ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

1. Векторные пространства и линейные операторы

Определение 1. Множество V называется *векторным пространством* (над полем действительных чисел $\mathbb{R}$), если его элементы можно складывать между собой и умножать на действительные числа, причём эти операции обладают следующими свойствами (которые называются *аксиомами векторного пространства*):

1) сложение *коммутативно*: $u+v=v+u$ для любых u, $v \in V$;
2) сложение *ассоциативно*: $u+(v+w)=(u+v)+w$ для любых u, v и $w \in V$;
3) в V существует *нулевой элемент* 0 (или *нуль*): $0+u=u+0=u$ для любого $u \in V$;
4) для каждого $u \in V$ существует *противоположный* ему элемент $-u$: $u+(-u)=(-u)+u=0$;
5) умножение *ассоциативно*: $\lambda(\mu u)=(\lambda\mu)u$ для любых чисел λ, $\mu \in \mathbb{R}$ и элемента $u \in V$;
6) умножение *дистрибутивно* относительно сложения: $\lambda(u+v)=\lambda u+\lambda v$ для любого числа $\lambda \in \mathbb{R}$ и элементов u, $v \in V$;
7) умножение на единицу *тождественно*: $1 \cdot u = u$ для любого элемента $u \in V$.

Элементы векторного пространства называются *векторами*.

Пример 1. Само множество $\mathbb{R}$ действительных чисел является векторным пространством. Множество, состоящее из единственного элемента — нуля, — также является векторным пространством. Оно обозначается через 0 и называется *тривиальным*.

Пример 2. Рассмотрим множество

$$\mathbb{R}^n = \{\, (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R} \,\}$$

и положим

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) + (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_n) = (\lambda_1 + \lambda'_1, \ldots, \lambda_n + \lambda'_n),$$
$$\lambda(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = (\lambda\lambda_1, \ldots, \lambda\lambda_n).$$

Тогда $\mathbb{R}^n$ превращается в векторное пространство, которое называется *n-мерным арифметическим пространством*.

Определение 2. Подмножество $V' \subset V$ векторного пространства V называется *подпространством*, если

1) $u+v \in V'$ для любых u, $v \in V'$,
2) $\lambda u \in V'$ для любого числа $\lambda \in \mathbb{R}$ и вектора $u \in V'$,

то есть если V' *замкнуто* относительно сложения и умножения на числа.

Предложение 1. *Всякое подпространство векторного пространства само является векторным пространством.*

Пример 3. Пусть $v \in V$. Тогда множество $\{\, \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R} \,\}$ является подпространством в V.

Определение 3. Отображение $A\colon V \to W$ двух векторных пространств V и W называется *линейным оператором* (*действующим* из V в W), если

1) $A(u+v)=A(u)+A(v)$ для любых векторов u, $v \in V$;
2) $A(\lambda u)=\lambda A(u)$ для любого числа $\lambda \in \mathbb{R}$ и вектора $u \in V$.

Пример 4. Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда отображение $A_\lambda\colon V \to V$, действующее по правилу

$$A_\lambda(v) = \lambda v, \qquad v \in V,$$

является линейным оператором, который называется *оператором умножения* на число λ.

Определение 4. Пусть $A\colon V \to W$ — линейный оператор. Множество

$$\ker A = \{\, v \in V \mid A(v) = 0 \,\} \subset V$$

называется *ядром* оператора A. Множество

$$\operatorname{im} A = \{\, w \in W \mid \exists v \in V\colon w = A(v) \,\} \subset W$$

называется *образом* оператора A.

Предложение 2. *Ядро и образ любого линейного оператора являются подпространствами пространств V и W соответственно.*

Определение 5. Линейный оператор $A\colon V \to W$ называется *изоморфизмом*, если $\ker A = 0$, а $\operatorname{im} A = W$. Если A — изоморфизм, то пространства V и W называются *изоморфными*.

Пример 5. Пусть A_λ оператор умножения на λ (см. пример 4). Тогда

$$\ker A_\lambda = \begin{cases} 0, & \text{если } \lambda \neq 0, \\ V, & \text{если } \lambda = 0, \end{cases}$$

и

$$\operatorname{im} A_\lambda = \begin{cases} V, & \text{если } \lambda \neq 0, \\ 0, & \text{если } \lambda = 0. \end{cases}$$

Определение 6. Пусть U, V и W — векторные пространства, а $A\colon U \to V$, $B\colon V \to W$ — линейные операторы. Отображение $B \circ A\colon U \to W$, действующее по правилу $(B \circ A)(u) = B(A(u))$,

$$(B \circ A)(u) = B(A(u)), \qquad u \in U,$$

называется *композицией* (или *произведением*) операторов A и B.

Предложение 3. *Композиция линейных операторов является линейным оператором.*

Определение 7. Пусть A, $B\colon V \to W$ — линейные операторы. Отображение $A + B\colon V \to W$, действующее по правилу

$$(A + B)(v) = A(v) + B(v), \qquad v \in V,$$

называется *суммой* операторов A и B. Если λ — число, то отображение

$$(\lambda A)(v) = \lambda A(v), \qquad v \in V,$$

называется *произведение* оператора на число.

