Часть II. Аналитическая геометрия.

Аналитическая геометрия представляет собой раздел геометрии, в которой геометрические объекты (фигуры) исследуются методами алгебры на основе метода координат. Основными понятиями (аналитической) геометрии являются понятие геометрической фигуры или просто фигуры, и понятие системы координат.

Глава IV. Аналитическая геометрия на плоскости.

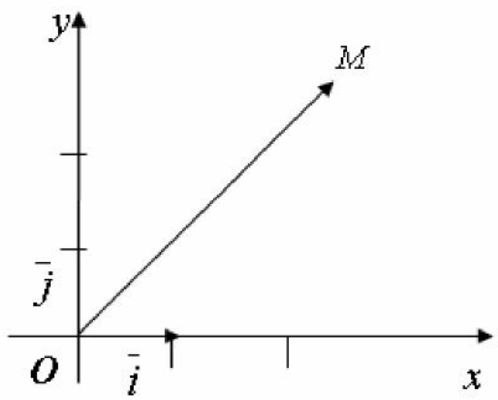
§ 1. Системы координат на плоскости.

Под системой координат на плоскости понимают способ, позволяющий численно описать положение точки на плоскости.

Одной из таких систем является прямоугольная (декартова) система координат.

Прямоугольная система задается двумя взаимно-перпендикулярными прямыми – осями, на каждой из которых: 1) выбрано положительное направление и 2) задан (единичный) (масштабный) отрезок. Обычно, единицу масштаба берут одинаковой для обеих осей.

Оси называют **осями координат**, точку их пересечения O – **началом координат**. Одну из осей называют осью **абсцисс** (осью Ox), другую – осью ординат (осью Oy) (см. рис.).



На рисунках обычно ось абсцисс располагают горизонтально, и направленной слева направо, ось ординат – вертикально и снизу вверх. Оси координат делят плоскость на 4 области – четверти (или квадранты).

Единичные векторы осей часто обозначают $\vec{i}$ и $\vec{j}$ $\left(\left|\overline{i}\right| = \left|\overline{j}\right| = 1,\ \ \overline{i} \perp \overline{j},\ \ (i, j) = 0\right)$.

Систему координат обозначают Oxy $(0ij)$, а плоскость, которую образуют (в которой расположены!) оси координат, называют **координатной плоскостью**.

Как описать положение точки на плоскости?

Рассмотрим произвольную точку M плоскости Oxy. Вектор OM называют **радиус-вектором** точки M. Пользуясь выбранными осями координат, поставим этой точке M (и радиус-вектору $\overline{OM}$ также) в соответствие два числа x и y – **координаты** точки M в заданной системе координат. Как? Для этого из точки

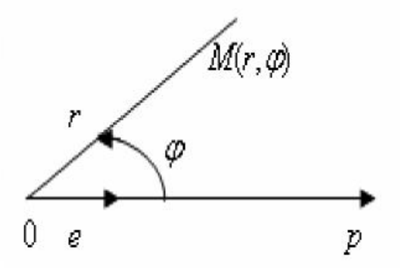
M опустим перпендикуляры на оси координат (спроецируем). Длины отрезков проекции обозначим x и y , соответственно. При этом берем знак « + » или « – » в зависимости от положения относительно начала координат O.

Таким образом, два числа (x, y) однозначно определяют положение точки на плоскости, а именно: каждой паре чисел (x, y) соответствует единственная точка и наоборот. При этом считаем, радиус-ветор OM имеет те же координаты $OM = (x, y)$.

Как задать вектор $\overline{AB}$ с началом в точке $A\left(x_1;\, y_1\right)$ и концом $B\left(x_2;\, y_2\right)$? Как разность радиус-векторов точек А и В. Тогда имеем $\Rightarrow \overline{AB}\left(x_2 - x_1;\; y_2 - y_1\right)$.

<u>Другой</u> практически важной системой координат является <u>**полярная**</u> система координат. Полярная система координат задается точкой O, называемой **полюсом**, лучом Op, называемым **полярной осью** и единичным масштабным вектором $\overline{e}$ на полярной оси Op.

Возьмем на плоскости точку $M \neq 0$. Положение точки M определяется парой чисел: ее расстоянием r от полюса O и углом φ, образованным отрезком OM с полярной осью (отсчет – против часовой стрелки). Числа (r, φ) – полярные координаты (r – <u>полярный радиус</u>, φ – <u>полярный угол</u>.)

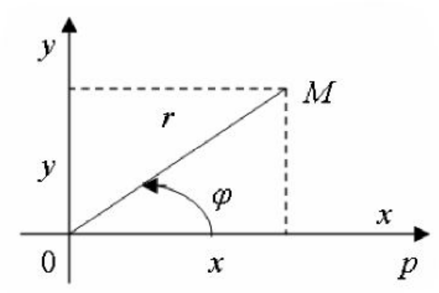


При этом для изучения всех точек плоскости достаточно полярный угол φ ограничить промежутком $-\pi < \phi \leq \pi$ (или $0 \leq \phi < 2\pi$), а полярный радиус – $\left[0,\ +\infty\right)$. В этом случае каждой точке (кроме O!) соответствует единственная пара чисел (r, φ), и наоборот.

