$. **8.17.** $x_3=21$; $p_3=0{,}2$. **8.18.** $p_1=0{,}2$; $p_2=0{,}3$; $p_3=0{,}5$. **8.19.** 0,45. **8.20.** 0,6. **8.21.** *M*[*X*]= 0,7. *D*[*X*] = 0,41; $\sigma_x = 0{,}64$. **8.22.** *D*[*X*] =8,545; $\sigma_x = 2{,}923$. **8.23.** $D[X] = \sigma_x = 1$.

8.24.

X	1	2
P	0,6	0,4

8.25.

X	1	3
P	0,2	0,8

8.26.

X	1	2	3
P	0,3	0,2	0,5

8.27. $m_X=1{,}1$; $D[X]=0{,}45$; $\sigma_x=0{,}67$. **8.28.** $d_X=1$; $m_X=6/5$; $D[X]=64/25$. **8.29.** $a=2/(\pi-2)$; $m_x=0{,}5(\pi^2-8)/(\pi-2)$. **8.30.** d_X - отсутствует; $h_X=0$; $m_X=0$; $D[X]=0{,}5$; **8.31.** $a=1/25$; $D[X]=25/18$; $\sigma_x=5\sqrt{2}/6$;
8.32. $d_x=h_x=m_x=0$; $D[X]=a^2/6$; $A[X]=0$; $E[X]=-0{,}6$; $t_{0,82}=0{,}4a$. **8.33.** $F(x)=0$ при $x\le -a$; $F(x)=0{,}5+\frac{1}{\pi}\arcsin(x/a)$ при $-a<x<a$; $F(x)=1$ при $x>a$; d_X - не существует; $h_X=0$; $t_{0,75}=a\sqrt{2}/2$; $m_X=0$; $D[X]=a^2/2$.
8.34. $F(x)=0$ при $x<0$; $F(x)=1-\exp(-x^2/(2\sigma^2))$ при $x\ge 0$; $d_X=\sigma$; $h_X=\sigma^2\sqrt{2\ln 2}$; $t_{0,8}=\sigma\sqrt{2\ln 5}$; $m_X=\sigma\sqrt{\pi/2}$; $D[X]=\sigma^2(2-\pi/2)$.

15.9. Ответы к разделу 9

9.1. $F(x)=0$ при $x<a$, $F(x)=(x-a)/(b-a)$ при $a\le x\le b$, $F(x)=1$ при $x>b$. **9.2.** 0,6. **9.3.** 2/3. **9.4.** 0,6. **9.5.** 0,4; 0,5. **9.6.** 0,25.
9.7. $f(x)=0{,}25/\sqrt{2\pi}\exp(-(x-3)^2/32)$. **9.8.** $f(x)=0{,}5/\sqrt{2\pi}\exp(-(x-5)^2/8)$; $F(x)=0{,}5+\Phi((x\text{-}5)/2)$; $t_{0,7}=0{,}525$; $t_{0,99}=2{,}33$. **9.9.** 0,136. **9.10.** 0,819. **9.11.** 0,866. **9.12.** 0,9876. **9.13.** 0,2. **9.14.** (-5; 25). **9.15**. (9,7; 10,3).
9.16. 0,054; 0,339. **9.17.** Нормальный; $\gamma=e^2/\sqrt{\pi}$; $m_X=1$; $D[X]=0{,}5$; $p=0{,}6514$. **9.18.** $f(x)=5\exp(-5x)$ при $x\ge 0$, $f(x)=0$ при $x<0$; $t_{0,3}=0{,}071$; $t_{0,85}=0{,}379$. **9.19.** 0,038. **9.20.** 0,134. **9.21.** 0,449. **9.22.** 0,394; 0,606. **9.23.** а) 0,03; б) 0,66; в) 0,31; г) 0,34. **9.24.** 0,374. **9.25.** 0,489.

15.10. Ответы к разделу 10

10.1.

Y	7	13	21
P	0,2	0,1	0,7

10.2

Y	0	72
P	0,7	0,3

10.3.

Y	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
P	0,25	0,20	0,15	0,25	0,15

10.4. $g(y)=1/(3\pi(\sqrt{y^2}+\sqrt{y^4}))$ при $y\neq 0$.

10.5. $g(y)=0{,}25/y^2$ при $y\in(0{,}2;\,1)$, $g(y)=0$ при $y\ (0{,}2;\,1)$.

10.6. $g(y)=(9/y^2)\cdot\exp(3(2+3/y))$ при $y\in(-3/2;0)$; $g(y)=0$ при $y\notin(-3/2;0)$. **10.7.** $g(y)=0{,}5e^y$ при $y\in(0;\,\ln 3)$, $g(y)=0$ при $y\notin(0;\,\ln 3)$.