Предложение 4. *Если A и B — линейные операторы, а λ — действительное число, то $A + B$ и λA — также линейные операторы.*

Пример 6. Если λ и μ — действительные числа, то выполняются равенства

$$A_\lambda + A_\mu = A_{\lambda+\mu}, \quad A_\lambda \circ A_\mu = A_{\lambda\mu}.$$

Предложение 5. *Операции над линейными операторами, введённые в определениях 6 и 7, обладают следующими свойствами*:

$$\begin{aligned}
&A + B = B + A, \\
&A + (B + C) = (A + B) + C, \\
&0 + A = A + 0 = A, \\
&-A = (-1) \cdot A, \\
&\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A,
\end{aligned}$$

$$\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B,$$
$$1 \cdot A = A.$$

Кроме того, имеют место следующие тождества:

$$A \circ (B \circ C) = (A \circ B) \circ C,$$
$$A \circ (B + C) = A \circ B + A \circ C,$$
$$(A+B) \circ C = A \circ C + B \circ C.$$

Следствие 1. *Множество линейных операторов, действующих из векторного пространства V векторное пространство W, само образует векторное пространство, которое обозначается через* $\mathrm{Lin}(V, W)$.

Определение 8. Если A, $B \in \mathrm{Lin}(V, V)$, то оператор

$$[A, B] = A \circ B - B \circ A$$

называется *коммутатором* операторов A и B.

Определение 9. Оператор $E = E_V$, действующий из пространства V в пространство V по правилу

$$E(v) = v, \qquad v \in V,$$

называется тождественным. Оператор $A \in \mathrm{Lin}(V, V)$ называется *обратимым*, если существует такой оператор $A^{-1} \in \mathrm{Lin}(V, V)$, что

$$A \circ A^{-1} = A^{-1} \circ A = E.$$

При этом оператор A^{-1} называется *обратным* к оператору A.

Предложение 6. *Для любого линейного оператора $A \colon V \to W$ выполняются равенства*

$$E_W \circ A = A \circ E_V = A.$$

Определение 10. Пусть $A \colon V \to V$ — линейный оператор. Число $\lambda \in \mathbb{R}$ называется *собственным значением* этого оператора, если существует такой вектор $v \neq 0$, что

$$A(v) = \lambda v. \tag{1}$$

При этом v называется *собственным вектором*, отвечающим собственному значению λ.

Предложение 7. *Множество собственных векторов, отвечающих некоторому λ, образует линейное подпространство в V.*

Это подпространство называется *собственным подпространством* и, как правило, обозначается через V_λ.

2. Базисы и размерность

Определение 11. Пусть V — векторное пространство.

1) *Линейной комбинацией* векторов $v_1, \ldots, v_r \in V$ называется вектор

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_r v_r, \qquad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}.$$

2) Векторы $v_1, \ldots, v_r$ называются *линейно зависимыми*, если

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_r v_r = 0,$$

где хотя бы одно из чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ не равно нулю. В противном случае векторы называются *линейно независимыми.*

3) Система векторов $e_1, \dots, e_n$ называется (конечным) *базисом* пространства V, если любой вектор $v \in V$ является их линейной комбинацией, причём представление
$$v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n$$
единственно. В этом случае пространство называется *конечномерным*. Числа λ_i называются *координатами* вектора в данном базисе.

Теорема 1. *Если $e_1, \dots, e_n$ и $e'_1, \dots, e'_{n'}$ — базисы пространства V, то $n = n'$.*

Таким образом, если пространство конечномерно, то количество векторов во всех базисах этого пространства одинаково.

Определение 12. Количество векторов в базисе конечномерного пространства V называется *размерностью* этого пространства и обозначается через $\dim V$.

Пример 7. Векторы
$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= (1, 0, \dots, 0),\\ \varepsilon_2 &= (0, 1, \dots, 0),\\ &\dots\\ \varepsilon_n &= (0, 0, \dots, 1)\end{aligned}$$
образуют базис пространства $\mathbb{R}^n$. Значит, оно n-мерно.

Предложение 8. *Если $V' \subset V$ — подпространство, то $\dim V' \leqslant \dim V$ и равенство достигается в том и только том случае, когда $V' = V$.*

Предложение 9. *Пусть V и W — конечномерные векторные пространства и $e_1, \dots, e_n$ — базис пространства V. Тогда для любого набора векторов $v_1, \dots, v_n \in W$ существует и единственным образом определён такой линейный оператор $A\colon V \to W$, что*
$$A(e_i) = v_i, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Следствие 2. *Если $\dim V = n$, $\dim W = m$, то $\dim \operatorname{Lin}(V, W) = mn$.*

Определение 13. Пусть $v_1, \dots, v_r \in V$. Множество
$$\mathcal{L}(v_1, \dots, v_r) = \{\, v = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R} \,\},$$
образованное всевозможными линейными комбинациями векторов $v_1, \dots, v_r$, называется их *линейной оболочкой*.

Предложение 10. *Линейная оболочка является подпространством.*

Определение 14. *Рангом* системы векторов $v_1, \dots, v_r \in V$ называется размерность её линейной оболочки. Ранг системы обозначается через $\operatorname{rank}(v_1, \dots, v_r)$.