Связь полярной и прямоугольной систем координат.

Для установления связи между указанными системами координат, совместим полюс O с началом координат системы Oxy, а полярную ось Op с положительным направлением оси Ox.

Пусть точка M имеет координаты (x, y) и (r, φ) в системе Oxy и полярной системе, соответственно.



Из рисунка видно, что декартовы координаты выражаются через полярные по формулам $\begin{cases} x = r \cdot \cos\phi \\ y = r \cdot \sin\phi. \end{cases}$

Полярные через декартовы: $\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \operatorname{tg}\phi = \dfrac{y}{x}. \end{cases}$

При этом, определяя угол φ, следует установить (по знакам x и y) четверть, в которой лежит искомый угол, и учитывать, что $\pi < \phi \le \pi$ (или $0 \le \phi < 2\pi$).

§ 2. Простейшие приложения метода координат на плоскости.

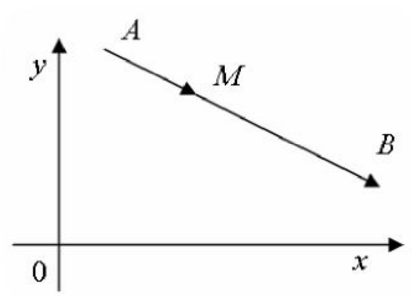
1. Расстояние *d* между двумя точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$.

Искомое расстояние равно длине вектора $\overline{AB}\ \left(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1\right)$. Координаты вектора получаются путем вычитания координат точки A (начала вектора) из координат точки B – конца вектора.

Тогда $$d = \sqrt{\left(\overline{AB}\ ,\ \overline{AB}\right)} = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}\ .$$

2. Деление отрезка в данном отношении.

Требуется разделить отрезок AB, соединяющий точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ в заданном отношении $\lambda > 0$, т.е. надо найти точку $M\ (x, y)$ отрезка AB такую, что $\dfrac{AM}{MB} = \lambda$.



Решение. Рассмотрим векторы $\overline{AM}$ и $\overline{MB}$. Тогда факт, что M делит отрезов AB в отношении λ означает, что $\overline{AM} = \lambda \cdot \overline{MB}$ или в координатной записи: $\begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\left(x_2 - x\right) \\ \lambda\left(y_2 - y\right) \end{pmatrix}$.

Отсюда, $x - x_1 = \lambda x_2 - \lambda x$ или $x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$.

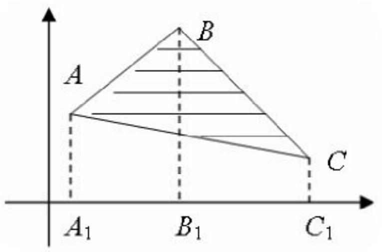
Аналогично, $$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Это – формула деления отрезка в данном отношении $\boldsymbol{\lambda}$.

В частности, при $\lambda = 1$ (т.е. разделить отрезок пополам), т.е когда $AM = MB$, имеем $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$ – координаты середины отрезка AB.

Замечание. Если $\lambda = 0$, то точки A и M совпадают. Если $\lambda < 0$, то точка M лежит <u>вне</u> отрезка AB – говорят, что точка M делит отрезок <u>внешним образом</u> ($\lambda \neq -1$, т.к. тогда бы выполнялось $\dfrac{AM}{MB} = -1$ или $AM + MB = 0$, т.е. $AB = 0$, что невозможно, если точки различны).

3. Площадь треугольника ABC с вершинами $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$.



$$S_{ABC} = S_{AA_1B_1B} + S_{B_1BCC_1} - S_{A_1ACC_1} \Rightarrow$$

Упр. $$S_\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_3 - x_1 & x_2 - x_1 \\ y_3 - y_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix}.$$

Если из данной формулы получилось отрицательное число, то следует взять его по абсолютной величине. Если же = 0 $\Rightarrow$ точки лежат на одной прямой (не существует треугольник).

§ 3. Линии на плоскости. Основные понятия.

Еще одним из важных понятий аналитической геометрии является понятие фигуры (линии, кривой).

Часто линия задается как некоторое множество точек, объединенных специфическим, присущим только данной линии, свойством.

<u>Например</u>, окружность радиуса R (на плоскости) – есть множество всех тех точек плоскости, которые удалены на одно и то же расстояние R от некоторой фиксированной точки O, называемой центром окружности.

Как уже отмечали ранее, введение на плоскости системы координат позволяет определять положение любой точки плоскости заданием двух чисел – ее координат. <u>Положение же линии</u> на плоскости можно определить с помощью <u>уравнения</u> (т.е. равенства, связывающего координаты точек этой линии). Поэтому одной из задач аналитической геометрии состоит в том, чтобы по заданным геометрическим свойствам линии составить ее <u>уравнение</u> в заданной системе координат.

Определение. *Уравнением линии (или кривой) на плоскости Oxy называется такое уравнение* $F(x, y) = 0$ *с двумя переменными, которому удовлетворяют координаты x и y <u>каждой</u> точки линии и не удовлетворяют координаты любой точки, не принадлежащей этой линии.* Переменные x и y в уравнении называются **текущими координатами точек линии**.