10.8. $g(y)=1/(\pi\sqrt{1-y^2})$ при $y\in(-1;\,1)$, $g(y)=0$ при $y\notin(-1;\,1)$.

10.9. $g(y)=(3/y)\cdot\ln^2 y$ при $y\in(1;\,e)$, $g(y)=0$ при $y\notin(1;\,e)$.

10.10. $g(y)=0{,}25/\sqrt{2\pi}\cdot\exp(-(x-7)^2/32)$.

10.11. $g(y)=\dfrac{1}{\pi y(1+\ln^2 y)}$ при $y>0$, $g(y)=0$ при $y\leq 0$.

10.12. $g(y)=1/\sqrt{2\pi y}\cdot\exp(-y/2)$.

10.13. $g(y)=\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}$ при $y\in(-1;\,1)$, $g(y)=0$ при $y\notin(-1;\,1)$.

10.14. $g(y)=0{,}5\lambda/\sqrt{y}\cdot\exp(-\lambda/\sqrt{y})$ при $y>0$, $g(y)=0$ при $y\leq 0$.

10.15. $m_Y=-0{,}4$; $D[Y]=32{,}04$. **10.16.** $m_Y=0{,}9$; $D[Y]=1{,}89$.

10.17. $m_Y=\pi^2/2-2$; $D[Y]=\pi^2/4-5\pi^2+8$. **10.18.** $m_Y=0{,}402$; $D[Y]=0{,}038$.

10.19. $m_Y=5/4$; $D[Y]=5/48$.

15.11. Ответы к разделу 11

11.1.

X	26	30	41	50
P	0,14	0,42	0,19	0,25

Y	2,3	2,7
P	0,29	0,71

12.2.

X / Y	-1	3	5
2	0,30	0,18	0,12
4	0,20	0,12	0,08

11.3. Значения функции $F(x,y)$

X / Y	$x\leq 0$	$0<x\leq 1$	$x>1$
$y\leq 0$	0	0	0
$0<y\leq 1$	0	0	p
$y>1$	0	q	1

11.4. $f(x,y) = 8e^{-4x-2y}$ при $x > 0, y > 0$; $f(x,y) = 0$ при $x < 0$ $y < 0$.

11.5. $F(x,y) = \left(0{,}5 + \frac{1}{\pi} arctg(x/4)\right)\left(0{,}5 + \frac{1}{\pi} arctg(y/5)\right).$

11.6. $C = 3/(\pi R^3)$, $p = 1/2$. **11.7.** $12/\pi^2$.

11.8. а) $f(x,y) = ab\ e^{-(ax+by)}$ при $x \geq 0$, $y \geq 0$; $f(x,y) = 0$ при $x<0$ или $y<0$; б) $F(x,y) = (1-e^{-ax})(1-e^{-by})$ при $x>0, y>0$; $F(x,y)=0$ при $x<0$ или $y<0$.

11.9. а) $a = 1/\pi^2$; б) X и Y независимы; $f_1(x) = 1/(\pi(1+x^2))$, $f_2(y)=1/(\pi(1+y^2))$; в) $P = 1/4$.

11.10. $f(x,y) = (1/\sqrt{\pi})\exp(-x^2)$ при $y \in (0, 1)$, $f(x,y) = 0$ при $y \notin (0; 1)$.

11.11. $f(x,y) = ax\ e^{-(a+y)x}$ при $x \geq 0, y \geq 0$; $f(x,y) = 0$ при $x<0$ или $y<0$; $f_2(y) = a/(a+y)^2$ при $y \geq 0$, $f_2(y) = 0$ при $y < 0$; $f_1(x/y) = x(a+x)^2 e^{-(a+y)x}$ при $x \geq 0$, $f_1(x/y) = 0$ при $x < 0$.

11.12. $K_{XY} = 0{,}16$, $r_{XY} = 0{,}27$. 11.13. $K_{XY} = 0{,}66$; $r_{XY} = 0{,}36$.