Таким образом, $\operatorname{rank}(v_1, \dots, v_r) = \dim \mathcal{L}(v_1, \dots, v_r)$.

Следствие 3. *Если $v_1, \dots, v_r \in V$, то $\operatorname{rank}(v_1, \dots, v_r) \leqslant \dim V$.*

3. Матрицы и определители

Пусть V — конечномерное векторное пространство и $e_1, \dots, e_n$ — его базис. Рассмотрим вектор $v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n \in V$ и сопоставим ему элемент $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ n-мерного арифметического пространства.

Предложение 11. *Построенное отображение является изоморфизмом между V и $\mathbb{R}^n$.*

Следствие 4. *Все векторные пространства размерности n попарно между собой изоморфны и изоморфны n-мерному арифметическому пространству.*

Пусть V и W — векторные пространства размерности n и m соответственно и $e_1, \dots, e_n \in V$, $f_1, \dots, f_n \in W$ — их базисы. Если $A\colon V \to W$ — линейный оператор, то каждый вектор $A(e_i)$ представляется в виде

$$A(e_i) = a_{i1} f_1 + a_{i2} f_2 + \dots + a_{in} f_n, \qquad i = 1, \dots, n, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, m. \tag{2}$$

Определение 15. Таблица

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

состоящая из n столбцов и m строк, называется *матрицей* (размера $n \times m$) оператора A, записанной в базисах $e_1, \dots, e_n$ и $f_1, \dots, f_n$. Если $m = n$, то матрица называется *квадратной*.

Пример 8. Оператору A_λ из примера 4 соответствует матрица

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix},$$

называемая *скалярной*. Если $\lambda = 1$, то эта матрица называется *единичной* и обозначается через I. Заметим также, что матрицы вида

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

называются *диагональными*.

Предложение 12. *При выбранных базисах пространств V и W каждый линейный оператор однозначно определяется своей матрицей. При этом, если $v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$, то*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix},$$

где

$$\mu_i = a_{i1}\lambda_1 + a_{i2}\lambda_2 + \dots + a_{in}\lambda_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\lambda_j, \qquad i = 1, \dots, m. \tag{4}$$

Вектор $(\mu_1, \dots, \mu_m) \in \mathbb{R}^m$, вычисляемый по формуле (4), называется результатом *действия* матрицы M на вектор $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$.

Предложение 13. *Пусть A, $B\colon V \to W$ — линейные операторы и $M = (a_{ij})$, $N = (b_{ij})$ — матрицы, соответствующие этим операторам в некоторых выбранных базисах. Тогда их сумме соответствует матрица*

$$M + N = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn}, \end{pmatrix}$$

которая называется суммой *матриц* M *и* N, *а оператору* λA — *матрица*

$$\lambda M = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & a\lambda_{mn} \end{pmatrix}$$

— *результат* умножения *матрицы на число* λ.

Таким образом, множество матриц образует векторное пространство, обычно обозначаемое через $\mathrm{Mat}(n, m)$. Его размерность равна nm.

Сопоставим каждой матрице вида (3) матрицу

$$M^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Матрица M^* называется *транспонированной* к матрице M и имеет размер $m \times n$. Таким образом, операция транспонирования матриц является отображением из пространства $\mathrm{Mat}(n, m)$ в пространство $\mathrm{Mat}(m, n)$.

Предложение 14. *Отображение транспонирования* $*\colon \mathrm{Mat}(n, m) \to \mathrm{Mat}(m, n)$ *является линейным, причём* $* \circ * = \mathrm{id}$, *т.е.*

$$(M^*)^* = M$$

для любой матрицы M.

Если M — квадратная матрица и $M^* = M$, то эта матрица называется *симметрической*. Таким образом, симметрические матрицы характеризуются свойством

$$a_{ij} = a_{ji}$$

для любых $i, j = 1, \dots, n$.

Предложение 15. *Пусть* $A\colon U \to V$, $B\colon V \to W$ — *линейные операторы, где* U, V *и* W — *векторные пространства размерностей* n, m *и* k *соответственно. Тогда, если этим операторам соответствуют матрицы* $M = (a_{il})$ *и* $N = (b_{lj})$, *то их композиции соответствует матрица* $M \cdot N = (c_{ij})$ *размерности* $n \times k$, *где*

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{im}b_{mj} = \sum_{s=1}^{m} a_{is}b_{sj}, \qquad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, k.$$

Матрица $M \cdot N$ называется *произведением* (или *композицией*) матриц M и N.