Пример. Лежат ли точки K (–2; 1) и L (1; 1) на линии $2x + y + 3 = 0$? $\Rightarrow$ (подставляя координаты точек в уравнение) K – да, L – нет.

Уравнение линии удобно тем, что позволяет заменить изучение геометрических свойств линии исследованием её уравнения.

Аналогичным образом вводится понятие линии в полярной системе координат.

Именно, *уравнение* $F(r,\phi)=0$ *называется уравнением линии, если координаты* r *и* φ *любой точки линии, и только они удовлетворяют этому уравнению.*

Линию на плоскости можно задать также при помощи двух ***параметрических уравнений*** $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \end{cases}$ где x и y – координаты ткущей точки M (x, y), лежащей на данной линии, а t – переменная, называемая ***параметром***. Конкретные значения параметра t определяют положение точки на плоскости. Например, если $\begin{cases} x = t \\ y = t^2, \end{cases}$ то значению t = 2 соответствует точка $M(2;\ 4)$, т.к. $\begin{cases} x = 2 = 2 \\ y = 2^2 = 4. \end{cases}$

Если параметр t <u>меняется</u>, то точка M (x, y) на плоскости <u>перемещается</u>, тем самым «прочерчивая» (описывая) некоторую линию.

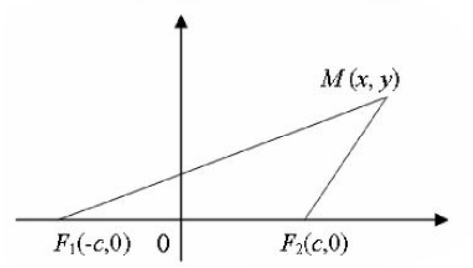
Пример. $\begin{cases} x = t \\ y = t^2. \end{cases}$ Можно исключить «t» из уравнений (путем подстановки) $\Rightarrow$ $y = x^2$ или $y - x^2 = 0$ ($F(x, y) = 0$). Это линия есть парабола.

Примеры линий на плоскости.

1. Эллипс.

Дадим вначале геометрическое свойство, описывающее эту линию.

Определение. *Линия, для всех точек которой сумма расстояний от двух заданных точек, называемых* ***фокусами****, если величина постоянная и большая, чем расстояние между фокусами, называется* ***эллипсом***.



Как «рисовать»?

1) вспомним окружность : ее можно нарисовать с помощью «1 гвоздя и веревки»;

2) эллипс $\Rightarrow$ «2 гвоздя и веревка «

Составим уравнение эллипса. Для этого введем обозначения: 1) фокусы обозначим через F_1 и F_2; 2) расстояние между фокусами – $2c$; 3) сумму расстояний от произвольной (текущей) точки M эллипса до фокусов – через $2a$ (см. Рис.) («2» – для удобства). Ясно, что $2a > 2c$, т.е. $a > c$.

Выберем систему координат так, чтобы фокусы лежали на оси Ох, а начало координат O совпало со срединой отрезка F_1F_2. Тогда фокусы имеют координаты $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$.

Пусть $M\,(x, y)$ – произвольная текущая точка эллипса. Тогда согласно геометрическому описанию эллипса должно быть $MF_1 + MF_2 = 2a$. Значит, отсюда следует (согласно формуле вычисления расстояний)

$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$ – это по сути уравнение эллипса.

Его можно «упростить» к виду (Упр.)

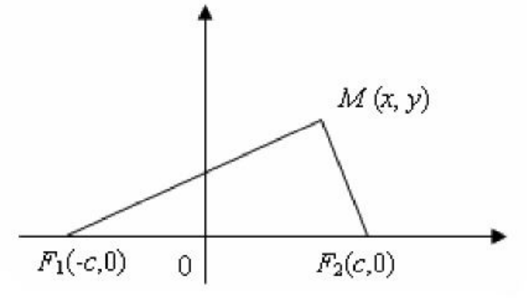
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad \textbf{каноническое уравнение эллипса}.$$

где ввели обозначение b как $\qquad a^2 - c^2 = b^2$

Упражнение. Изучить свойства эллипса: a, b – полуоси, эксцентриситет $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ – мера вытянутости $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ –, директрисы $x = \pm\dfrac{\varepsilon}{a}$.

2. Гиперболой *называется множество всех точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых* ***фокусами****, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.*

Если ввести обозначения, аналогичные предыдущему, то аналитически описанное геометрически свойство означает, что



$|MF_1 - MF_2| = 2a$ или

$MF_1 - MF_2 = \pm 2a$,

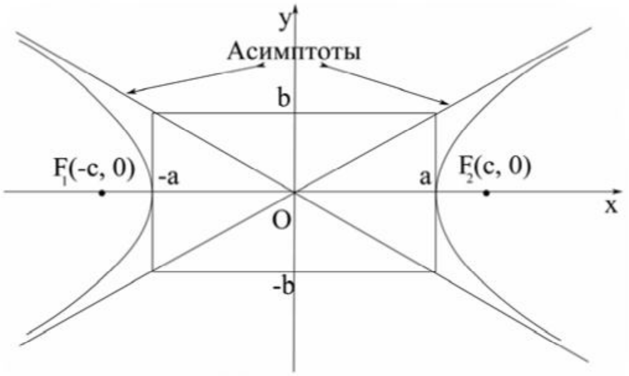
т.е.