15.12. Ответы к разделу 12

12.1. а)

x	15	16	17	18	19	>19
F(x)	0	1/16	5/16	5/8	7/8	1

б)

x	2	3	4	5	6	7	8	>8
F(x)	0	$\frac{1}{22}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{7}{11}$	$\frac{19}{22}$	$\frac{21}{22}$	1

12.2. а)

Интервалы	**10-20**	**20-30**	**30-40**	**40-50**	**50-60**	**60-70**	**70-80**
f	$\frac{1}{500}$	$\frac{1}{250}$	$\frac{7}{500}$	$\frac{9}{250}$	$\frac{3}{125}$	$\frac{2}{125}$	$\frac{1}{125}$

б)

Интервалы	5-7	7-9	9-11	11-13	13-15	15-17
f	2/49	7/98	10/49	13/98	3/98	1/49

12.3. $n=50$, $k=7$,

Интервалы	14-23	23-32	32-41	41-50	50-59	59-68	68-77
f	0,004	0,007	0,013	0,038	0,022	0,020	0,007

12.4.

x	9,4	11,4	13,4	15,4	17,4	19,4	>19,4
F(x)	0	1/22	7/44	4/11	3/4	43/44	1

15.13. Ответы к разделу 13

13.1. $\tilde{m}_X = 4{,}14$, $\tilde{D}[X] = 6{,}81$, $\tilde{d}_X = 5$, $\tilde{h}_X = 4$.

13.2. $\tilde{m}_x = 3{,}5$, $\tilde{D}[X] = 4{,}06$, $\tilde{d}_x = \tilde{h}_x = 3$.

13.3. $\tilde{m}_x = 2{,}39$, $\tilde{D}[X] = 0{,}49$, $\tilde{d}_x = 3{,}1$, $\tilde{h}_x = 2{,}5$.

13.4. $\tilde{m}_x = 10{,}41$, $\tilde{D}[X] = 5{,}27$. **13.5.** $\tilde{m}_x = 24{,}07$, $\tilde{D}[X] = 19{,}71$.

13.6. $\tilde{m}_x = 6{,}21$, $\tilde{D}[X] = 6{,}51$. **13.8.** $\tilde{A}_x = -0{,}39$, $\tilde{E}_x = -0{,}30$.

13.9. $\tilde{A}_x = 0{,}89$, $\tilde{E}_x = 7{,}55$.

15.14. Ответы к разделу 14

14.1. Гипотеза принимается. **14.2.** Гипотеза отвергается.
14.3. Гипотеза принимается. **14.4.** Гипотеза принимается.
14.5. Гипотеза принимается. **14.6.** Гипотеза принимается.
14.7. Гипотеза отвергается. **14.8.** Гипотеза отвергается.

14.9. Гипотеза отвергается. **14.10.** Гипотеза отвергается.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Таблица значений функции $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3983	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046

Продолжение прил. 1

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Таблица значений функции Ф(x)

x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)
0,00	0,0000	0,17	0,0675	0,34	0,1331	0,51	0,1950
0,01	0,0040	0,18	0,0714	0,35	0,1368	0,52	0,1985
0,02	0,0080	0,19	0,0753	0,36	0,1406	0,53	0,2019
0,03	0,0120	0,20	0,0793	0,37	0,1443	0,54	0,2054
0,04	0,0160	0,21	0,0832	0,38	0,1480	0,55	0,2088
0,05	0,0199	0,22	0,0871	0,39	0,1517	0,56	0,2123
0,06	0,0239	0,23	0,0910	0,40	0,1554	0.57	0,2157
0,07	0,0279	0,24	0,0948	0,41	0,1591	0,58	0,2190
0,08	0,0319	0,25	0,0987	0,42	0,1628	0,59	0,2224
0,09	0,0359	0,26	0,1026	0,43	0,1950	0,60	0,2257
0,10	0,0398	0,27	0,1064	0,44	0,1985	0,61	0,2291
0,11	0,0438	0,28	0,1103	0,45	0,2019	0,62	0,2324
0,12	0,0478	0,29	0,1141	0,46	0,2054	0,63	0,2357
0,13	0,0517	0,30	0,1179	0,47	0,2088	0,64	0,2389
0,14	0,0557	0,31	0,1217	0,48	0,2123	0,65	0,2422
0,15	0,0596	0,32	0,1255	0,49	0,2157	0,66	0,2454
0,16	0,0636	0,33	0,1293	0,50	0,2190	0,67	0,2486