Преобразование матриц при замене базисов. Пусть $A\colon V \to W$ — некоторый линейный оператор и $M = (a_{ij})$ — его матрица, записанная в базисах $e_1, \dots, e_n$ и $f_1, \dots, f_m$ пространств V и W соответственно. Пусть $e'_1, \dots, e'_n$ и $f'_1, \dots, f'_m$ — другие базисы этих пространств. Тогда в этих базисах оператор A будет представлен матрицей $M' = (a'_{ij})$. С другой стороны, векторы старых базисов выражаются через новые:

$$e_i = b_{i1}e'_1 + \dots + b_{in}e'_n, \qquad i = 1, \dots, n,$$
$$f_j = c_{j1}f'_1 + \dots + c_{jm}f'_m, \qquad j = 1, \dots, m.$$

Пусть $F = (b_{il})$ и $G = (c_{lj})$ — соответствующие матрицы (размерности $n \times n$ и $m \times m$). Тогда

$$F \cdot M' = M \cdot G. \tag{6}$$

Если оператор A обратим и ему соответствует матрица M, то матрица, соответствующая оператору A^{-1}, называется *обратной* к матрице M и обозначается через M^{-1}. Таким образом,

$$M \cdot M^{-1} = M^{-1} \cdot M = I. \tag{7}$$

Наша задача — научиться определять, когда матрица обратима и вычислять обратную матрицу, если она существует.

Замечание 1. Матрицы перехода от векторов одного базиса к другому всегда обратимы. Поэтому равенство (6) можно переписать в виде

$$M' = F^{-1} \cdot M \cdot G.$$

В частности, если линейный оператор действует из пространства V то же самое пространство, то

$$M' = F^{-1} \cdot M \cdot F. \tag{8}$$

Подстановки и перестановки.

Определение 16. *Подстановкой* длины n называется взаимно-однозначное отображение множества первых n натуральных чисел в себя. Множество перестановок длины n обозначается через Σ_n. Композиция таких отображений называется *композицией* подстановок.

Подстановку $\sigma \in \Sigma_n$ принято представлять таблицей

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k & \dots & i_n \end{pmatrix}, \qquad 1 \leqslant i_k \leqslant n, \quad i_\alpha \neq i_\beta,$$

которая означает, что $\sigma(1) = i_1$, $\sigma(2) = i_2, \dots, \sigma(n) = i_n$. Нижняя строчка этой таблицы называется *перестановкой*. Количество подстановок (и перестановок) длины n равно $n!$.

Пример 9. Существует шесть разных подстановок длины три:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \tag{9}$$
$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Простейшими подстановками являются *транспозиции* — подстановки, которые переставляют между собой два элемента, а остальные оставляют на месте:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & j & \dots & i & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Например, среди подстановок (9) транспозициями являются σ_2, σ_4 и σ_5.

Предложение 16. *Любую подстановку можно представить в виде композиции транспозиций. При любом таком разложении количество участвующих в нём транспозиций либо всегда чётно, либо нечётно.*

Определение 17. Подстановка (и соответствующая перестановка) называется *чётной*, если её можно разложить в композицию чётного числа транспозиций. В противном случае она называется *нечётной*. Чётность подстановки σ обозначается через $|\sigma|$.

Так в примере 9 подстановки σ_1, σ_3 и σ_6 — чётные, а σ_2, σ_4 и σ_5 — нечётные.

Определители и их свойства.

Определение 18. Пусть $M = (a_{ij})$ — матрица, $i, j = 1, \dots, n$. Её *определителем* (или *детерминантом*) называется выражение

$$\Delta_M = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} (-1)^{|\sigma|} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{a_{n}i_n}. \tag{10}$$

Матрица M называется *невырожденной*, если её определитель отличен от нуля.

Для определителя используются также обозначения $|a_{ij}|$, $|M|$ и $\det M$.

Предложение 17 (основные свойства определителей). *Пусть M — матрица и $\Delta = \Delta_M$— её определитель. Тогда*:

1) *Определитель не изменится, если матрицу M заменить на* транспонированную $M^* = (a_{ji})$,
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix};$$
2) *определитель меняет знак, если поменять местами любые две его строки (столбца)*;
3) *определитель равен нулю, если элементы каких-нибудь двух строк (столбцов) пропорциональны*;
4) *общий множитель всех элементов какой-нибудь строки (столбца) можно вынести за знак определителя*;
5) *если все элементы какой-либо строки (столбца) являются суммой двух слагаемых, то и определитель является суммой соответствующих определителей, например*,
$$\begin{vmatrix} a_{11}+a'_{11} & a_{12}+a'_{12} & \dots & a_{1n}+a'_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & {}'a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix};$$
6) *определитель не изменится, если к элементам одной строки прибавить линейную комбинацию других строк*;
7) *определитель* треугольной *матрицы равен произведению её диагональных элементов*,
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn};$$
8) *определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению их определителей*,
$$\Delta_{M\cdot N} = \Delta_M \Delta_N.$$

Из последнего равенства и равенства (8) вытекает ещё один важный результат.

Следствие 5. *Пусть $A\colon V \to V$ — линейный оператор и M — его матрица в каком-нибудь базисе пространства V. Тогда определитель Δ_M не зависит от выбора базиса, а определяется самим оператором A.*

Определение 19. Пусть M— квадратная матрица и a_{ij} — её элемент. *Минором*, дополнительным к этому элементу, называется определитель матрицы, полученной из M вычёркиванием i-й строки и j-го столбца. Этот определитель обозначается через M_{ij}. Величина $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ называется *алгебраическим дополнением* элемента a_{ij}.