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

После упрощений (упр.) получаем каноническое уравнение гиперболы

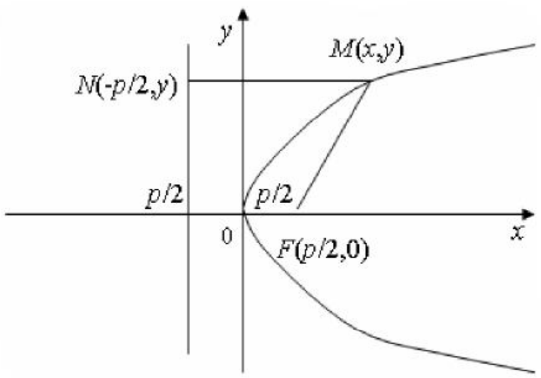
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad \text{где } b^2 = c^2 - a^2 \ (2a < 2c \Rightarrow c < a).$$

Упражнение. Изучить свойства графика гипероболы.



3. Параболой *называется множество всех точек плоскости, каждая из которых* *<u>одинаково удалена</u> от <u>данной точки</u>, называемой* ***фокусом****, и данной прямой, называемой* ***директрисой***. Расстояние от фокуса F до директрисы называется параметром параболы и обозначается через $p \quad (p > 0)$.

Для вывода уравнения выберем систему координат Oxy так, чтобы <u>ось Ox</u> проходила через фокус F <u>перпендикулярно</u> директрисе в направлении <u>от</u> директрисы к F, а начало координат расположим посередине между фокусом и директрисой.



Тогда $F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$, а уравнение директрисы имеет вид $x=-\dfrac{p}{2}$ или $x+\dfrac{p}{2}=0$.

Проведем $MN \perp$ директрисе. $\Rightarrow$ Согласно «описанию» параболы имеем $MF = MN$ или $\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2}=\sqrt{(x+\frac{p}{2})^2} \quad \Rightarrow$ (преобразуем, возводя в квадрат)

$$y^2 = 2px \quad – \text{ каноническое уравнение параболы.}$$

Упражнение. Нарисовать линии

1) $\begin{cases} x = R\sin t \\ y = R\cos t \end{cases}$; 2) $r = a\cdot\cos 3\phi \quad (a>0)$

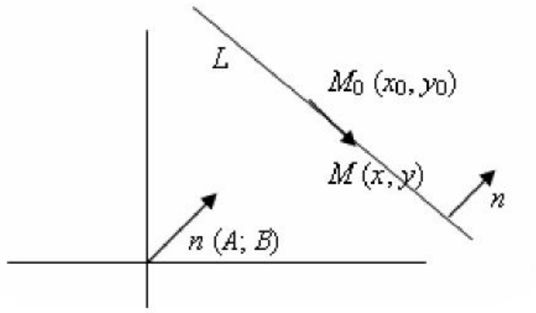
§ 4. Прямая на плоскости

Прямую на плоскости относительно фиксированной системы координат можно задать:

1) двумя различными ее точками;
2) точкой и направление (вектором) прямой;
3) точкой прямой и вектором, перпендикулярным прямой.

Рассмотрим различные варианты аналитического задания прямой на плоскости.

1. Общее уравнение прямой.



Пусть в прямоугольной системе координат Oxy заданы вектор $n\ (A; B)$ и точка $M_0\left(x_0; y_0\right)$.

Задача. Найти уравнение прямой L, проходящей через M_0 и которая перпендикулярна вектору n.

Пусть $M\ (x, y)$ − произвольная (текущая) точка искомой прямой L. Тогда при любом положении точки M вектор $\overline{M_0M}\left(x - x_0, y - y_0\right)$ должен быть $\perp$ вектору $n\ (A; B)$. Следовательно, их скалярное произведение равно нулю:

$$\left(\overline{M_0M},\ \overline{n}\right) = 0 - \text{ это векторное уравнение прямой.} \tag{1}$$

Запишем (1) в координатной форме, пользуясь определением скалярного произведения:

$$A\left(x - x_0\right) + B\left(y - y_0\right) = 0 \tag{2}$$

$$\text{или} \qquad Ax + By + C = 0 \tag{3}$$

где $\qquad C = -Ax_0 - By_0, \qquad A^2 + B^2 \neq 0$.

<u>Таким образом</u>, показали, что координаты любой точки прямой L должны удовлетворять уравнению первой степени (3). <u>Можно доказать</u> и обратное: всякое уравнение (3) первой степени (относительно переменных x и y) определяет на плоскости R^2 некоторую прямую (перпендикулярную вектору $n\ (A; B)$).