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,68	0,2517	1,05	0,3531	1,42	0,4222	1,79	0,4633
0,69	0,2549	1,06	0,3554	1,43	0,4236	1,80	0,4641
0,70	0,2580	1,07	0,3577	1,44	0,4251	1,81	0,4649
0,71	0,2611	1,08	0,3599	1,45	0,4265	1,82	0,4656
0,72	0,2642	1,09	0,3621	1,46	0,4279	1,83	0,4664
0,73	0,2673	1,10	0,3643	1,47	0,4292	1,84	0,4671
0,74	0,2703	1,11	0,3665	1,48	0,4306	1,85	0,4678
0,75	0,2734	1,12	0,3686	1,49	0,4319	1,86	0,4686
0,76	0,2764	1,13	0,3708	1,50	0,4332	1,87	0,4693
0,77	0,2794	1,14	0,3729	1,51	0,4345	1,88	0,4699
0,78	0,2823	1,15	0,3749	1,52	0,4357	1,89	0,4706
0,79	0,2852	1,16	0,3770	1,53	0,4370	1,90	0,4713
0,80	0,2881	1,17	0,3790	1,54	0,4382	1,91	0,4719
0,81	0,2910	0,18	0,3810	1,55	0,4394	1,92	0,4726
0,82	0,2939	1,19	0,3830	1,56	0,4406	1,93	0,4732
0,83	0,2967	1,20	0,3849	1,57	0,4418	1,94	0,4738
0,84	0,2995	1,21	0,3869	1,58	0,4429	1,95	0,4744
0,85	0,3023	1,22	0,3883	1,59	0,4441	1,96	0,4750
0,86	0,3051	1,23	0,3907	1,60	0,4452	1,97	0,4756
0,87	0,3078	1,24	0,3925	1,61	0,4463	1,98	0,4761
0,88	0,3106	1,25	0,3944	1,62	0,4474	1,99	0,4767
0,89	0,3133	1,26	0,3962	1,63	0,4484	2,00	0,4772
0,90	0,3159	1,27	0,3980	1,64	0,4495	2,02	0,4783
0,91	0,3186	1,28	0,3997	1,65	0,4505	2,04	0,4793
0,92	0,3212	1,29	0,4015	1,66	0,4515	2,06	0,4803
0,93	0,3238	1,30	0,4032	1,67	0,4525	2,08	0,4812
0,94	0,3264	1,31	0,4049	1,68	0,4535	2,10	0,4821
0,95	0,3289	1,32	0,4066	1,69	0,4545	2,12	0,4830
0,96	0,3315	1,33	0,4082	1,70	0,4554	2,14	0,4838
0,97	0,3340	1,34	0,4099	1,71	0,4564	2,16	0,4846
0,98	0,3365	1,35	0,4115	1,72	0,4573	2,18	0,4854
0,99	0,3389	1,36	0,4131	1,73	0,4582	2,20	0,4861
1,00	0,3413	1,37	0,4147	1,74	0,4591	2,22	0,4868
1,01	0,3438	1,38	0,4162	1,75	0,4599	2,24	0,4875
1,02	0,3461	1,39	0,4177	1,76	0,4608	2,26	0,4881
1,03	0,3485	1,40	0,4192	1,77	0,4616	2,28	0,4887
1,04	0,3508	1,41	0,4207	1,78	0,4625	2,30	0,4893

Продолжение прил. 2

x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)
2,32	0,4898	2,54	0,4945	2,76	0,4971	2,98	0,4986
2,34	0,4904	2,56	0,4948	2,78	0,4973	3,00	0,49865
2,36	0,4909	2,58	0,4951	2,80	0,4974	3,20	0,49931
2,38	0,4913	2,60	0,4953	2,82	0,4976	3,40	0,49966
2,40	0,4918	2,62	0,4956	2,84	0,4977	3,60	0,499841
2,42	0,4922	2,64	0,4959	2,86	0,4979	3,80	0,499928
2,44	0,4927	2,66	0,4961	2,88	0,4980	4,00	0,499968
2,46	0,4931	2,68	0,4963	2,90	0,4981	4,50	0,499997
2,48	0,4934	2,70	0,4965	2,92	0,4982	5,00	0,499997
2,50	0,4938	2,72	0,4967	2,94	0,4984		
2,52	0,4941	2,74	0,4969	2,96	0,4985		

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Критические точки распределения хи-квадрат

Число степеней свободы	Уровень значимости			
	0,01	0,025	0,05	0,95
1	6,6	5,0	3,8	0,0039
2	9,2	7,4	6,0	0,103
3	11,3	9,4	7,8	0,352
4	13,3	11,1	9,5	0,711
5	15,1	12,8	11,1	1,15
6	16,8	14,4	12,6	1,64
7	18,5	16,0	14,1	2,17
8	20,1	17,5	15,5	2,73
9	21,7	19,0	16,9	3,33
10	23,2	20,5	18,3	3,94

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сборник задач по математике для втузов. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для втузов /Под ред.
А. В. Ефимова.- М.: Наука, 1990.- 428 с.

2. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятности и математической статистике: Учеб. пособие для студентов втузов М.: Высшая школа, 1979.- 400 с.

3. Лозинский Н. С. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. пособие для студентов экономических специальностей вузов. - М.: Статистика, 1975.- 200 с.

4. Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1973.- 386 с.

5. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистики м теории случайных функций. / Под ред. А. А. Свешникова.- М.: Наука, 1970.- 656 с.

6. Емельянов Г. В., Скитович В. П. Задачник по теории вероятностей и математической статистике Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1967.- 332 с.