Теорема 2 (о разложении по строке или столбцу). *Пусть $M = (a_{ij})$ — матрица размера $n \times n$. Тогда для любых i и j имеют место тождества*
$$\Delta_M = (-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1} + (-1)^{i+2}a_{i2}M_{i2} + \dots + (-1)^{i+n}a_{in}M_{in} \tag{11}$$
и
$$\Delta_M = (-1)^{j+1}a_{1j}M_{1j} + (-1)^{j+2}a_{2j}M_{2j} + \dots + (-1)^{j+n}a_{nj}M_{nj} \tag{12}$$

Равенство (11) называется *разложением определителя по i-й строке*, а равенство (12) — *разложением по j-му столбцу.*

Вычисление обратных матриц. Следствием теоремы 2 является другая важная теорема.

Теорема 3. *Квадратная матрица $M = (a_{ij})$ обратима тогда и только тогда, когда её определитель не равен нулю. При этом обратная матрица имеет вид*

$$M^{-1} = \frac{1}{\Delta_M} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \tag{13}$$

где A_{ji} — алгебраические дополнения.

4. Системы линейных уравнений

Определение 20. Пусть V и W — векторные пространства размерности n и m соответственно и $w \in W$ — вектор. *Системой из m уравнений с n неизвестными*, наложенной на неизвестный вектор x, называется уравнение

$$A(x) = w. \tag{14}$$

Вектор $v \in V$ называется *решением* системы (14), если $A(v) = w$. Вектор w называется *правой частью* системы. Система называется *однородной*, если $w = 0$.

Система называется *невырожденной*, если $V = W$ и A — обратимый оператор.

Предложение 18. *Множество S решений однородной системы $A(x) = 0$ является векторным подпространством пространства V. Если $x = v_0$ — некоторое решение системы $A(x) = w$, то $x = v_0 + v$, $v \in S$, — также решение этой системы и любое её решение имеет такой вид.*

Если в пространствах V и W выбрать базисы и представить оператор A матрицей $M = (a_{ij})$, а вектор w — набором его координат $b_1, \dots, b_m$, то система (14) перепишется в виде

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{15}$$

Решение невырожденных систем. Если (14) — невырожденная система, то она имеет единственное решение

$$x = A^{-1}(w). \tag{16}$$

Как практически найти вектор x?

Замечание 2. Если в невырожденной системе (14) (такие системы называются *однородными*) вектор w равен нулю, то её единственным решением является $x = 0$.

Метод обратной матрицы. В силу (16), решение имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Пользуясь теоремой 3, получаем

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\Delta}(M_{11}b_1 - M_{21}b_2 + \dots + (-1)^{n+1}M_{n1}x_n), \\ x_2 = \frac{1}{\Delta}(-M_{12}b_1 + M_{22}b_2 - \dots + (-1)^{n+2}M_{n2}x_n), \\ \dots . \\ x_i = \frac{1}{\Delta}((-1)^{i+1}M_{1i}b_1 + (-1)^{i+2}M_{2i}b_2 + \dots + (-1)^{i+n}M_{ni}x_n), \\ \dots . \\ x_n = \frac{1}{\Delta}((-1)^{n+1}M_{1n}b_1 + (-1)^{n+2}M_{2n}b_2 - \dots + M_{nn}x_n), \end{cases} \tag{17}$$

или

$$x_i = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}M_{ji}b_j, \qquad j = 1, \dots, n, \tag{18}$$

где M_{ji} — минор дополнительный к элементу a_{ji}.

Правило Крамера. Рассмотрим определители

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,i-1} & b_1 & a_{n,i+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad i = 1, \dots, n. \tag{19}$$

Тогда формулу (17) для решений системы можно переписать в виде

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}. \tag{20}$$

Нахождение решений по формуле (20) называется *правилом Крамера.*

Метод Гаусса. Поскольку M — невырожденная матрица, хотя бы одно из чисел $a_{11}, \dots, a_{n1}$ отлично от нуля. Без ограничения общности можно считать, что $a_{11} \neq 0$ (если это не так, строки системы переставить так, чтобы отличный от нуля коэффициент a_{ni} стал первым). Разделив первую строку на a_{11} и вычитая из i-й строки первую, умноженную на a_{i1}, мы придём к системе

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \dots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ \qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \qquad a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 + \dots + a'_{3n}x_n = b'_3, \\ \qquad \dots . \\ \qquad a'_{n2}x_2 + a'_{n3}x_3 + \dots + a'_{nn}x_n = b'_n. \end{cases}$$

Система уравнений

$$\begin{cases} a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 + \dots + a'_{3n}x_n = b'_3, \\ \dots . \\ a'_{n2}x_2 + a'_{n3}x_3 + \dots + a'_{nn}x_n = b'_n \end{cases}$$

также является невырожденной, и с ней можно проделать ту же процедуру, что и с исходной, и т.д. В итоге мы придём к системе уравнений

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \dots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ \qquad x_2 + a'_{23}x_3 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \qquad\qquad x_3 + \dots + a'_{3n}x_n = b'_3, \\ \qquad\qquad \dots . \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_n = b'_n. \end{cases} \tag{21}$$

Это завершает *первый этап* решения по методу Гаусса.

Второй этап состоит из следующих шагов. Из последнего уравнения системы (21) находим x_n. Подставляя x_n в предпоследнее уравнение, находим x_{n-1} и т.д. В итоге мы найдём значения всех неизвестных $x_1, \dots, x_n$.