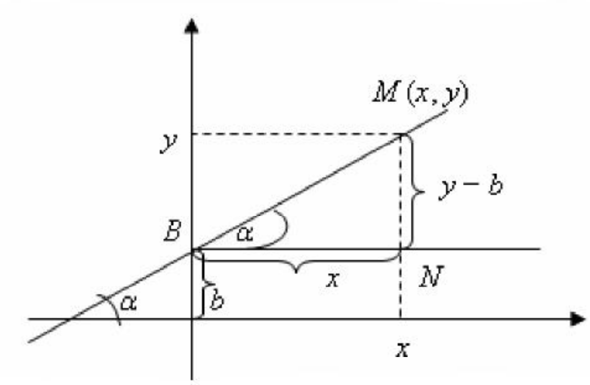
Уравнение (2) называют уравнением прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно к данному вектору. Уравнение (3) называют <u>общим</u> уравнением прямой.

2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.

<u>Под углом</u> наклона прямой к оси Ox понимают угол, отсчитываемый в направлении движения, противоположным движению часовой стрелки, от положительного направления оси x до данной прямой.

Тангенс угла наклона прямой к оси Ox называется **угловым коэффициентом** этой прямой и обозначается k.

1. Если прямая $||$ оси Ox, то $k = 0$. Если прямая $\perp$ оси Ox, то k не существует (обращается в ∞).



2. Если известен угловой коэффициент k и величина b отрезка, отсекаемого прямой на оси Oy, то как следует из рисунка, для произвольной точки M (x, y) этой прямой $\dfrac{NM}{BN} = \mathrm{tg}\,\alpha \Rightarrow k = \dfrac{y-b}{x}$. Откуда

$$y = kx + b \tag{4}$$

(4) – уравнение прямой с угловым коэффициентом.

3. Уравнение прямой с заданным угловым коэффициентом *k* и проходящей через заданную точку $M_0(x_0; y_0)$.

Искомое уравнение L имеет вид $y = kx + b$. Но так как $M_0 \in L$, то ее координаты удовлетворяют данному уравнению. Значит, $y_0 = kx_0 + b$. Вычитая это из предыдущего уравнения, имеем $y - y_0 = k(x - x_0)$.

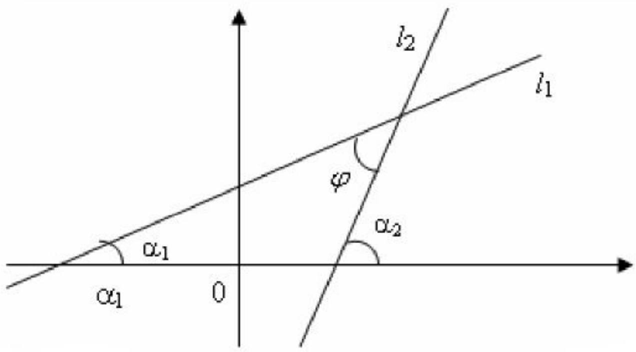
4. Уравнение прямой *L*, проходящей через две заданные точки.

Пусть заданы $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, причем $x_1 \neq x_2$. Т.к. $M_1 \in L$, то L имеет вид (см. выше) $y - y_1 = k(x - x_1)$. Но этой же прямой должна принадлежать и точка M_2. Следовательно, M_2 удовлетворяет последнему уравнению: $y - y_1 = k(x - x_1) \Rightarrow y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$. Отсюда $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Подставляя найденный коэффициент в уравнение $y - y_1 = k(x - x_1)$ имеем $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$. Если разделим на $(y_2 - y_1)$ (при условии $y_2 \neq y_1$), то имеем в итоге

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

5. Угол между двумя прямыми. Условия перпендикулярности и параллельности двух прямых.



Определение. *Углом между двумя прямыми (см. Рис.) называется любой из двух углов, образованных* *прямыми при их пересечении.*

Пусть ϕ $(0 \le \phi \le \pi)$ − угол между прямыми l_1 и l_2, которые задаются уравнениями $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$, соответственно, где $k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$ и $k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$. Тогда из рис. видно, что $\alpha_2 = \alpha_1 + \phi$. Откуда $\phi = \alpha_2 - \alpha_1$. Тогда, пользуясь формулами тригонометрии, имеем

$$\operatorname{tg}\phi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \cdot \operatorname{tg}\alpha_2}.$$

Или

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \qquad (*)$$

Если прямые $||$, то $\phi = 0$ и $\operatorname{tg}\phi = 0 \Rightarrow k_2 - k_1 = 0$, т.е. $k_1 = k_2$.
И наоборот, если $k_2 = k_1$, то $\phi = 0$, т.е. прямые $||$.

Таким образом, необходимым и достаточным условием параллельности двух прямых является условие $k_2 = k_1$ − равенство угловых коэффициентов.

Если прямые $\perp$, т.е. $\phi = \dfrac{\pi}{2}$, то

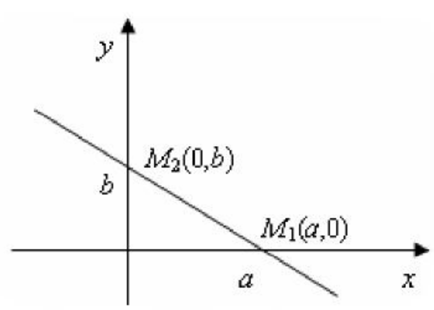
$$\alpha_2 = \frac{\pi}{2} + \alpha_1 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_1\right) = -\operatorname{ctg}\alpha_1 = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_1}, \text{ т.е. } k_2 = -\frac{1}{k_1}$$

или $k_2 \cdot k_1 = -1$. И наоборот: если $k_2 \cdot k_1 = -1$, то из формулы (*) следует $\phi = \dfrac{\pi}{2}$, то прямые перпендикулярны.

Таким образом, для перпендикулярности прямых необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$ − или $k_2 \cdot k_1 = -1$

т.е. угловые коэффициенты взаимо- обратны с противоположным знаком.

6. Уравнение прямой в отрезках.

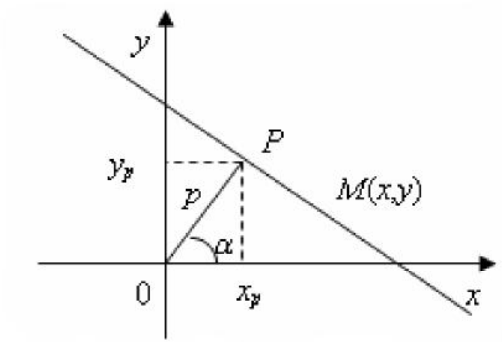


Пусть прямая <u>отсекает</u> на осях координат *Ox* и *Oy* отрезки $a \ne 0$, $b \ne 0$, соответственно. Тогда легко видеть, что точки пересечения прямой с осями координат есть $M_1(a;\ 0)$, $M_2(0;b)$. Составим теперь уравнение прямой, проходящей через данные точки пересечения $M_1(a;\ 0)$, $M_2(0;b)$.

Имеем $\dfrac{y-0}{b-0} = \dfrac{x-a}{0-a}$ или $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ − уравнение прямой в отрезках.

7. Нормальное уравнение прямой (нормированное уравнение прямой).

Пусть на прямую (не проходящую через *O*), опущен перпендикуляр *OP*, длина которого *p*, а угол с осью *Ox* равен α. Из рис. $\Rightarrow$ $x_p = p \cdot \cos\alpha$,



$y_p = p \cdot \sin\alpha$. Возьмем $\forall$ точку $M(x, y)$ на прямой. Т.к. прямые *OP* и *PM* взаимно-перпендикулярны, то

$$k_{OP} \cdot k_{PM} = -1.$$

Но $k_{OP} = \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $k_{PM} = \dfrac{y_M - y_P}{x_M - x_P}$, (см. вывод уравнения прямой через две точки!), т.е. $k_{PM} = \dfrac{y - p \cdot \sin\alpha}{x - p \cdot \cos\alpha}$. (Здесь и далее для удобства индекс «М» для координат текущей точки M опущен).

Тогда, подставляя найденное значение в равенство $k_{OP} \cdot k_{PM} = -1$, имеем

$\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \dfrac{y - p \cdot \sin\alpha}{x - p \cdot \cos\alpha} = -1$ или

$y \cdot \sin\alpha - p\sin^2\alpha - p\cos^2\alpha + x\cos\alpha = 0$

Отсюда в итоге получим

$x \cdot \cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ — **нормальное уравнение прямой**.

Для него характерно:
1) сумма квадратов коэффициентов при переменных *x* и *y* равна 1;
2) свободный член (− p) – отрицателен.

Пусть дано общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$ и для этой же прямой пусть $x \cdot \cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ есть его нормальное уравнение. Т.к. эти уравнения определяют одну и ту же прямую, то коэффициенты этих уравнений пропорциональны, т.е.

$$\cos\alpha = \mu A, \ \sin\alpha = \mu B, \ -p = \mu C.$$

Чтобы найти коэффициент μ, используем первые два равенства

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 = \mu^2\left(A^2 + B^2\right) \ \Rightarrow \ \mu = \pm\sqrt{\frac{1}{A^2 + B^2}} \ -$$

так называемый ***нормирующий множитель***, т.е. множитель, после умножения на который общее уравнение приобретает вид нориального уравнения.

Для определения знака «μ» следует воспользоваться третьим равенством $\mu C = -p$, из которого следует, что знак μ выбирается противоположным знаку коэффициента C.

Пример.

$$3x+4y-5=0 \Rightarrow \mu=+\frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{1}{5}=0,2 \Rightarrow 0,2\cdot 3x+0,2\cdot 4y-0,2\cdot 5=0$$

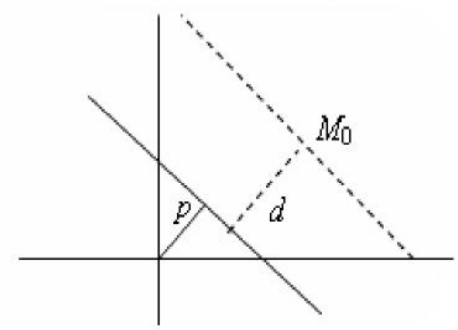
или $0,6x+0,8y-1=0$.

Вопрос: на каком расстоянии от начала координат находится данная прямая?
Ответ : на расстоянии $d=1$
(это следует из смысла коэффициентов нормального уравнения прямой)!

8. Расстояние от точки до прямой.

Задача. Найти расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой, заданной нормальным уравнением $x\cdot\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$.

Для удобства, пусть пока O и M_0 лежат по разные стороны от прямой.