Метод Гаусса называется также *методом последовательного исключения неизвестных.*

Решение произвольных систем. Пусть $N = (c_{ij})$ — произвольная матрица, $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, l$.

Предложение 19. *Ранг системы векторов*

$$\begin{aligned} c_1 &= (c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1l}), \\ c_2 &= (c_{21}, c_{22}, \dots, c_{2l}), \\ &\dots . \\ c_k &= (c_{k1}, c_{k2}, \dots, c_{kl}) \end{aligned}$$

совпадает с рангом системы

$$\begin{aligned} c_1^* &= (c_{11}, c_{21}, \dots, c_{k1}), \\ c_2^* &= (c_{12}, c_{22}, \dots, c_{k2}), \\ &\dots . \\ c_l^* &= (c_{1l}, c_{2l}, \dots, c_{kl}). \end{aligned}$$

Определение 21. *Рангом* матрицы N называется ранг системы векторов, составленной из её строк или столбцов. Ранг матрицы обозначается через $\operatorname{rank} N$.

Определение 22. Пусть

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{22}$$

— система линейных уравнений. Матрица

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

называется *расширенной матрицей* этой системы.

Теорема 4 (теорема Кронекера–Капелли). *Система* (22) *имеет решение тогда и только тогда, когда ранг r её матрицы $M = (a_{ij})$ совпадает с рангом её расширенной матрицы $\tilde{M}$. При этом решение системы зависит от произвольных $n - r$ параметров. В частности, система имеет единственное решение, если $n = r$.*

Собственные значения и собственные векторы. Пусть $A\colon V \to V$ — линейный оператор и M — его матричная запись в некотором базисе пространства V. Как, пользуясь матрицей M, найти собственные значения и собственные векторы оператора A?

Пусть $v \neq 0$ — собственный вектор, соответствующий собственному значению λ, и $x_1, \dots, x_n$ — его координаты, а a_{ij} — элементы матрицы M. Тогда из определения 10 следует, что должны выполняться равенства

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= \lambda x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= \lambda x_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\dots\\ &a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = \lambda x_n,\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}&(a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0,\\ &a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0,\\ &\dots\\ &a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn}-\lambda)x_n = 0.\end{aligned}$$

Иными словами, однородная система линейных уравнений

$$(M - \lambda E)v = 0 \tag{23}$$

должна иметь ненулевое решение. В силу замечания 2 это возможно тогда и только тогда, когда определитель матрицы системы (23) равен нулю:

$$|M - \lambda E| = 0. \tag{24}$$

Очевидно, выражение, стоящее в левой части уравнения (24), является полиномом степени n относительно λ, т.е. имеет вид

$$|M - \lambda E| = d_0 + d_1\lambda + d_2\lambda^2 + \dots + d_n\lambda^n.$$

При этом, очевидно, $d_n = (-1)^n$, а коэффициент d_0 совпадает с определителем матрицы M.

Определение 23. Полином $\chi_M(\lambda) = |M - \lambda E|$ называется *характеристическим полиномом* (или *многочленом*) матрицы M.

Таким образом, действительное число λ является собственным значением матрицы M, тогда и только тогда, когда оно есть корень её характеристического полинома $\chi_M(\lambda)$. Чтобы найти соответствующий собственный вектор, нужно решить систему уравнений (23) относительно v при данном значении λ.

Пример 10. Если

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

— матрица 2×2, то её характеристический полином имеет вид

$$\chi_M(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{12}a_{21} = \lambda^2 - (a_{11}+a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Таким образом, чтобы найти собственные значения этой матрицы, нужно решить квадратное уравнение

$$\lambda^2 - (a_{11}+a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0. \tag{25}$$

Дискриминант этого уравнения равен $(a_{11}-a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}$, и поэтому матрица M имеет собственные решения тогда и только тогда, когда

$$(a_{11}-a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} \geqslant 0. \tag{26}$$

Пример 11. В случае матрицы 3×3 характеристический полином имеет вид

$$\chi_M(\lambda) = d_0 - d_1\lambda + d_2\lambda^2 - \lambda^3,$$

где $d_0 = \Delta_M$ (как и для любой матрицы),

$$d_1 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

т.е. совпадает с суммой миноров, дополнительных к диагональным элементам, и, наконец,

$$d_2 = a_{11} + a_{22} + a_{33}.$$

Пример 12. Важным для дальнейшего частным случаем примера 10 являются собственные значения *симметрических* 2×2-матриц, т.е. матриц вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