Уравнение прямой, проходящей через M_0 и $||$ данной прямой, имеет вид $x\cdot\cos\alpha + y\sin\alpha - (p+d) = 0$ (вспомните смысл нормального уравнения прямой!). Точка M_0 лежит на этой прямой. Следовательно, ее координаты удовлетворяют этому уравнению , т.е. верно равенство $x_0\cdot\cos\alpha + y_0\sin\alpha - (p+d) = 0$.

Отсюда $d = x_0\cdot\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p$.

Нетрудно проверить, что если O и M_0 лежат по одну сторону от прямой (**Упр.**), то $d = -\left(x_0\cdot\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p\right)$.

Таким образом, объединяя эти выражения имеем формулу для вычисления расстояния от точки до прямой:

$$d = \left|x_0\cdot\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p\right|$$

или с учетом вида нормирующего множителя μ

$$d = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Пример. Найти расстояние от точки $M_0(-1,3)$ до прямой $3x+4y-5=0$.

Прежде надо найти нормальное уравнение данной прямой $\Rightarrow 0,6x+0,8y-1=0$. Тогда $d = \left|0,6\cdot(-1)+0,8\cdot 3-1\right| = 0,8$.

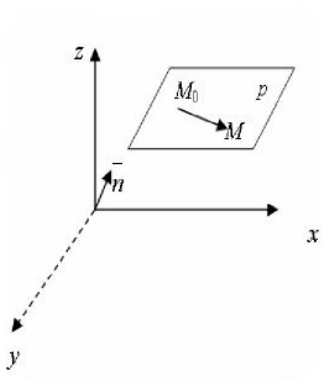
Глава V. Прямая и плоскость в пространстве

§ 1. Плоскость в пространстве

1. Общее уравнение плоскости.

Пусть плоскость P проходит через точку $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ перпендикулярно вектору n (A, B, C). Вектор n называют **нормальным вектором плоскости**. Эти условия определяют единственную плоскость в R^3. Найдем ее уравнение.

Возьмем в плоскости P произвольную точку $M(x,y,z)$. Тогда вектор $\overline{M_0M}(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ будет $\perp \overline{n}$. Следовательно, их скалярное произведение равно 0. Таким образом,



$\left(\overline{n}, \overline{M_0M}\right) = 0 -$ векторное уравнение плоскости.

Это равенство в координатной форме имеет вид

$A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)+C\left(z-z_0\right)=0$ — уравнение плоскости, проходящей через заданную точку и перпендикулярной заданному вектору.

После преобразования последнее равенство принимает вид

$Ax+By+Cz+D=0$ — общее уравнение плоскости, (**)

где $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$

Упражнение. Если в (**) некоторые коэффициенты равны нулю, то такая плоскость имеет характерные особенности в расположении относительно осей координат. Проанализируйте!

2. Угол между плоскостями. Условия перпендикулярности («⊥») и параллельности («||») плоскостей.

Пусть заданы две плоскости $A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0$, $i=1,2$. Будем называть углом φ между плоскостями угол, образованный нормальными векторами этих плоскостей $n_i=\left(A_i, B_i, C_i\right)$, $i=1,2$. Следовательно,

$$\cos\phi = \frac{\left(n_1, n_2\right)}{\left|n_1\right|\cdot\left|n_2\right|} = \frac{A_1\cdot A_2 + B_1\cdot B_2 + C_1\cdot C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Если плоскости $\perp$, то векторы n_1 и n_2 – ортогональны $\Rightarrow$ их скалярное произведение = 0, т.е.

$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0$ – <u>условие перпендикулярности плоскостей</u>.

Если плоскости $||$, то векторы n_1 и n_2 – коллинеарны. Следовательно, их координаты пропорциональны

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = t$$ – <u>условие параллельности плоскостей</u>

(t – коэффициент пропорциональности).

3. Нормальное уравнение плоскости.

По аналогии с прямой в R^2 можно вывести нормальное уравнение плоскости в виде

$$x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta + z \cdot \cos\gamma - p = 0,$$

где

p – длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость;

$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – координаты вектора нормали плоскости <u>единичной длины</u> или, по-другому, α, β, γ – углы. образованные нормалью с координатными осями).

Нормирующий множитель μ (т.е. тот множитель, который общее уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ приводит к нормальной форме), имеет вид $\mu = \pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. Знак μ выбирается противоположным знаку D (т.е . выбирает так, чтобы μ D < 0). (Если D = 0, то знак μ – произвольный).

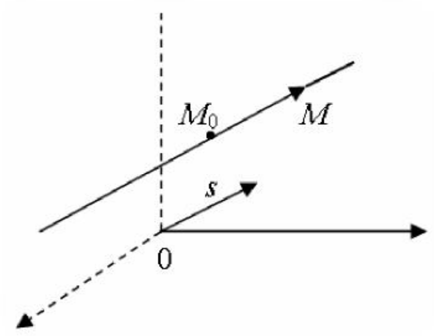
4. Расстояние от точки до плоскости.

По аналогии с R^2 расстояние d от заданной точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до данной плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ вычисляется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

5. Уравнение прямой, проходящей через три заданные точки **(Упр.)**

§ 2. Прямая в пространстве



1. Параметрическое уравнение прямой.