В этом случае неравенство (26) имеет вид

$$(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geqslant 0$$

и, значит, выполняется всегда. Заметим, что равенство возможно тогда и только тогда, когда

$$a_{11} = a_{22}, \quad a_{12} = 0,$$

т.е. M — скалярная матрица, а если неравенство строгое, то существуют два различных собственных значения. Обозначим их через λ_1 и λ_2, и пусть v_1, v_2 — соответствующие им собственные векторы. Предположим, что существуют такие числа μ_1 и μ_2, что

$$\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 = 0. \tag{27}$$

Применяя к этому равенству матрицу M, получаем

$$\mu_1 \lambda_2 v_1 + \mu_2 \lambda_2 v_2 = 0. \tag{28}$$

Умножая равенство (27) на λ_1 и вычитая из (28), получаем

$$(\lambda_2 - \lambda_1)\mu_2 v_2 = 0.$$

Аналогично, умножая на λ_2, получим

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\mu_1 v_1 = 0.$$

Поскольку $\lambda_1 \neq \lambda_2$, а векторы v_1 и v_2 — ненулевые, из этого следует, что $\mu_1 = \mu_2 = 0$, т.е. v_1 и v_2 — линейно независимы. Значит, их можно выбрать в качестве нового базиса. В этом базисе рассматриваемая матрица будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Итак, мы доказали следующий результат:

Теорема 5. *Для любой симметрической матрицы 2×2 существует базис, состоящий из собственных векторов. В этом базисе матрица принимает диагональный вид, причём на диагонали стоят её собственные значения.*

5. Плоскость и трёхмерное пространство

Точкой n-мерного арифметического пространства $\mathbb{R}^n$ называется набор чисел $A = (a_1, \dots, a_n)$, которые называются *координатами* этой точки. Упорядоченная пара точек $\overline{AB}$ называется *направленным отрезком*, соединяющим точки A и B. При этом A называется *началом* этого отрезка, а B его *концом*. Говорят также, что отрезок $\overline{AB}$ *приложен* к точке A. Отрезок $\overline{OA}$, где $O = (0, \dots, 0)$ — начало координат, называется *радиус-вектором* точки A.

Каждому направленному отрезку $\overline{AB}$ соответствует вектор $v_{AB} = (b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n)$. Точки $A_0, \dots, A_k$ называются *коллинеарными*, если ранг системы векторов $v_{A_0A_1}, \dots, v_{A_0A_k}$ равен 1, и *компланарными*, если её ранг равен 2.

Скалярным произведением векторов $v = (v_1, \dots, v_n)$ и $w = (w_1, \dots, w_n)$ называется величина

$$(v, w) = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots + v_n w_n. \tag{29}$$

Величина

$$\|v\| = \sqrt{(v, v)} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2} \tag{30}$$

называется *длиной* вектора v.

Базис $e_1, \dots, e_n$ пространства $\mathbb{R}^n$ называется *ортонормированным*, если

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 1, & \text{при } i = j, \\ 0, & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

В частности, стандартный базис, описанный в примере 7, является ортонормированным.

Случай $n = 2$ (плоскость). На плоскости $\mathbb{R}^2$ координаты точек и векторов иногда принято обозначать через x (абсцисса) и y (ордината). Если $A_0(x_0, y_0)$ и $A_1(x_1, y_1)$ — точки, то величина

$$\|v_{A_0A_1}\| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} \tag{31}$$

совпадает с *длиной отрезка* A_0A_1. Если $A_2(x_2, y_2)$ — третья точка, то скалярное произведение между векторами $v_{A_0A_1}$ и $v_{A_0A_2}$ вычисляется по формуле

$$(v_{A_0A_1}, v_{A_0A_2}) = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) + (y_1 - y_0)(y_2 - y_0). \tag{32}$$

С другой стороны, имеет место равенство

$$\cos\alpha = \frac{(v_{A_0A_1}, v_{A_0A_2})}{\|v_{A_0A_1}\| \cdot \|v_{A_0A_2}\|} = \frac{(x_1 - x_0)(x_2 - x_0) + (y_1 - y_0)(y_2 - y_0)}{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} \cdot \sqrt{(x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2}}, \tag{33}$$

где α — угол $A_1A_0A_2$. Если через $S_{A_0A_1A_2}$ обозначить *площадь треугольника* $A_0A_1A_2$, то имеет место равенство

$$S_{A_0A_1A_2} = \frac{1}{2}|(x_1 - x_0)(y_2 - y_0) - (x_2 - x_0)(y_1 - y_0)|. \tag{34}$$

Пусть заданы две не совпадающие точки $A_1(x_1, y_1)$ и $A_1(x_2, y_2)$ и $A(x, y)$ — произвольная точка плоскости. Эта точка лежит на прямой A_1A_2 тогда и только тогда, когда точки A, A_1 и A_2 коллинеарны. Условие коллинеарности записывается в виде

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{35}$$

Таким образом, (35) — *уравнение прямой, проходящей через точки* $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$.

Замечание 3. Если $x_1 = x_2$, то уравнением прямой является $x = x_1$, а если $y_1 = y_2$, то $y = y_1$. Равенства $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$ не могут выполняться одновременно, поскольку A_1 и A_2 — разные точки.

Уравнение прямой на плоскости можно также задать в виде

$$ax + by + c = 0, \tag{36}$$

где числа a и b одновременно не обращаются в нуль. При этом вектор $v = (a, b)$ *ортогонален* этой прямой, и поэтому уравнение прямой, *перпендикулярной* прямой (36) и проходящей через точку $A_1(x_1, y_1)$, имеет вид

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b}. \tag{37}$$

Вводя новую переменную $t \in \mathbb{R}$, уравнение (37) можно переписать виде

$$x = at + x_1, \quad y = bt + y_1, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{38}$$

Эти уравнения называются *параметрическими уравнениями прямой*, а переменная t — *параметром*.