Пусть даны точка $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ на прямой и вектор $\bar{s}=(l,m,n)$, лежащий на этой прямой (или ей параллельной). Вектор $\bar{s}$ называют еще **направляющим вектором прямой**.

Этими условиями <u>однозначно</u> определяется прямая в пространстве. Найдем ее уравнение. Возьмем произвольную точку $M(x,y,z)$ на прямой. Ясно, что векторы $\overrightarrow{M_0M}(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ и $\bar{s}$ коллинеарны.

Следовательно, $\overrightarrow{M_0M}=t\cdot\bar{s}-$ есть векторное уравнение прямой.

В координатной записи последнее уравнение имеет следующее параметрическое представление

$$\boxed{x=x_0+t\cdot l,\quad y=y_0+tm,\quad z=z_0+tn,\quad -\infty<t<+\infty,}$$

где t – «пробегает» промежуток $(-\infty,\infty)$, (т.к. точка $M(x,y,z)$ должна «пробегать» всю прямую).

2. Каноническое уравнение прямой.

Исключив параметр t из предыдущих уравнений, имеем

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}\quad(=t)-$$ каноническое уравнение прямой.

3. Угол между прямыми. Условия «$||$» и «$\perp$» двух прямых.

<u>Пусть даны д</u>ве прямые $L_i:\dfrac{x-x_i}{l_i}=\dfrac{y-y_i}{m_i}=\dfrac{z-z_i}{n_i}\;,\quad i=1,2.$

Определение. ***Углом между прямыми*** *L_1 и L_2 назовем любой угол из двух углов, образованными двумя прямыми, соответственно параллельными данной и <u>проходящими</u> через одну точку* (для чего возможно требуется совершить параллельный перенос одной из прямых).

Из определения следует, что один из углов равен углу φ между направляющими векторами прямых $\overline{s_1}=(l_1,m_1,n_1)$ и $\overline{s_2}=(l_2,m_2,n_2)$, [а второй угол тогда будет равен $(\pi - \phi)$]. Тогда угол определяется из соотношения

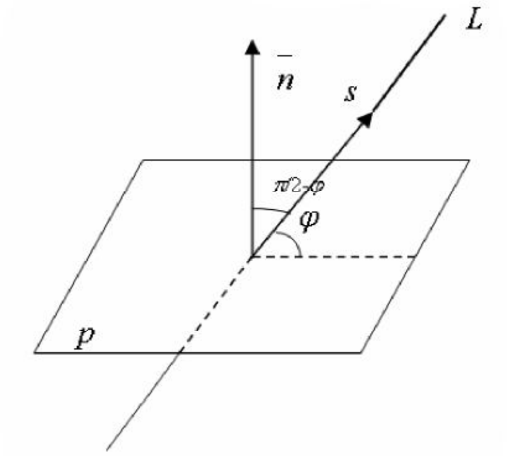
$$\cos\phi = \frac{\left(\overline{s_1}, \overline{s_2}\right)}{\left|s_1\right| \cdot \left|s_2\right|} = \frac{l_1 \cdot l_2 + m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$$

<u>Прямые параллельны</u>, если s_1 и s_2 коллинеарны $\Rightarrow \dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \mathrm{t}$.

Прямые перпендикулярны $\Rightarrow s_1 \perp s_2 \Rightarrow l_1 \cdot l_2 + m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 = 0$.

4. Угол между прямой и плоскостью. Условия «||» и «⊥» прямой и плоскости.

Пусть прямая L задана своим каноническим уравнением $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$, а плоскость P – уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$.



Определение. ***Углом между прямой L и плоскостью p*** *называется острый угол между прямой L и ее проекцией на плоскость.*

Из определения (и рисунка) следует, что искомый угол φ является дополнительным (до прямого угла) к углу между вектором нормали $\overline{n}(A, B, C)$ и направляющим вектором $\overline{s}(l, m, n)$.

Тогда $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \phi\right) = \sin\phi = \dfrac{\left(\overline{s}, \overline{n}\right)}{\left|\overline{s}\right| \cdot \left|\overline{n}\right|} = \dfrac{\left|Al + Bm + Cn\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$

($|\,.\,|$ берется, чтобы получить острый угол).

Если $L \,||\, P$, то тогда $s \perp n \Rightarrow \left(\overline{s}, \overline{n}\right) = 0 \Rightarrow$

$Al + Bm + Cn = 0 -$ условие «||».

Если $L \perp P$, то тогда s коллинеарно $n \Rightarrow$

$\dfrac{A}{l} = \dfrac{B}{m} = \dfrac{C}{n} -$ условие «⊥».

5. Точки пересечения прямой и плоскости.

$$L: \quad x = x_0 + l \cdot t,, \qquad y = y_0 + m \cdot t, \qquad z = z_0 + n \cdot t;$$

$$P: \quad Ax + By + Cz + D = 0.$$

Подставив выражения для x, y, z в уравнение плоскости и преобразовав,

найдем $$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Al + Bm + Cn}.$$

Теперь, если подставить найденное «t» в параметрические уравнения прямой, то найдем искомую точку пересечения