Случай $n=3$ (трёхмерное пространство). В трёхмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ координаты точек и векторов иногда принято обозначать через x (абсцисса), y (ордината) и z (аппликата). Если $A_0(x_0,y_0,z_0)$ и $A_1(x_1,y_1,z_1)$ — точки, то величина

$$\|v_{A_0A_1}\| = \sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2} \tag{39}$$

совпадает с *длиной отрезка* A_0A_1. Если $A_2(x_2,y_2,z_2)$ — третья точка, то скалярное произведение между векторами $v_{A_0A_1}$ и $v_{A_0A_2}$ вычисляется по формуле

$$(v_{A_0A_1}, v_{A_0A_2}) = (x_1-x_0)(x_2-x_0)+(y_1-y_0)(y_2-y_0)+(z_1-z_0)(z_2-z_0). \tag{40}$$

С другой стороны, имеет место равенство

$$\cos\alpha = \frac{(v_{A_0A_1}, v_{A_0A_2})}{\|v_{A_0A_1}\|\cdot\|v_{A_0A_2}\|} = \\ = \frac{(x_1-x_0)(x_2-x_0)+(y_1-y_0)(y_2-y_0)+(z_1-z_0)(z_2-z_0)}{\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2}\cdot\sqrt{(x_2-x_0)^2+(y_2-y_0)^2+(z_2-z_0)^2}}, \tag{41}$$

где α — угол $A_1A_0A_2$.

Обозначим через $\mathbf{i}=(1,0,0)$, $\mathbf{j}=(0,1,0)$ и $\mathbf{k}=(0,0,1)$ стандартные базисные векторы трёхмерного пространства. Вектор

$$v_{A_0A_1}\times v_{A_0A_2} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} \tag{42}$$

называется *векторным произведением*[1]. Длина этого вектора есть *удвоенная площадь треугольника* $A_0A_1A_2$. Таким образом,

$$S_{A_0A_1A_2} = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1-x_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 \end{vmatrix}^2}. \tag{43}$$

Пусть $A_3(x_3,y_3,z_3)$ — ещё одна точка пространства. Величина

$$(v_{A_0A_1}\times v_{A_0A_2}, v_{A_0A_2}) \tag{44}$$

называется *смешанным произведением* векторов $v_{A_0A_1}$, $v_{A_0A_2}$ и $v_{A_0A_3}$. Оно следующим образом связано с объёмом пирамиды $A_0A_1A_2A_3$:

$$V_{A_0A_1A_2A_3} = \frac{1}{6}|(v_{A_0A_1}\times v_{A_0A_2}, v_{A_0A_2})| = \frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \\ x_3-x_0 & y_3-y_0 & z_3-z_0 \end{pmatrix}\right|. \tag{45}$$

Пусть $A(x,y,z)$ — произвольная точка плоскости. Эта точка лежит на прямой A_1A_2 тогда и только тогда, когда точки A, A_1 и A_2 коллинеарны. Условие коллинеарности записывается в виде

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \end{pmatrix} = 1. \tag{46}$$

Значит,

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} \tag{47}$$

— уравнение прямой, проходящей через точки A_1 и A_2 (см. также замечание 3).

[1]Определитель в правой части равенства (42) является сокращённым обозначением вектора, получаемого разложением по первой строке: $\begin{vmatrix} y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix}\cdot\mathbf{i}-\begin{vmatrix} x_1-x_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix}\cdot\mathbf{j}+\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 \end{vmatrix}\cdot\mathbf{k}$. Такие обозначения часто используются в математике и, в особенности, в физике.

Точка A лежит на плоскости $A_1A_2A_3$ тогда и только тогда, когда точки A, A_1, A_2 и A_3 компланарны. Условие компланарности записывается в виде

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{pmatrix} = 2. \tag{48}$$

Значит, уравнение плоскости, проходящей через точки A_1, A_2 и A_3, имеет вид

$$\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}(x-x_1) - \begin{vmatrix} x_2-x_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}(y-y_1) + \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}(z-z_1) = 0. \tag{49}$$

Уравнения произвольной прямой в пространстве можно также записать в виде

$$\frac{x-\alpha_1}{\alpha} = \frac{y-\beta_1}{\beta} = \frac{z-\gamma_1}{\gamma}, \tag{50}$$

а плоскости — в виде

$$ax + by + cz + d = 0, \tag{51}$$

где $v = (\alpha, \beta, \gamma) \neq 0$ —*направляющий вектор прямой*, а $n = (a, b, c) \neq 0$ — *вектор нормали к плоскости*. Поэтому уравнение плоскости, проходящей через точку (x_1, y_1, z_1) и перпендикулярной к прямой (50), имеет вид

$$\alpha(x-x_1) + \beta(y-y_1) + \gamma(z-z_1) = 0, \tag{52}$$

а прямой, проходящей через эту точку и перпендикулярной плоскости (51) — вид

$$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}. \tag{53}$$

Как и в случае прямой на плоскости, уравнения (53) можно переписать в *параметрической форме*:

$$x = at + x_1, \quad y = bt + y_1, \quad z = ct + z_1, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{54}$$